МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2002

УДК 624.072.21/23

© 2002 г. Ю.И. БУТЕНКО

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ТЕОРИИ СТЕРЖНЕЙ ИЗ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА. Ч2

В статье автора [1] формулируется многочленная асимптотическая теория внутренней задачи расчета стержня из ортотропного материала, построенная с точностью ε^2. В данной работе продолжены эти исследования для задачи погранслоя.

1. Решение задачи погранслоя. Чтобы построить напряженно-деформированное состояние погранслоя у края $\xi = 0$ (второе расщепление возмущенного оператора у края), в уравнения плоской задачи теории упругости вводят растяжение координаты $t = \xi/\varepsilon$ [2–4]. Этим выделяются главные члены при дифференцировании по продольной координате.

1.1. Симметричная задача. Однородные уравнения равновесия [1] в задаче погранслоя в этом случае имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\sigma_{xp,0}+\frac{1}{3}\varepsilon^2\sigma_{xp,2}+\frac{1}{5}\varepsilon^4\sigma_{xp,4}+\ldots\right)=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}\sigma_{xp,0}+\frac{1}{5}\varepsilon^2\sigma_{xp,2}+\frac{1}{7}\varepsilon^4\sigma_{xp,4}+\ldots\right)-2\left(\frac{1}{3}\varepsilon\tau_{xyp,1}+\frac{1}{5}\varepsilon^3\tau_{xyp,3}+\ldots\right)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{5}\sigma_{xp,0}+\frac{1}{7}\varepsilon^2\sigma_{xp,2}+\frac{1}{9}\varepsilon^4\sigma_{xp,4}+\ldots\right)-4\left(\frac{1}{5}\varepsilon\tau_{xyp,1}+\frac{1}{7}\varepsilon^3\tau_{xyp,3}+\ldots\right)=0$$

....

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}\varepsilon\tau_{xyp,1}+\frac{1}{5}\varepsilon^3\tau_{xyp,3}+\ldots\right)-\left(\sigma_{yp,0}+\frac{1}{3}\varepsilon^2\sigma_{yp,2}+\frac{1}{5}\varepsilon^4\sigma_{yp,4}+\ldots\right)=0 \tag{1.2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{5}\varepsilon\tau_{xyp,1}+\frac{1}{7}\varepsilon^3\tau_{xyp,3}+\ldots\right)-3\left(\frac{1}{3}\sigma_{yp,0}+\frac{1}{5}\varepsilon^2\sigma_{yp,2}+\frac{1}{7}\varepsilon^4\sigma_{yp,4}+\ldots\right)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{7}\varepsilon\tau_{xyp,1}+\frac{1}{9}\varepsilon^3\tau_{xyp,3}+\ldots\right)-5\left(\frac{1}{5}\sigma_{yp,0}+\frac{1}{7}\varepsilon^2\sigma_{yp,2}+\frac{1}{9}\varepsilon^4\sigma_{yp,4}+\ldots\right)=0$$

....

где σ_{xp}, σ_{yp}, τ_{xyp} определяются физическими соотношениями

$$\sigma_{xp,2i}=\overline{E}_1\gamma_{xp,2i}=E_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{du_{p,2i}}{dt}+\nu_{12}(2i+1)\upsilon_{p,2i+1}\right)$$

$$\sigma_{yp,2i}=\overline{E}_2\gamma_{yp,2i}=E_2\left((2i+1)\upsilon_{p,2i+1}+\nu_{21}\frac{1}{\varepsilon}\frac{du_{p,2i+1}}{dt}\right) \tag{1.3}$$

$$\tau_{xyp,2i+1}=G_{12}\gamma_{xyp,2i+1}=G_{12}\left((2i+2)u_{p,2i+2}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\upsilon_{p,2i+1}}{dt}\right)$$

Решение уравнений (1.1) – (1.2) при выражениях (1.3) ищем в виде функций погранслоя [2–4]:

$$R_p(t) = \sum_{s=0} \varepsilon^{\varkappa_p + s} R_p^s e^{-\lambda t} \tag{1.4}$$

где R_p – любое из напряжений и перемещений погранслоя. Здесь и в дальнейшем всем величинам, относящимся к погранслою приписывается индекс p ($\varkappa_p$ – показатель интенсивности, вещественное число). Он подбирается так, чтобы после подстановки в уравнении (1.1), (1.2) получить непротиворечивую систему уравнений для определения постоянных R_p^s, λ – характеризует изменяемость напряжений и перемещений погранслоя. По свойству погранслоя функции решения погранслоя должны затухать при $t \to \infty$, поэтому Re $\lambda > 0$. Без учета решения задачи погранслоя (1.4) не удается удовлетворить поставленным краевым условиям и, следовательно, это решение является сингулярным.

В данном случае из (1.1) – (1.3) имеем

$$(\sigma_{xp,2i}, \sigma_{yp,2i}, v_{p,2i+1}) = \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa_p} (\sigma^s_{xp,2i}, \sigma^s_{yp,2i}, v^s_{p,2i+1}) e^{-\lambda t}$$

$$\tau_{xy,2i+1} = \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa_p - 1} \tau^s_{xyp,2i+1} e^{-\lambda t}, \qquad u_{p,2i} = \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa_p + 1} u^s_{p,2i} e^{-\lambda t} \tag{1.5}$$

где $\varkappa_p = \varkappa - 2i$ и $\varkappa$ – целое число, которое определяется при рассмотрении вопроса взаимодействия погранслоя с внутренним напряженным состоянием стрежня. После подстановки (1.5) в (1.1) – (1.3) получим однородную алгебраическую систему уравнений относительно компонент вектора перемещения $u_{p,2i}$, $v_{p,2i+1}$, которая содержит показатель изменяемости погранслоя λ. Из условия существования ненулевых решений однородной алгебраической системы уравнений получим квадратную λ-матрицу, порядок которой зависит от выбранной модели расчета стержня. Известным приемом введения дополнительных искомых функций данная проблема λ-матрицы сводится к обобщенной собственной проблеме

$$(B^{-1}A - E\lambda)X = 0 \tag{1.6}$$

где A – матрица общего вида, B – симметричная матрица, E – единичная матрица, X – вектор решения.

Составлена и реализована программа по решению собственной проблемы (1.6) на ПЭВМ, корни решения которой зависят от выбранной модели стержня. Известно, что в собственной задаче существует проблема получения достаточно точных значений собственных чисел и векторов. Поэтому, рассматривая модель стержня порядка N, желательно рассматривать собственную проблему несколько большего порядка. Так как собственная проблема для ортотропного тела сильно зависит от отношений E_1/G_{12}, E_1/E_2, то для простоты сначала остановимся на изотропном теле.

