МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2002

УДК 539.374

© 2002 г. К.Ю. ОСИПЕНКО, И.В. СИМОНОВ

МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИНАМИКИ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С МАЛОПРОЧНОЙ СРЕДОЙ И НЕСИММЕТРИЧНОЙ КАВИТАЦИИ

Строится приближенная математическая модель пространственного движения тела вращения в малопрочной среде типа грунта при учете влияния несимметричного отрыва потока среды. Постулируется связь кинематических и силовых факторов на площадке контакта тела и среды на основе метода изолированного элемента (или метода касательных конусов, как в аэродинамике, или метода локального взаимодействия [1, 2]) при использовании точных решений [3, 4] и научного эксперимента [5–7], а также критерий отрыва потока упругопластической среды. Перегруппировкой переменных модель сводится к стандартной динамической системе. При этом переменные и неизвестные границы области смачивания тела, необходимые для вычисления обобщенных сил, определяются согласно указанному критерию отрыва. Для тел удлиненного очертания получен асимптотически точный аналог автономной системы уравнений. Анализируется геометрия зон отрыва. Найдены условия устойчивости прямолинейного движения тонких тел.

Ранее изучалось одномерное кавитационное движение тел [8–10], проведен численный расчет плоскопараллельного движения снаряда в грунте [11], найдены первые интегралы в задаче пространственного движения тела при учете его взаимодействия с вязкой жидкостью только на дискообразной носовой части [12]. В последнее время опубликован ряд предложений по технологиям, основанным на явлении глубокого проникания ударников. Так, разрабатываются научные станции для изучения физико-химических свойств структур на поверхностях планет [13], выдвинуты предложения по управляемому воздействию на вулканическую и сейсмическую деятельность [14]. С другой стороны, в опытах по внедрению осесимметричных ударников в различные среды часто наблюдались эффекты искривления траектории движения при несимметричной кавитации (иногда такая траектория имела форму петли и происходил выброс ударника из мишени с разворотом 180°). В этой связи, вопросы расчета глубокого проникания, оптимизации формы тела и анализа устойчивости его движения в прочной среде становятся принципиально важными. Однако такие задачи в точной постановке вызывают непреодолимые трудности при решении [8]. Численные методы интенсивно развиваются, но они эффективны лишь при изучении начальной стадии удара: при длительном счете теряется уверенность в точности результата. Кроме того, из-за большого числа параметров и определяющих функций расчеты мало пригодны для выявления общих закономерностей процесса проникания.

Часто отмечалось, что нестабильность динамических свойств грунтов и вообще пористых материалов снижает требования к точности моделирования. Поэтому здесь оправданы приближенные подходы, когда проблема сводится к классической задаче динамики твердого тела путем феноменологического описания взаимодействия среда–тело и калибровки модели на основе эксперимента [8–12].

1. Физическое описание и гипотезы. Осесимметричное жесткое тело массы m, средней плотности ρ_1 и главным моментом инерции при поперечном вращении I движется по инерции в безграничной упругопластической среде. Тело имеет гладкий меридиан $r = r(l)$ $(0 < l < 1)$ и, быть может, кромки $l = 0, 1$, где r – радиус, l – расстояние от носика вдоль оси тела при нормировке всех величин размерности длины на длину тела. Среда характеризуется плотностью ρ_0, модулем сдвига μ, динамическим пределом текучести Мизеса τ_d и несжимаемостью. В задачах обтекания при дозвуковых скоростях сжимаемость вторична, а при наличии объемной пластичности может быть учтена заменой начальной плотности на осредненную плотность упакованного грунта ρ_0 [1–6].

В начальный момент времени $t = 0$ заданы вектор скорости $\mathbf{v}_0$ центра масс тела, расположенного при $l = l_c > 0$, $r = 0$, его угловая ориентация и вектор угловой скорости вращения относительно центра масс $\mathbf{\Omega}$. Ниже вращением относительно оси симметрии пренебрегаем.