Метод асимптотического интегрирования [2, 4] приводит для плоской симметричной задачи изотропного тела к уравнению [4] $\sin 2\lambda + 2\lambda = 0$, которое хорошо изучено. Симметричная задача для изотропного тела имеет два нулевых корня, соответствующие жесткому смещению стержня. Остальные корни комплексные, составляют счетное множество и симметрично расположены относительно вещественной оси и начала координат ($\lambda_n = \pm X_n \pm iY_n$). Действительная положительная часть X_n первого ненулевого корня характеризует быстроту затухания погранслоя. Следовательно, для того чтобы напряженно-деформированное состояние в прямоугольнике можно было расчленить на внутреннее и типа погранслоя, его продольный размер должен быть таким, чтобы величина exp $(-a/hX_1)$ была пренебрежимо мала по сравнению с единицей. Сравнение результатов λ по предложенной методике и точного решения [4] показывает, что при некоторых моделях стержня по предложенной методике будем иметь как комплексные корни, так и действительные, и с каждым приближением $N_1 > N$ уточняется все больше собственных чисел в сравнении с точным решением. Например, модель стержня $N = 0$ при $u = u_0$, $v = v_1 z$ имеет два действительных корня $\lambda = \pm\sqrt{6(1+\nu)}$, что свидетельствует о наличии в ней погранслоев. В симметричной задаче изотропного тела [4] $X_1 = 2.1062$, причем уже модель стержня $N = 1$ дает очень близкий к точному результат $X_1 = 2.10615$.

Напряжения и перемещения, определяемые собственной проблемой (1.6), в случае комплексных корней являются вещественными функциями, поскольку каждому корню λ_n соответствует сопряженный корень $\overline{\lambda}_n$. Принимая, что C_n^s – произвольная постоянная в решении задачи погранслоя и $\lambda_n = X_n + iY_n$ $(X_n > 0,\ \ Y_n > 0)$, $C_n^s = \frac{1}{2}(C_{1n}^s - iC_{2n}^s)$, получим решение в виде $Q^s = \operatorname{Re} Q^s C_{1n}^s + \operatorname{Im} Q^s C_{2n}^s$, содержащее вещественные функции и произвольные вещественные константы C_{1n}^s, C_{2n}^s. В частности решение задачи погранслоя для симметричной задачи изотропного тела, построенной с точностью ε^2, представим в виде [5]:

$$u_{p,0}^s = C + \sum_{k=1}^{2}[C_{2k-1}^s(\alpha_{1k}\cos Y_k t - \overline{\alpha}_{1k}\sin Y_k t) + C_{2k}^s(\overline{\alpha}_{1k}\cos Y_k t + \alpha_{1k}\sin Y_k t)]e^{-X_k t}$$

$$v_{p,1}^s = \sum_{k=1}^{2}[C_{2k-1}^s(\alpha_{2k}\cos Y_k t - \overline{\alpha}_{2k}\sin Y_k t) + C_{2k}^s(\overline{\alpha}_{2k}\cos Y_k t + \alpha_{2k}\sin Y_k t)]e^{-X_k t}$$

$$u_{p,2}^s = \sum_{k=1}^{2}[C_{2k-1}^s(\alpha_{3k}\cos Y_k t - \overline{\alpha}_{3k}\sin Y_k t) + C_{2k}^s(\overline{\alpha}_{3k}\cos Y_k t + \alpha_{3k}\sin Y_k t)]e^{-X_k t}$$

$$v_{p,3}^s = \sum_{k=1}^{2}[C_{2k-1}^s(\alpha_{4k}\cos Y_k t - \overline{\alpha}_{4k}\sin Y_k t) + C_{2k}^s(\overline{\alpha}_{4k}\cos Y_k t + \alpha_{4k}\sin Y_k t)]e^{-X_k t}$$

$$v_{p,4}^s = \sum_{k=1}^{2}[C_{2k-1}^s(\alpha_{5k}\cos Y_k t - \overline{\alpha}_{5k}\sin Y_k t) + C_{2k}^s(\overline{\alpha}_{5k}\cos Y_k t + \alpha_{5k}\sin Y_k t)]e^{-X_k t} \qquad (1.7)$$

Здесь C – жесткое смещение стержня вдоль t, C_{2k-1}^s, C_{2k}^s – некоторые постоянные, находящиеся из краевых условий при $t = 0$. Коэффициенты $\alpha_{nk} \pm i\overline{\alpha}_{nk}$ являются сопряженными собственными векторами корня λ_k.

По известным перемещениям (1.7) можно определить все деформации ε_x, ε_y, γ_{xy} и по соотношениям упругости (1.3) напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy}. Однако при ограниченном числе членов разложения перемещений по ζ [1] это приводит к невыполнению статических краевых условий на лицевых поверхностях при $\zeta = \pm 1$ для τ_{xy} и σ_y, что весьма существенно для задачи погранслоя. Поэтому используем известный в прикладной теории пластин и оболочек смешанный метод определения напряжений: напряжение σ_x определяем по соотношениям упругости, а напряжения τ_{xy} и σ_y находим из уравнений равновесия (1.1) и (1.2), рассматривая их как бесконечные алгебраические системы уравнений относительно τ_{xy} (1.1) и σ_y (1.2). При этом на данном этапе не выполняются соотношения упругости для τ_{xy} и σ_y.

Итак, по известным перемещениям (1.7) определяем

$$\sigma_{xp,0}^s = \overline{E}\sum_{k=1}^{2}[(-Y_k\overline{\alpha}_{1k} - X_k\alpha_{1k} + \nu\alpha_{2k})(C_{2k-1}^s\cos Y_k t + C_{2k}^s\sin Y_k t) +$$
$$+(-Y_k\alpha_{1k} + X_k\overline{\alpha}_{1k} - \nu\overline{\alpha}_{2k})(C_{2k-1}^s\sin Y_k t - C_{2k}^s\cos Y_k t)]e^{X_k t}$$

$$\sigma_{xp,2}^s = \overline{E}\sum_{k=1}^{2}[(-Y_k\overline{\alpha}_{3k} - X_k\alpha_{3k} + 3\nu\alpha_{4k})(C_{2k-1}^s\cos Y_k t + C_{2k}^s\sin Y_k t) +$$
$$+(-Y_k\alpha_{3k} + X_k\overline{\alpha}_{3k} - 3\nu\overline{\alpha}_{4k})(C_{2k-1}^s\sin Y_k t - C_{2k}^s\cos Y_k t)]e^{-X_k t}$$

$$\sigma_{xp,4}^s = \overline{E}\sum_{k=1}^{2}[(-Y_k\overline{\alpha}_{5k} - X_k\alpha_{5k})(C_{2k-1}^s\cos Y_k t + C_{2k}^s\sin Y_k t) +$$
$$+(-Y_k\alpha_{5k} + X_k\overline{\alpha}_{5k})(C_{2k-1}^s\sin Y_k t - C_{2k}^s\cos Y_k t)]e^{-X_k t} \qquad (1.8)$$

При наличии действительных корней, которые имеют место для ортотропного материала, для компонент перемещений получим

$$u^s_{p,0} = \sum_{k=1}^{4}\alpha_{1k}C^s_k e^{-X_k t}, \quad u^s_{p,2} = \sum_{k=1}^{4}\alpha_{3k}C^s_k e^{-X_k t}, \quad u^s_{p,4} = \sum_{k=1}^{4}\alpha_{5k}C^s_k e^{-X_k t}$$

$$\upsilon^s_{p,1} = \sum_{k=1}^{4}\alpha_{2k}C^s_k e^{-X_k t}, \quad u^s_{p,3} = \sum_{k=1}^{4}\alpha_{4k}C^s_k e^{-X_k t}$$

Из системы уравнений (1.1) определяем касательные напряжения по выражениям

$$\tau^s_{xyp,1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}\sigma^s_{xp,2} + \frac{1}{5}\sigma^s_{xp,4} + \ldots\right), \quad \tau^s_{xyp,3} = -\frac{1}{3}\frac{d\sigma^s_{xp,2}}{dt}, \quad \tau^s_{xyp,5} = -\frac{1}{5}\frac{d\sigma^s_{xp,4}}{dt}, \ldots$$

$$\tau^s_{xyp} = \frac{1}{3}\zeta(1-\zeta^2)\frac{d\sigma^s_{xp,2}}{dt} + \frac{1}{5}\zeta(1-\zeta^4)\frac{d\sigma^s_{xp,4}}{dt} + \ldots \quad (1.9)$$

Из системы уравнений (1.2) находим $\sigma^s_{y,2i}$:

$$\sigma^s_{yp,0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\tau^s_{xyp,1} + \frac{1}{4}\tau^s_{xyp,3} + \ldots\right), \quad \sigma^s_{yp,2} = -\frac{1}{2}\frac{d\tau^s_{xyp,1}}{dt}, \quad \sigma^s_{yp,4} = -\frac{1}{4}\frac{d\tau^s_{xyp,3}}{dt}, \ldots$$

$$\sigma^s_{yp} = \frac{1}{2}(1-\zeta^2)\frac{d\tau^s_{xyp,1}}{dt} + \frac{1}{4}(1-\zeta^4)\frac{d\tau^s_{xyp,3}}{dt} + \ldots \quad (1.10)$$

Из соотношений (1.9), (1.10) видно, что выполняются статические краевые условия на лицевых поверхностях и условие $\partial\sigma_{yp}/\partial\zeta = 0$ при $\zeta = \pm 1$.

Погранслой вблизи края $x = a$ строится аналогичным образом.

Для ортотропного тела задача погранслоя значительно осложняется [4]. Это связано с тем, что вид точного уравнения собственной проблемы и, следовательно, его корни, в значительной мере зависят от отношений E_1/E_2, E_1/G_{12}. В данном случае задача сводится к той же собственной проблеме (1.6) при матрицах A, B, члены которых зависят от этих отношений. Для реальных ортотропных материалов в большинстве случаев имеем действительные корни собственной проблемы и наблюдается тенденция уменьшения скорости затухания плоского погранслоя. Меняется и характер затухания. В изотропном материале затухание погранслоя происходит по экспоненте, но гармонично. Для ортотропных стержней затухание происходит экспоненциально, но уже не гармонично.

1.2. Кососимметричная задача. Для задачи погранслоя уравнения [1] имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}\varepsilon\sigma_{xp,1} + \frac{1}{5}\varepsilon^3\sigma_{xp,3} + \ldots\right) - \left(\tau_{xyp,0} + \frac{1}{3}\varepsilon^2\tau_{xyp,2} + \frac{1}{5}\varepsilon^4\tau_{xyp,4} + \ldots\right) = 0 \quad (1.11)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{5}\varepsilon\sigma_{xp,1} + \frac{1}{7}\varepsilon^3\sigma_{xp,3} + \ldots\right) - 3\left(\frac{1}{3}\tau_{xyp,0} + \frac{1}{5}\varepsilon^2\tau_{xyp,2} + \frac{1}{7}\varepsilon^4\tau_{xyp,4} + \ldots\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{7}\varepsilon\sigma_{xp,1} + \frac{1}{9}\varepsilon^3\sigma_{xp,3} + \ldots\right) - 5\left(\frac{1}{5}\tau_{xyp,0} + \frac{1}{7}\varepsilon^2\tau_{xyp,2} + \frac{1}{9}\varepsilon^4\tau_{xyp,4} + \ldots\right) = 0$$

....

$$\frac{d}{dt}\left(\tau_{xyp,0} + \frac{1}{3}\varepsilon^2\tau_{xyp,2} + \frac{1}{5}\varepsilon^4\tau_{xyp,4} + \ldots\right) = 0 \quad (1.12)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}\tau_{xyp,0} + \frac{1}{5}\varepsilon^2\tau_{xyp,2} + \frac{1}{7}\varepsilon^4\tau_{xyp,4} + \ldots\right) - 2\left(\frac{1}{3}\varepsilon\sigma_{yp,1} + \frac{1}{5}\varepsilon^2\sigma_{yp,3} + \ldots\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{5}\tau_{xyp,0} + \frac{1}{7}\varepsilon^2\tau_{xyp,2} + \frac{1}{9}\varepsilon^4\tau_{xyp,4} + \ldots\right) - 4\left(\frac{1}{5}\varepsilon\sigma_{yp,1} + \frac{1}{7}\varepsilon^3\sigma_{yp,3} + \ldots\right) = 0$$

где сопряжения погранслоя определяются соотношениями упругости

$$\sigma_{xp,2i+1}=\overline{E}_1\gamma_{xp,2i+1}=\overline{E}_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{du_{p,2i+1}}{dt}+\nu_{12}(2i+2)\upsilon_{p,2i+2}\right)$$
$$\sigma_{yp,2i+1}=\overline{E}_y\gamma_{2p,2i+1}=\overline{E}_2\left((2i+2)\upsilon_{p,2i+2}+\nu_{21}\frac{1}{\varepsilon}\frac{du_{p,2i+1}}{dt}\right)\qquad(1.13)$$
$$\tau_{xyp,2i}=G_{12}\gamma_{xyp,2i}=G_{12}\left((2i+1)u_{p,2i+1}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\upsilon_{p,2i}}{dt}\right)$$

Решение однородных уравнений в перемещениях (1.11) – (1.13) ищем в виде функций погранслоя (1.4) и принимаем

$$(\sigma_{xp,2i+1},\sigma_{yp,2i+1})=\sum_{s=0}\varepsilon^{s+k_p-1}(\sigma^s_{xp,2i+1},\sigma^s_{yp,2i+1})e^{-\lambda t}$$
$$(\tau_{xyp,2i},u_{p,2i+1})=\sum_{s=0}\varepsilon^{s+k_p}(\tau^s_{xyp,2i},u^s_{p,2i+1})e^{-\lambda t},\qquad \upsilon_{p,2i}=\sum_{s=0}\varepsilon^{s+\varkappa_p+1}\upsilon^s_{p,2i}e^{-\lambda t}\qquad(1.14)$$

где и в этом случае $\varkappa_p=\varkappa-2i$.