Для описания кинематики движения и вычисления силовых факторов абсолютную прямоугольную систему координат XYZ ориентируем так, что начальное положение оси тела совпадает с осью X. Трехмерная цилиндрическая система координат $r\phi l$ $(0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi)$ и, связанная с центром масс, местная прямоугольная система координат $x = l_c - l$, $y = r\cos\phi$, $z = r\sin\phi$ жестко сцеплены с телом. Перемещение центра масс и движение остальных точек фигуры будем описывать векторами $\mathbf{X}_0 = (X_0, Y_0, Z_0)$ и $\mathbf{X} = (X, Y, Z)$, соответственно, в зависимости от безразмерной длины пути s: $X_0 = X_0(s)$,... . Связь длины s с временем t, радиус-вектора и векторов абсолютной, переносной и угловой скоростей $\mathbf{V}(s)$, $\mathbf{v}(s)$ и $\mathbf{\Omega}(s) = (0, \Omega_2, \Omega_3)$ между собой, а также выражения для внешней нормали, проекций вектора скорости на нее и на касательную плоскость к поверхности тела и местного угла атаки δ – наклона площадки на поверхности тела к вектору скорости $\mathbf{V}$, через углы $\gamma = dr/dl$, тангажа α и рысканья ψ в плоскости XZ, взятому со знаком минус, в системе координат xyz даются формулами:

$$ds = v_x dt, \quad s(t=0) = 0 \tag{1.1}$$

$$\mathbf{n} = (\gamma, \cos\phi, \sin\phi)(1+\gamma^2)^{-1/2}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_0 = (x, y, z), \quad \mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{R} = v_x(1 + \omega_2 z - \omega_3 y, \eta_2 + \omega_3 x, \eta_3 - \omega_2 x), \quad \mathbf{\Omega} = v_x \boldsymbol{\omega}$$

$$V = |\mathbf{V}| = \Theta v_x, \quad V_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} = \delta v_x, \quad \mathbf{V}_\tau = \mathbf{V} - \mathbf{n} V_n, \quad \omega_3 = \alpha' = d\alpha / ds$$

$$\omega_2 = \frac{\psi' - \alpha' \operatorname{tg}\alpha \sin\psi \cos\psi}{(1 + \operatorname{tg}^2\alpha \cos^2\psi)\cos\alpha}, \quad \sin\delta = \frac{(1+\gamma^2)^{-1/2}\{\gamma - a_1\cos\phi - a_2\sin\phi\}}{\Theta}$$

$$\Theta = \{(1 + \omega_2 z - \omega_3 y)^2 + (\omega_3 x + \eta_2)^2 + (\eta_3 - \omega_2 x)^2\}^{1/2}$$

$$a_1 = \gamma\omega_3 r - \omega_3 x - \eta_2, \quad a_2 = -\gamma\omega_2 r + \omega_2 x - \eta_3, \quad \eta_2 = v_y / v_x, \quad \eta_3 = v_z / v_x$$

Согласно результатам [1–6] около контура образуется обширная пластическая зона характерного размера порядка большого параметра $\sqrt{\mu / \tau_d}$. Вблизи контура будет наблюдаться интенсивное сдвиговое течение и отрыв потока. При относительно малых скоростях наблюдаются вязкие пристеночные эффекты; при умеренных (для влажных глинистых сред при скоростях > 1 м/с) и высоких скоростях материал уже скользит вдоль стенок ударника, происходит срезка слоев среды, а результаты теории и эксперимента согласуются при выборе закона пластического трения [5, 6]. Каверна хорошо сохраняет свою первоначальную форму в упругопластических мишенях при низких и умеренных скоростях, а отрыв происходит близко к краям миделева сечения фигуры. Таким образом, пока не начнет превалировать инерция, можно считать, что отрыв происходит по линиям касания вектора скорости потока среды на бесконечности поверхности тела: $V_n = 0 \to \delta = 0$ – обращенная к потоку часть поверхности тела является смоченной, затененная – свободна от напряжений. Назовем это условие критерием идеального отрыва.