Аналогично симметричной задаче, задача изгиба стержня сводится к обобщенной собственной проблеме (1.6). Точное решение задачи, приведенное в [4], для изотропного тела имеет вид $\sin 2\lambda-2\lambda=0$.

Для задачи изгиба имеем четыре нулевых корня, которые соответствуют жесткому смещению тела. Модель Тимошенко для изгиба стержня $u=u_1z$, $\upsilon=\upsilon_0$ не учитывает погранслой и описывает только основное напряженное состояние. Корни задачи изгиба имеют вид $\lambda_n=\pm X_n\pm iY_n$ и составляют счетное множество, а также симметрично расположены относительно вещественной оси и начала координат. Первый ненулевой корень имеет $\mathrm{Re}\lambda_1=3.75$. Это показывает, что погранслой в задаче изгиба затухает быстрее, чем в задаче растяжения – сжатия.

Перемещения задачи погранслоя при наличии только комплексных сопряженных корней имеют вид

$$\upsilon^s_{p,0}=C_\upsilon+\sum_{k=1}^{2}[C^s_{2k-1}(\alpha_{1k}\cos Y_kt-\overline{\alpha}_{1k}\sin Y_kt)+C^s_{2k}(\overline{\alpha}_{1k}\cos Y_kt+\alpha_{1k}\sin Y_kt)]e^{-X_kt}$$
$$u^s_{p,1}=C_u\zeta+\sum_{k=1}^{2}[C^s_{2k-1}(\alpha_{2k}\cos Y_kt-\overline{\alpha}_{2k}\sin Y_kt)+C^s_{2k}(\overline{\alpha}_{2k}\cos Y_kt+\alpha_{2k}\sin Y_kt)]e^{-X_kt}$$
$$\upsilon^s_{p,2}=\sum_{k=1}^{2}[C^s_{2k-1}(\alpha_{3k}\cos Y_kt-\overline{\alpha}_{3k}\sin Y_kt)+C^s_{2k}(\overline{\alpha}_{3k}\cos Y_kt+\alpha_{3k}\sin Y_kt)]e^{-X_kt}$$
$$\upsilon^s_{p,3}=\sum_{k=1}^{2}[C^s_{2k-1}(\alpha_{4k}\cos Y_kt-\overline{\alpha}_{4k}\sin Y_kt)+C^s_{2k}(\overline{\alpha}_{4k}\cos Y_kt+\alpha_{4k}\sin Y_kt)]e^{-X_kt}$$
$$\upsilon^s_{p,4}=\sum_{k=1}^{2}[C^s_{2k-1}(\alpha_{5k}\cos Y_kt-\overline{\alpha}_{5k}\sin Y_kt)+C^s_{2k}(\overline{\alpha}_{5k}\cos Y_kt+\alpha_{5k}\sin Y_kt)]e^{-X_kt}\qquad(1.15)$$

Здесь постоянные C_u и C_υ связаны с жестким смещением стержня.

Напряжение $\sigma_{xp,2i+1}$ определяется соотношениями

$$\sigma^s_{xp,1}=\overline{E}\sum_{k=1}^{2}[(-Y_k\overline{\alpha}_{2k}-X_k\alpha_{2k}+2\nu\alpha_{3k})(C^s_{2k-1}\cos Y_kt+C^s_{2k}\sin Y_kt)+$$
$$+(-Y_k\alpha_{2k}+X_k\overline{\alpha}_{2k}-2\nu\overline{\alpha}_{3k})(C^s_{2k-1}\sin Y_kt-C^s_{2k}\cos Y_kt)]e^{-X_kt}$$
$$\sigma^s_{xp,3}=\overline{E}\sum_{k=1}^{2}[(-Y_k\overline{\alpha}_{4k}-X_k\alpha_{4k}+4\nu\alpha_{5k})(C^s_{2k-1}\cos Y_kt+C^s_{2k}\sin Y_kt)+$$
$$+(-Y_k\alpha_{4k}+X_k\overline{\alpha}_{4k}-4\nu\overline{\alpha}_{5k})(C^s_{2k-1}\sin Y_kt-C^s_{2k}\cos Y_kt)]e^{-X_kt}\qquad(1.16)$$

Для ортотропного тела в большинстве случаев наблюдаются действительные корни, для которых имеем

$$v^s_{p,0} = \sum_{k=1}^{3}\alpha_{1k}C^s_k e^{-X_k t}, \qquad v^s_{p,2} = \sum_{k=1}^{3}\alpha_{3k}C^s_k e^{-X_k t}, \qquad v^s_{p,4} = \sum_{k=1}^{3}\alpha_{5k}C^s_k e^{-X_k t}$$

$$u^s_{p,1} = \sum_{k=1}^{3}\alpha_{2k}C^s_k e^{-X_k t}, \qquad u^s_{p,3} = \sum_{k=1}^{3}\alpha_{4k}C^s_k e^{-X_k t}$$

Особенности применения предложенной методики решения задачи погранслоя при изгибе полностью совпадает с особенностями задачи растяжения – сжатия.

Система уравнений (1.11) позволяет определить τ_{xyp}:

$$\tau^s_{xyp,0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sigma^s_{xp,1} + \frac{1}{4}\sigma^s_{xp,3} + \ldots\right), \qquad \tau^s_{xyp,2} = -\frac{1}{2}\frac{d\sigma^s_{xp,1}}{dt}, \qquad \tau^s_{xyp,4} = -\frac{1}{4}\frac{d\sigma^s_{xp,3}}{dt}, \ldots \tag{1.17}$$

$$\tau^s_{xyp} = \frac{1}{2}(1-\zeta^2)\frac{d\sigma^s_{xp,1}}{dt} + \frac{1}{4}(1-\zeta^4)\frac{d\sigma^s_{xp,3}}{dt} + \ldots$$

Из системы уравнений (1.12) находим σ_{xp}:

$$\sigma^s_{yp,1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}\tau^s_{xyp,2} + \frac{1}{5}\tau^s_{xyp,4} + \ldots\right), \qquad \sigma^s_{yp,3} = -\frac{1}{3}\frac{d\tau^s_{xyp,2}}{dt}, \qquad \sigma^s_{yp,3} = -\frac{1}{5}\frac{d\tau^s_{xyp,4}}{dt}, \ldots \tag{1.18}$$

$$\sigma^s_{yp} = \frac{1}{3}\zeta(1-\zeta^2)\frac{d\tau^s_{xyp,2}}{dt} + \frac{1}{5}\zeta(1-\zeta^4)\frac{d\tau^s_{xyp,4}}{dt} + \ldots$$

Соотношения (1.17), (1.18) удовлетворяют краевым условиям на лицевых поверхностях при $\zeta = \pm 1$.