При высоких скоростях, когда инерционные силы сравнимы или превосходят силы прочностного сопротивления, и/или в среде с большими начальными напряжениями σ_{ij}^0 поток отрывается с сечений меньшей площади. Наблюдается значительное расширение каверны за телом, как в гидродинамике, но относительное изменение поперечного размера каверны при возвратном движении остается весьма малым, пропорциональным параметру τ_d/μ, из-за эффекта свода [8]. На величины результирующих сил это уменьшение площади заметно повлияет не сразу, так как погрешность будет связана с интегрированием по площадкам, почти касательным к вектору скорости **V**: вклад нормальных напряжений компенсируется, а касательные напряжения не так важны при анализе. Эти обстоятельства учтем введением критического угла отрыва γ_*, зависящего от начальных напряжений, скорости и формы тела, и примем критерий отрыва общего вида

$$\delta^* = \delta - \gamma_*(\sigma_{ij}^0; V, ...) = 0 \tag{1.2}$$

При идеальном отрыве $\gamma_* = 0$. Можно привести качественные соображения по поводу угла отрыва γ_* и предложить экспериментальный метод его определения. Он возрастает с увеличением скорости и убывает с ростом начального давления в среде p_0. Если p_0 достаточно велико, то $\gamma_* < 0$ и на гладком теле отрыв может не возникнуть – исчезнет инерционное сопротивление (парадокс Даламбера), останется только квазистатическое лобовое прочностное сопротивление и трение. Присоединение струй следует рассматривать исходя из кинематики движений каверны и фигуры. Этот вопрос находится вне данного рассмотрения и ниже считаем, что эффект присоединения отсутствует.

Приближенный метод изолированного элемента не позволяет определять положение точек отрыва потока по строгому условию $\sigma_n = 0$. Впрочем, выполнение этого условия еще не обеспечивает единственности: в точной постановке это – задача с односторонними ограничениями и требуется удовлетворить дополнительным условиям типа неравенств. Это показано на примере точного решения одной задачи обтекания тонкого тела упругой средой [15]. Ввиду сложности фундаментальная проблема отрыва потока от тела не решена теоретически и в гидродинамике [16]. Остается опора на эксперимент.

Обратим внимание на следующие факты. Форма каверны за телом в воде при условии квазистационарности не меняется в интервале дозвуковых скоростей входа 60–700 м/с [17], поскольку силы сопротивления при очень больших числах Рейнольдса и силы инерции растут пропорционально друг другу с ростом скорости, обе $\approx v^2$. В твердом теле это не так: существенна прочностная составляющая, а ее относительное влияние на форму каверны, а также влияние скорости и формы тела, определяется безразмерным параметром $k = \tau_d/(C_x\rho_0 v^2)$, где C_x – коэффициент гидродинамического сопротивления. Например, ширина остаточной каверны, равная углу конусности каверны Γ на длине, равной пяти диаметрам тела, как показали эксперименты [7], изменяется в три раза при вариации этого параметра в интервале $0.1 < k < 0.3$ и становится близкой к величине Γ для воды только при $k < 0.01$.

В данном контексте предполагается построение модели движения для изучения траекторий и устойчивости, т.е. считается, что тело до остановки совершает длинный (в калибрах) путь. Это означает квазистационарность движения и образование каверны, близкой к стационарной. Тогда из геометрических соображений можно высказать гипотезу о подобии изменения угла отрыва γ_* и ширины стационарной каверны Γ. Экспериментальные точки $\Gamma_i = \Gamma_i(k_i)$ в области $0.1 < k < 0.3$ [7], аппроксимируются линейной зависимостью. Тогда из этой гипотезы, удовлетворяя очевидному, экспериментально подтвержденному неравенству $\gamma_{*l} \geqslant \gamma_* \geqslant 0$, $0 \leqslant k < \infty$, эту линейную зависимость можно экстраполировать экспоненциальной функцией

$$\gamma_* = \gamma_{*l} \exp(-\alpha_0 k), \quad \alpha_0 \approx 2.5, \quad 0 \leqslant k < \infty \tag{1.3}$$

производная которой в области малых значений k совпадает с углом наклона указанной линейной зависимости. Заметим, что хотя результаты [7] получены в условиях торможения тела и нестационарности, на определение ширины каверны Г это не влияет пока гипотеза плоских сечений остается в силе, а в опытах [7] она приближенно выполнялась.