Влияние анизотропии материала на решение задачи погранслоя при изгибе балки аналогично симметричной задаче. При этом, так как для ортотропного материала меняются не только значения корней собственной задачи λ_n, но и характер убывания погранслоя, то изменяются и соотношения (1.7), (1.8) симметричной и (1.15), (1.16) кососимметричной задач.

Решения внутренней задачи и задачи погранслоя содержат достаточное количество постоянных интегрирования, чтобы удовлетворить условиям на поперечных кромках $x = 0$ или $x = a$ и получить тем самым окончательное решение задачи. Остается открытым вопрос сопряжения внутренней задачи и задачи погранслоя.

2. Условия существования затухающего решения. Зная решение внутренней задачи Q и погранслоев $R^{(1)}_p$ и $R^{(2)}_p$, можно записать их сумму I:

$$I = Q + R^{(1)}_p + R^{(2)}_p \tag{2.1}$$

которая является асимптотически точным решением плоской задачи теории упругости. Здесь $R^{(1)}_p$, $R^{(2)}_p$ – решения погранслоев для краев $x = 0$ и $x = a$ соответственно.

Общее решение I должно удовлетворять соответствующим краевым условиям. Решение (2.1) содержит достаточное число произвольных постоянных для удовлетворения этим условиям. Таким образом краевые условия относятся к сумме решений основное напряженное состояние (ОНС) и решение типа погранслоя (РТП). Это весьма затрудняет решение общей задачи. Для разделения краевых условий в точной постановке плоской теории упругости необходимо получить условия, которым должны удовлетворять компоненты напряженно-деформированного состояния задачи погранслоя, чтобы решение было быстроубывающим от рассматриваемого края. В литературе эти условия называются условиями существования затухающих решений или условиями согласованности краевых условий [4]. Их получением для полосы занимались многие исследователи [4, 6]. Однако вопрос решен до конца не для всех видов краевых условий. В [6] получены условия существования затухающих решений для изотропной полосы, а в [7] выведены условия, соответствующие краевым условиям ортотропной полосы.

Для статических краевых условий эти соотношения носят ясный механический характер и связаны с принципом Сен-Венана, заключающемся в самоуравновешенности по высоте сечения напряжений σ_{xp} в симметричной задаче и σ_{xp}, τ_{xyp} в задаче изгиба. При смешанных краевых условиях [1] получение условий согласованности краевых условий значительно осложняется, что связано с тем, что перемещения не обладают свойством самоуравновешенности по высоте сечения. Таким образом, средние по высоте перемещения и угол поворота погранслоя отличны от нуля. Для кинематических краевых условий [1] условия существования затухающего решения не имеют простого вида и приходится обращаться к вариационным принципам для получения соответствующих краевых условий [4, 6]. И хотя предлагаемый вариационный подход к решению плоской задачи позволяет обойтись без условий существования затухающих решений погранслоя при разделении общей задачи на две самостоятельные, знание этих условий значительно облегчает это разделение. Поэтому желательно для задач расчета стержней, пластин и оболочек иметь условия согласованности краевых условий, получение которых в некоторых случаях весьма затруднительно.

Предлагаемая методика позволяет просто получить условия существования затухающих решений в терминах статьи для любых краевых условий и в дальнейшем остановимся на этом вопросе подробнее.

Статические краевые условия (заданы p_x, p_y). Условия самоуравновешенности по высоте сечения напряжения погранслоя σ_{xp} и τ_{xyp} в произвольном сечении имеют вид

$$\int_{-1}^{1} \sigma_{xp} d\zeta = 0 \tag{2.2}$$

для симметричной задачи и

$$\int_{-1}^{1} \sigma_{xp} \zeta d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^{1} \tau_{xyp} d\zeta = 0 \tag{2.3}$$

для кососимметричной задачи [4]. В силу справедливости их на границе, они служат для получения краевых условий. В этом случае напряжения σ_{xp} и τ_{xyp} выражаются на границе через нагрузку и напряжения внутренней задачи, что приводит к статическим краевым условиям

$$\sum_{i=0} a_{i0} \varepsilon^{2i} \sigma_{x,2i} = \int_{0}^{1} p_x(\zeta) d\zeta \tag{2.4}$$

симметричной задачи и к условиям

$$\sum_{i=0} b_{i0} \varepsilon^{2i+1} \sigma_{x,2i+1} = \int_{0}^{1} p_x(\zeta) \zeta d\zeta, \quad b_{i0} = \frac{1}{2i+3} \tag{2.5}$$

$$\sum_{i=0} a_{i0} \varepsilon^{2i} \tau_{xy,2i} = \int_{0}^{1} p_y(\zeta) d\zeta, \quad a_{i0} = \frac{1}{2i+1} \tag{2.6}$$

задачи изгиба.

Условия (2.2), (2.3) являются условиями согласованности статических краевых условий и они содержатся в уравнении равновесия задачи погранслоя. Так для задачи растяжения – сжатия первое уравнение системы (1.1):

$$\frac{d}{dt}(\sigma_{xp,0} + \tfrac{1}{3}\varepsilon^2 \sigma_{xp,2} + \tfrac{1}{5}\varepsilon^4 \sigma_{xp,4} + \ldots) = 0$$

после интегрирования по t приводится к виду

$$\sigma_{xp,0} + \tfrac{1}{3}\varepsilon^2\sigma_{xp,2} + \tfrac{1}{5}\varepsilon^4\sigma_{xp,4} + \ldots + C = 0$$

и так как в задаче погранслоя постоянная интегрирования $C = 0$, то окончательно имеем

$$\sigma_{xp,0} + \tfrac{1}{3}\varepsilon^2\sigma_{xp,2} + \tfrac{1}{5}\varepsilon^4\sigma_{xp,4} + \ldots = 0 \qquad (2.7)$$

которое с учетом выражения $\sigma_{xp} = \sum \varepsilon^{2i}\zeta^{2i}\sigma_{xp,2i}$ приводит к соотношению (2.2).