Предложенная формула определяет зависимость угла отрыва осесимметричного потока от тела в зависимости от скорости, формы тела и прочности и важно, что требует определения только одного параметра γ_{*l} – угла отрыва потока воды от тела, зависящего только от его формы. Например, по фотографии каверны за шаром [17] можно вычислить $\gamma_{*l} \approx 20°$. Разумеется, желательно проведение контрольных экспериментов для уточнения формулы (1.3).

Распространим здесь критерий отрыва (1.2), (1.3) на случай трехмерного движения тела вращения в прочной среде, подразумевая, что соответствующий угол δ определяется мгновенной ориентацией тела (1.1).

Будем различать зону смачивания S_+, где $\delta^* > 0$, и зону отрыва S_-, где $\delta^* < 0$, $S = S_+ + S_-$ – полная поверхность тела. Вектор напряжения на поверхности фигуры представим в виде: $\boldsymbol{\sigma} = (\tau_S \mathbf{n}_\tau - \sigma_n \mathbf{n}) H(\delta^*)$, $H(\delta) = 0$ или 1 ($\delta < 0$ или $\delta \geqslant 0$), где $\tau_S = \mathrm{const} \leqslant \tau_d$ – заданное касательное напряжение (пластическое трение); $\mathbf{n}_\tau$ – единичный касательный вектор в направлении скольжения; $\sigma_n > 0$ – контактное давление; ниже его непосредственно свяжем с кинематическими характеристиками движения. Элемент поверхности ΔS приближено аппроксимируем поверхностью канонической формы (сфера, конус, цилиндр).

Решения ряда задач стационарного обтекания фигур высокоскоростным упругопластическим потоком являются известными [1–4, 18]; в частности, они подтверждают справедливость эмпирических формул для силы сопротивления типа Понселе [19]. Следуя этим работам, величина нормального контактного напряжения представима суммой

$$\sigma_n = (\tfrac{1}{2}) C_x \rho_0 V^2 + b_0 \tau_d \tag{1.4}$$

Начальными напряжениями и влиянием присоединенной массы на результирующие силы ввиду их обычной малости здесь пренебрегаем. При обработке экспериментов по динамическому прониканию тел в глинистую среду [5, 6] обнаружено, что масштабный эффект отсутствует при скоростях > 10 м/с, то есть для некоторых грунтовых сред вязкими эффектами можно пренебречь. Для конусов с углами полураствора $\gamma = 15°$–$90°$ коэффициент $C_x = 0.18$–0.80 оказался близок к расчетным и экспериментальным значениям в гидродинамике [6], где он является медленно меняющейся функцией параметров формы, скорости и свойств среды, а его пределы изменения равны: $C_x = 0$–2. Величина b_0 весьма слабо зависит от формы: в интервале $15° \leqslant \gamma \leqslant 90°$ она меняется в пределах $\approx 8\%$, ее среднее значение равно ≈ 24 [5, 6] и составляет приблизительно две трети от значения b_m, рассчитанного исходя из формулы для максимального нормального напряжения σ_m в точке торможения упругопластического потока, обтекающего шар [4]. Приведем полезную формулу для этого напряжения в случае шара и цилиндра (в [4] имеются опечатки):

$$\sigma_m = \frac{\rho_0 V^2}{2} + \tau_d \begin{cases} (3/2)\ln(2\mu_0) + 1 & \text{(цилиндр)} \\ (2/\sqrt{3})[4\ln(\sqrt{3}\mu_0) + 1] & \text{(шар, } \mu_0 = \mu/\tau_d) \end{cases} \tag{1.5}$$

На пологих участках смоченной боковой поверхности S_f, где $\delta \ll 1$, $C_x(S_f) = C_f \delta^2$, величины C_f и $b_0 = b_f$ зависят от параметров μ_0 и $\tau_0 = \tau_S/\tau_d$. Эту зависимость можно найти интегрированием решения модельной задачи обтекания тонкого конуса упругопластической средой Мизеса [3]:

$$C_f = 8\ln 2 + 3 + \ln(\mu_0) - 8\ln[1+\sqrt{1-\tau_0^2}] + 8[\sqrt{1-\tau_0^2} - 1]\tau_0^{-2} + O[\mu_0^{-1}\ln(\mu_0)]$$

$$b_f = \ln(4\mu_0) + 2\sqrt{1-\tau_0^2} - 1 - 2\ln[1+\sqrt{1-\tau_0^2}] + O[\mu_0^{-1}] \qquad (1.6)$$

$$C_f = \ln(\mu_0) - 1 + O[\mu_0^{-1}\ln(\mu_0)], \quad b_f = 1 + \ln(\mu) + O[\mu_0^{-1}] \quad (\tau_0 = 0)$$

$$C_f = \ln(\mu_0) + 8\cdot\ln 2 - 5 + O[\mu_0^{-1}\ln(\mu_0)], \quad b_f = \ln(4\mu_0) - 1 + O[\mu_0^{-1}] \quad (\tau_0 = 1)$$

При $\tau_0 = 0$ результат совпадает с решением [2] по методу плоских сечений. При $\tau_0 = 0,\ 1$ величины b_f весьма близки, а C_f заметно различаются. Типичные значения $\mu_0 = 10^2$–10^3 и поэтому $b_f \approx 5$–8. В областях, где $\delta \sim 10^{-1}$, из условия согласования с экспериментами по прониканию конусов [6] следует $C_f \approx 2.9$, а величина $b_0 \approx 16$–24 при $\delta \geqslant 10^{-1}$, $\mu_0 = 10^2$–10^3. Зависимость предела текучести τ_d, рассматриваемого как параметр процесса, от скорости нагружения (от давления) исчерпывается при скоростях проникания выше ~ 1 м/с для ряда геологических сред и выходит на постоянное значение, которое отличается только в 1.5–2 раза от статического значения для глинистых сред [1, 2]. Причиной различия τ_d и τ_S могут быть локальный разогрев среды и фигуры от трения или от начальной высокой температуры проникателя T (например, $T > 100°C$, среда – лед). Заметим, что формулы (1.5), (1.6) получены при ряде допущений и имеют ограниченную проверку, поэтому рекомендуется проводить дополнительную калибровку модели – определение величин C_x, b_0, τ_d, γ_* и τ_S из экспериментов.

Запишем общие выражения для результирующей силы и момента

$$\mathbf{F} = \int_S (\tau_S \mathbf{n}_\tau - \sigma_n \mathbf{n}) H(\delta^*) dS, \quad \mathbf{M} = \int_S [\mathbf{R} \times \mathbf{dF}] = \int_S [\mathbf{R}_0 \times (\tau_S \mathbf{n}_\tau - \sigma_n \mathbf{n})] H(\delta^*) dS$$

$$dS = r(l)(1+\gamma^2)^{1/2} dl d\phi, \quad \mathbf{R} = (x, y, z) = (l_c - l, r(l)\cos\phi, r(l)\sin\phi)$$

$$\mathbf{F}(F_X, F_Y, F_Z), \quad F_X = F_x \cos\alpha\cos\psi - F_y \sin\alpha\cos\psi + F_z \sin\psi \qquad (1.7)$$

$$F_Y = F_x \sin\alpha + F_y \cos\alpha, \quad F_Z = -F_x \cos\alpha\sin\psi + F_y \sin\alpha\sin\psi + F_z \cos\psi$$

Отождествим линии скольжения частиц среды по поверхности S с траекториями векторов проекции скорости $\mathbf{V}_\tau$. Тогда

$$\mathbf{n}_\tau = -\mathbf{V}_\tau / |V_\tau| \qquad (1.8)$$

Условие (1.8) замыкает задачу расчета равнодействующих по известной кинематике движения фигуры. Отношение σ_n/τ_S – большой параметр, поэтому вклад касательных напряжений в выражениях (1.7), вообще говоря, невелик и можно считать, что условие (1.8) находится в пределах точности развиваемого подхода. Исключение может составить осевая сила в случае вытянутых фигур. Однако тогда энергетически невыгодными становятся большие углы атаки и скорости вращения, а при малых отклонениях от прямолинейного движения условие (1.7) будет снова близко к истинному.