Аналогично для задачи изгиба используются первые уравнения равновесия систем (1.11) и (1.12)

$$\frac{d}{dt}(\tfrac{1}{3}\varepsilon\sigma_{xp,1} + \tfrac{1}{5}\varepsilon^3\sigma_{xp,3} + \ldots) - (\tau_{xyp,0} + \tfrac{1}{3}\varepsilon^2\tau_{xyp,2} + \tfrac{1}{5}\varepsilon^4\tau_{xyp,4} + \ldots) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\tau_{xyp,0} + \tfrac{1}{3}\varepsilon^2\tau_{xyp,2} + \tfrac{1}{5}\varepsilon^4\tau_{xyp,4} + \ldots) = 0$$

которые, после интегрирования по t и приравнивания к нулю постоянных интегрирования, приводят к условиям

$$\tfrac{1}{3}\varepsilon\sigma_{xp,1} + \tfrac{1}{5}\varepsilon^3\sigma_{xp,3} + \ldots = 0 \qquad (2.8)$$

$$\tau_{xyp,0} + \tfrac{1}{3}\varepsilon^2\tau_{xyp,2} + \tfrac{1}{5}\varepsilon^4\tau_{xyp,4} + \ldots = 0 \qquad (2.9)$$

С учетом соотношений для напряжений изгиба $\sigma_{xp} = \sum \varepsilon^{2i+1}\zeta^{2i+1}\sigma_{xp,2i+1}$ и $\tau_{xyp} = \sum \varepsilon^{2i}\zeta^{2i}\tau_{xyp,2i}$ имеем соотношения (2.3).

Статические краевые условия (2.4)–(2.6) получены из выражений (2.2) и (2.3). Однако они полностью совпадают со статическими краевыми условиями, полученными вариационным путем (1.13) и (1.25) в [1]. Так условие симметричной задачи (2.4) следует из первого выражения (1.13) [1] при $\varkappa = 0$ (при вариации δu_0) и для задачи изгиба (2.5), (2.6) из первых условий (1.25) [1] при $\varkappa = 0$ (при δu_1 и δv_0). Таким образом при статических краевых условиях (1.31) [1] можно пользоваться или условиями согласованности краевых условий или статическими краевыми условиями, полученными вариационным путем, так как в принципе это одни и те же выражения.

Из статических краевых условий видно, что постоянные внутренней задачи полностью определяются из интегральных условий, т.е. на проникающее решение не влияет самоуравновешенная часть торцевой нагрузки. Быстрозатухающее же напряженное состояние полностью обусловлено самоуравновешенной частью нагрузок, что отражает принцип Сен-Венана для рассматриваемого класса задач. Таким образом, принцип Сен-Венана есть следствие из свойства решения, полученного методом асимптотического интегрирования уравнений плоской задачи теории упругости [4].

Выше показано, что уравнения погранслоя (1.1), (1.2) задачи растяжения – сжатия и (1.11), (1.12) задачи изгиба содержат условия самоуравновешенности напряжений σ_{xp}, τ_{xyp} по высоте сечения, которые и являются условиями существования затухающих решений при статических краевых условиях. Очевидно, что эти уравнения равновесия содержат условия существования затухающих решений при любых краевых условиях. Условия (2.7)–(2.9) играют при этом ведущую роль. Покажем получение этих условий. Основная идея вывода заключается в представлении уравнений равновесия (1.1), (1.2) и (1.11), (1.12) в тех же компонентах, в которых заданы краевые условия.

Смешанные краевые условия (заданы u_Σ, p_y). Так для задачи с краевыми условиями (1.32) [1], когда на краю заданы функции u_Σ и p_y, в симметричной задаче используем первое уравнение равновесия в форме (2.7), которое с учетом соотношения упругости (1.3) для v можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(u_{p,0}+\frac{1}{3}\varepsilon^2 u_{p,2}+\frac{1}{5}\varepsilon^4 u_{p,4}+\ldots\right)+\varepsilon\frac{\nu_{12}}{E_2}\left(\sigma_{yp,0}+\frac{1}{3}\varepsilon^2\sigma_{yp,2}+\frac{1}{5}\varepsilon^4\sigma_{yp,4}+\ldots\right)=0$$

С помощью первого уравнения равновесия погранслоя (1.2) имеем

$$\frac{d}{dt}\left[u_{p,0}+\frac{1}{3}\varepsilon^2 u_{p,2}+\frac{1}{5}\varepsilon^4 u_{p,4}+\ldots+\varepsilon\frac{\nu_{12}}{E_2}\left(\frac{1}{3}\varepsilon\tau_{xyp,1}+\frac{1}{5}\varepsilon^3\tau_{xyp,3}+\ldots\right)\right]=0$$

интегрирование которого по t от 0 до ∞ и с учетом того, что на бесконечности все параметры напряженно-деформированного состояния погранслоя равны нулю, приводит при $t = 0$ к условию

$$\left(u_{p,0}+\frac{1}{3}\varepsilon^2 u_{p,2}+\frac{1}{5}\varepsilon^4 u_{p,4}+\ldots\right)+\varepsilon\frac{\nu_{12}}{E_2}\left(\frac{1}{3}\varepsilon\tau_{xyp,1}+\frac{1}{5}\varepsilon^3\tau_{xyp,3}+\ldots\right)=0 \qquad (2.10)$$

Выражение (2.10) и есть условие существования затухающего решения в обозначениях исследования для краевых условий (1.32) [1] и в обобщенном виде записывается [4] так

$$\int_0^1 u_p d\zeta+\varepsilon\frac{\nu_{12}}{E_2}\int_0^1 \tau_{xyp}\zeta d\zeta=0 \qquad (2.11)$$

Кососимметричная задача при краевых условиях (1.32) [1] имеет два условия, из которых условие (2.6) для касательного напряжения уже известно, а краевое условие для u получим из выражения (2.8). С учетом соотношений упругости (1.13) для σ_x, σ_y последнее выражение записывается в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}\varepsilon u_{p,1}+\frac{1}{5}\varepsilon^3 u_{p,3}+\ldots\right)+\varepsilon\frac{\nu_{12}}{E_2}\left(\frac{1}{3}\varepsilon\sigma_{yp,1}+\frac{1}{5}\varepsilon^3\sigma_{yp,3}+\ldots\right)=0$$

а после исключения напряжений σ_{yp} с помощью второго уравнения равновесия (1.12) имеем

$$\frac{d}{dt}\left[2\left(\frac{1}{3}\varepsilon u_{p,1}+\frac{1}{5}\varepsilon^3 u_{p,3}+\ldots\right)+\varepsilon\frac{\nu_{12}}{E_2}\left(\frac{1}{3}\tau_{xyp,0}+\frac{1}{5}\varepsilon^2\tau_{xyp,2}+\frac{1}{7}\varepsilon^4\tau_{xyp,4}+\ldots\right)\right]=0 \qquad (2.12)$$