В кинематические соотношения (1.1)–(1.6) и выражения для результирующих (1.7) входят неизвестные функции v_x, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\eta}$, α и ψ, для определения которых ниже будет сформулирована задача.

2. Математическая постановка задачи. Задачу Коши для уравнений движения жесткого тела вращения

$$m\dot{\mathbf{v}} = F, \quad I\dot{\Omega}_y = M_y, \quad I\Omega_z = M_z \qquad (2.1)$$

$$(\mathbf{v}, \Omega_y, \Omega_z) = (\mathbf{v}^\circ, \Omega_y^\circ, \Omega_z^\circ), \quad t = 0; \quad (\dot{\ }) = d/dt$$

приведем к нормальному виду. Для этого спроектируем уравнения на подвижные оси координат и совершим замену переменных. Справедливы равенства:

$$\frac{d\mathbf{X}_0}{ds} = \frac{\mathbf{v}}{v_x} = (\cos\alpha\cos\psi - \eta_2\sin\alpha\cos\psi + \eta_3\sin\psi,\ \sin\alpha + \eta_2\cos\alpha, \tag{2.2}$$

$$-\cos\alpha\sin\psi + \eta_2\sin\alpha\sin\psi + \eta_3\cos\psi)$$

$$\frac{d^2\mathbf{X}_0}{ds^2} = [\omega_3(-\sin\alpha\cos\psi - \eta_2\cos\alpha\cos\psi) + \psi'(-\cos\alpha\sin\psi + \eta_2\sin\alpha\sin\psi + \eta_3\cos\psi) -$$

$$-\eta_2'\sin\alpha\cos\psi + \eta_3'\sin\psi,\quad (\cos\alpha - \eta_2\sin\alpha)\omega_3 + \eta_2'\cos\alpha),\quad \omega_3(\sin\alpha\sin\psi +$$

$$+\eta_2\cos\alpha\sin\psi) + \psi'(-\cos\alpha\cos\psi + \eta_2\sin\alpha\cos\psi - \eta_3\sin\psi) + \eta_2'\sin\alpha\sin\psi + \eta_3'\cos\psi]$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = v_x\frac{d\mathbf{v}}{ds} = v_x\frac{dv_x}{ds}\frac{d\mathbf{X}_0}{ds} + v_x^2\frac{d^2\mathbf{X}_0}{ds^2},\qquad \frac{d\Omega_i}{dt} = v_x\omega_i\frac{dv_x}{ds} + v_x^2\frac{d\omega_i}{ds}\quad (i = 2,3)$$

После нахождения компонент вектора $d\mathbf{v}/dt$ в подвижной системе координат и подстановки их в уравнения (2.1), получим ($v' = dv/ds$):

$$F_x = mv_x\{v_x' - v_x\omega_3\eta_2 + v_x\eta_3\psi'\cos\alpha\},\quad F_y = mv_x\{v_x'\eta_2 + v_x\eta_2' + v_x\omega_3 -$$

$$-v_x\eta_3\psi'\sin\alpha\},\quad F_z = mv_x\{v_x\eta_3' + v_x'\eta_3 + \psi'[-v_x\cos\alpha + v_x\eta_2\sin\alpha]\}$$

$$M_y = Iv_x(\omega_2 v_x' + v_x\omega_2'),\quad M_z = Iv_x(\omega_3 v_x' + v_x\omega_3')$$

$$\psi' = \omega_2(1 + \mathrm{tg}^2\alpha\cos^2\psi)\cos\alpha + \omega_3\,\mathrm{tg}\,\alpha\sin\psi\cos\psi$$