Интегрирование последнего выражения по t от 0 до ∞ приводит ко второму условию существования затухающего решения:

$$2\left(\frac{1}{3}\varepsilon u_{p,1}+\frac{1}{5}\varepsilon^3 u_{p,3}+\ldots\right)+\varepsilon\frac{\nu_{12}}{E_2}\left(\frac{1}{3}\tau_{xyp,0}+\frac{1}{5}\varepsilon^2\tau_{xyp,2}+\frac{1}{7}\varepsilon^4\tau_{xyp,4}+\ldots\right)=0 \qquad (2.13)$$

которое в обобщенном виде записывается [4] так

$$2\int_0^1 u_p\zeta d\zeta+\varepsilon\frac{\nu_{12}}{E_2}\int_0^1 \tau_{xyp}\zeta^2 d\zeta=0 \qquad (2.14)$$

Смешанные краевые условия (заданы p_x, v_Σ). Рассмотрим задачу, отвечающую краевым условиям (1.33) [1] с заданными p_x и v_Σ. Симметричная задача сводится к одному статическому условию (2.4) и перемещение v не влияет на это условие для σ_{xp}.

Для задачи изгиба условие шарнирного опирания (1.33) [1] имеет два условия существования затухающего решения, одно из которых для σ_{xp} известно (2.5). Однако

σ_{xp} влияет на формирование краевого условия, накладываемого на перемещение v. Используем два уравнения равновесия в виде (2.8), (2.9), причем первое в виде (2.12), в котором u_p выражается через соотношение упругости для τ_{xyp} (1.13):

$$\frac{\nu_{12}}{2E_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}\tau_{xyp,0}+\frac{1}{5}\varepsilon^2\tau_{xyp,2}+\ldots\right)+\frac{1}{G_{12}}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1\cdot 3}\tau_{xyp,0}+\frac{1}{3\cdot 5}\varepsilon^2\tau_{xyp,2}+\ldots\right)-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{1\cdot 3}v_{p,0}+\frac{1}{3\cdot 5}\varepsilon^2 v_{p,2}+\ldots\right)=0 \tag{2.15}$$

С помощью условия (2.9), которое вычитается из (2.15), последнее выражение записывается так

$$\left(\frac{1}{G_{12}}-\frac{\nu_{12}}{2E_2}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1\cdot 3}\tau_{xyp,0}+\frac{1}{3\cdot 5}\varepsilon^2\tau_{xyp,2}+\ldots\right)-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{1\cdot 3}v_{p,0}+\frac{1}{3\cdot 5}\varepsilon^2 v_{p,2}+\ldots\right)=0 \tag{2.16}$$

Привлекаем еще раз условие (2.9) и второе уравнение системы (1.12) и вычитаем второе из первого. В результате имеем

$$\frac{1}{1\cdot 3}\tau_{xyp,0}+\frac{1}{3\cdot 5}\varepsilon^2\tau_{xyp,2}+\frac{1}{5\cdot 7}\varepsilon^4\tau_{xyp,4}+\ldots=-\frac{1}{6}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{5}\varepsilon\sigma_{xp,1}+\frac{1}{7}\varepsilon^3\sigma_{xp,3}+\ldots\right) \tag{2.17}$$

Решаем совместно (2.16), (2.17):

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\varepsilon\left(\frac{1}{G_{12}}-\frac{\nu_{12}}{2E_2}\right)\left(\frac{1}{5}\varepsilon\sigma_{xp,1}+\frac{1}{7}\varepsilon^3\sigma_{xp,3}+\ldots\right)+3\left(\frac{2}{1\cdot 3}v_{p,0}+\frac{2}{3\cdot 5}\varepsilon^2 v_{p,2}+\ldots\right)\right]=0$$

Интегрирование последнего соотношения по t приводит к выражению

$$\varepsilon\left(\frac{1}{G_{12}}-\frac{\nu_{12}}{2E_2}\right)\left(\frac{1}{5}\varepsilon\sigma_{xp,1}+\frac{1}{7}\varepsilon^3\sigma_{xp,3}+\ldots\right)+3\left(\frac{2}{1\cdot 3}v_{p,0}+\frac{2}{3\cdot 5}\varepsilon^2 v_{p,2}+\ldots\right)+C_1t+C_2=0$$

где C_1 – угол поворота, а C_2 – перемещение полосы по ζ как абсолютно твердого тела. При $C_1=C_2=0$ имеем условие существования затухающего решения для прогиба v:

$$\varepsilon\left(\frac{1}{G_{12}}-\frac{\nu_{12}}{2E_2}\right)\left(\frac{1}{5}\varepsilon\sigma_{xp,1}+\frac{1}{7}\varepsilon^3\sigma_{xp,3}+\ldots\right)+3\left(\frac{2}{1\cdot 3}v_{p,0}+\frac{2}{3\cdot 5}\varepsilon^2 v_{p,2}+\ldots\right)=0 \tag{2.18}$$

или в общем виде [4]

$$\varepsilon\left(\frac{1}{G_{12}}-\frac{\nu_{12}}{2E_2}\right)\int_0^1\zeta^3\sigma_{xp}d\zeta+3\int_0^1(1-\zeta^2)v_p d\zeta=0 \tag{2.19}$$

Выражение (2.19) показывает, что для перемещения v имеет место вес $(1-\zeta^2)$, т.е. в этом случае даже в самом грубом приближении нельзя переносить принцип Сен-Венана на перемещения.

Кинематические краевые условия (заданы u_Σ, v_Σ). В литературе отмечалось [4, 6], что наибольшие трудности возникают при рассмотрении кинематических краевых условий u_Σ, v_Σ (1.34) [1]. В этом случае условия существования затухающего решения не имеют простого вида. В [4] предлагается использовать в таком случае вариационные методы получения постоянных интегрирования внутренней задачи и погранслоя. Данный подход позволяет получить простые условия согласования краевых условий. Так для симметричной задачи условие (2.7) имеет вид в перемещениях

$$\frac{d}{dt}\left(u_{p,0}+\frac{1}{3}\varepsilon^2 u_{p,2}+\frac{1}{5}\varepsilon^4 u_{p,4}+\ldots\right)+\nu_{12}(\varepsilon\upsilon_{p,1}+\varepsilon^3\upsilon_{p,3}+\ldots)=0$$

Отличие полученного условия от остальных заключается в наличии производной по t только в первом слагаемом, поэтому в силу свойства погранслоя после интегрирования по t от 0 до ∞ приходим к выражению, имеющему смысл при $t = 0$:

$$\left(u_{p,0}+\frac{1}{3}\varepsilon^2 u_{p,2}+\frac{1}{5}\varepsilon^4 u_{p,4}+\ldots\right)+\nu_{12}\int_0^\infty(\varepsilon\upsilon_{p,1}+\varepsilon^3\upsilon_{p,3}+\ldots)dt=0 \tag{2.20}$$

В общем виде условие существования затухающего решения записывается в виде

$$\int_0^1 u_p d\zeta+\nu_{12}\int_0^\infty dt\int_0^1\frac{\partial\upsilon_p}{\partial\zeta}d\zeta=0 \tag{2.21}$$

Для задачи изгиба имеют место два условия (2.8), (2.9), из которых следует

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}\varepsilon u_{p,1}+\frac{1}{5}\varepsilon^3 u_{p,3}+\ldots\right)+\nu_{12}\left(\frac{2}{3}\varepsilon^2\upsilon_{p,2}+\frac{4}{5}\varepsilon^4\upsilon_{p,4}+\ldots\right)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\upsilon_{p,0}+\frac{1}{3}\varepsilon^2\upsilon_{p,2}\ldots\right)+(\varepsilon u_{p,1}+\varepsilon^3 u_{p,3}+\ldots)=0$$

После интегрирования последних по t от 0 до ∞ имеем условия существования затухающих решений при $t = 0$ для задачи изгиба в случае задания на краю перемещений

$$\frac{1}{3}\varepsilon u_{p,1}+\frac{1}{5}\varepsilon^3 u_{p,3}+\ldots+\nu_{12}\int_0^\infty\left(\frac{2}{3}\varepsilon^2\upsilon_{p,2}+\frac{4}{5}\varepsilon^4\upsilon_{p,4}+\ldots\right)dt=0 \tag{2.22}$$

$$\upsilon_{p,0}+\frac{1}{3}\varepsilon^2\upsilon_{p,2}+\ldots+\int_0^\infty(\varepsilon u_{p,1}+\varepsilon^3 u_{p,3}+\ldots)dt=0 \tag{2.23}$$

В общей форме записи соотношения имеют вид

$$\int_0^1\zeta u_p d\zeta+\nu_{12}\int_0^\infty dt\int_0^1\zeta\frac{\partial\upsilon_p}{\partial\zeta}d\zeta=0 \tag{2.24}$$

$$\int_0^1\upsilon_p d\zeta+\int_0^\infty dt\int_0^1\frac{\partial u_p}{\partial\zeta}d\zeta=0 \tag{2.25}$$

Полученные условия существования затухающих решений (2.21), (2.24), (2.25) отличаются от условий согласования при других вариантах краевых условий тем, что в данном случае требуется выполнить интегрирование по t для перемещений погранслоя только для одного слагаемого. Поэтому практического значения для разделения краевых условий внутренней задачи и задачи погранслоя эти условия не имеют, так как они позволяют установить только связь между постоянными интегрирования задачи погранслоя. Эти условия можно использовать в совокупности с кинематическими краевыми условиями, полученными вариационным путем. Теоретически условия (2.21), (2.24), (2.25) налагают дополнительные условия на краевые перемещения и имеют наглядный физический смысл, заключающийся в том, что при произвольных перемещениях может не существовать затухающих решений.

3. Заключение. Условия существования затухающих решений погранслоя (2.2), (2.11) симметричной задачи и (2.3), (2.14), (2.19) задачи изгиба можно использовать с учетом $R_p = I_\Sigma - Q$ для получения краевых условий внутренней задачи. В этом случае на первом этапе из рассмотрения исключается задача погранслоя и решается только внутренняя задача. На втором этапе, при необходимости, возвращаемся к решению задачи погранслоя с учетом общих краевых условий. Таким образом условия существования затухающих решений задачи погранслоя значительно упрощают решение общей задачи, но их получение связано с определенными трудностями, которые не всегда удается преодолеть. В этом случае вариационная постановка задачи является выходом из положения. В полученных таким путем краевых условиях содержатся условия существования затухающих решений. Так статическое краевое условие внутренней симметричной задачи для σ_x, имеющие место при вариации δu_0

$$\int_0^1 \sigma_x d\zeta = \int_0^1 p_x d\zeta$$

получено с учетом самоуравновешенности σ_{xp} по сечению (2.2). Аналогично для статических краевых условий изгиба, имеющие место при δu_1, δv_0.

Так как перемещения задачи погранслоя условиями самоуравновешенности по высоте сечения не обладают, то при геометрических краевых условиях такого совпадения как при статических краевых условиях не происходит. Кинематические краевые условия задачи содержат как перемещения внутренней задачи, так и перемещения погранслоя. Например, для задачи растяжения – сжатия полосы (1.32) [1] при смешанных краевых условиях в интегральной форме на кромке Σ имеем при $\varkappa = 0$:

$$\int_0^1 u d\zeta + \int_0^1 u_p d\zeta = \int_0^1 u_\Sigma d\zeta, \quad \int_0^1 \tau_{xy} \zeta d\zeta + \int_0^1 \tau_{xyp} \zeta d\zeta = \int_0^1 \tau_\Sigma \zeta d\zeta$$

где u, τ_{xy} – компоненты перемещений и напряжений, относящихся к внутренней задаче. После умножения второго соотношения на $\varepsilon\nu_{12}/E_2$ и сложения с первым имеем с учетом условия существования затухающих решений

$$\int_0^1 u d\zeta + \varepsilon \frac{\nu_{12}}{E_2} \int_0^1 \zeta \tau_{xy} d\zeta = \int_0^1 u_\Sigma d\zeta + \varepsilon \frac{\nu_{12}}{E_2} \int_0^1 \zeta \tau_\Sigma d\zeta$$

Аналогичное условие следует из соответствующего условия существования затухающих решения. Далее будет рассмотрен и другой подход к разделению краевых условий. Таким образом в дальнейшем для получения краевых условий внутренней задачи будем пользоваться условиями существования затухающих решений (2.2), (2.3), (2.11), (2.14), (2.19).

Использование условий для кинематических краевых условий в форме (2.21), (2.24), (2.25) затруднительно, так как без знания решения погранслоя задача не разделяется.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00410).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутенко Ю.И.* Модифицированный метод асимптотического интегрирования при построении теории стержней из ортотропного материала. Ч. 1 // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 4. С. 91–105.
2. *Гольденвейзер А.Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 668–686.
3. *Найфэ А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
4. *Агаловян Л.А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414 с.
5. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз. 1958. 468 с.
6. *Гусейн-Заде М.И.* О необходимых и достаточных условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуполосы // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 752–760.
7. *Агаловян Л.А., Хачатрян Ш.М.* Обобщенная ортогональность П.Ф. Папковича и условия существования затухающих решений в плоской задаче для ортотропной полуполосы // Докл. АН АрмССР. 1975. Т. 60. № 3. С. 157–163.

Казань

Поступила в редакцию
5.02.1999