Введем новую неизвестную безразмерную функцию и величины

$$\varkappa = c^2/v_x^2,\quad \boldsymbol{\kappa} = (\varkappa, \eta_2, \eta_3, \omega_2, \omega_3),\quad \sigma = b\varkappa + \zeta_0\theta^2(S_+),\quad \tau = \tau_s/\sigma_m$$

$$c^2 = \frac{\sigma_m}{m},\quad \zeta_0 = \frac{\rho_0 C_x}{2m} = \frac{\rho C_x}{2\pi r_m^2 l_e},\quad \rho = \frac{\rho_0}{\rho_1},\quad b = \frac{b_0}{b_m},\quad j_0 = \frac{m}{I}$$

$$\sigma_m = b_m\tau_d,\quad m = \pi r_m^2\rho_1 l_e,\quad l_e \leqslant 1,\quad b_m = \max b_0,\quad r_m = \max r$$

где l_e – нормированная длина эквивалентного по массе цилиндра радиуса r_m. Поскольку $b_0 \sim 10^1$, а $\tau_s/\tau_d \leqslant 1$, то величина τ является малой, величина $j_0 \sim 10^1$. Благодаря удачной замене переменных, после соответствующих подстановок и очевидных преобразований задачи Коши (2.1) примет канонический вид

$$\varkappa' = 2\varkappa(-f_\varkappa - \eta_2\omega_3 + \eta_3\psi_0\cos\alpha)$$

$$\eta_2' = f_\eta^{(2)} - \eta_2 f_\varkappa - \omega_3(1 + \eta_2^2) + \eta_3\psi_0(\eta_2\cos\alpha + \sin\alpha)$$

$$\eta_3' = f_\eta^{(3)} - \eta_3 f_\varkappa - \eta_2\eta_3\omega_3 + \psi_0[(\eta_3^2 + 1)\cos\alpha - \eta_2\sin\alpha] \tag{2.3}$$

$$\omega_2' = j_0 f_\omega^{(2)} - \omega_2 f_\varkappa - \eta_2\omega_2\omega_3 + \eta_3\omega_2\psi_0\cos\alpha,$$

$$\omega_3' = j_0 f_\omega^{(3)} - \omega_3 f_\varkappa - \eta_2\omega_3^{(2)} + \eta_3\omega_3\psi_0\cos\alpha$$

$$\psi' \equiv \psi_0 = \omega_2(1 + \mathrm{tg}^2\alpha\cos^2\psi)\cos\alpha + \omega_3\,\mathrm{tg}\,\alpha\sin\psi\cos\psi,\quad \omega_3 = \alpha'$$

$$(f_\varkappa, f_\eta^{(2)}, f_\eta^{(3)}) = \int_S (\tau\varkappa\mathbf{n}_\tau - \sigma\mathbf{n})H(\delta^*)dS,\quad \mathbf{f}_\omega = \int_S [\mathbf{R}\times(\tau\varkappa\mathbf{n}_\tau - \sigma\mathbf{n})]H(\delta^*)dS$$

$$f_\omega^{(2)} = (\mathbf{e}_2, \mathbf{f}_\omega),\quad f_\omega^{(3)} = (\mathbf{e}_3, \mathbf{f}_\omega),\quad \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}_0\quad (s = 0)$$

где $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ – орты подвижной системы координат, связанной с телом.

Автономная система интегро-дифференциальных уравнений (2.3) имеет кусочно-непрерывно дифференцируемые правые части, за исключением возможных особых точек при вырождении формы тела. Так, если имеется участок цилиндрической поверхности конечной длины, то при идеальном отрыве точка $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\eta} = 0$ является особой, в ней функция $\varkappa'$ разрывна. Физически это связано с тем, что положение $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\eta} = 0$ является нейтральным: невозмущенные линии тока направлены вдоль цилиндра и при сколь угодно малом возмущении возникает конечная боковая сила, поскольку сразу конечная часть (половина, если $\gamma_* = 0$) поверхности цилиндрической части будет "в тени". Другие разрывы производных конечны и обусловлены зарождением или исчезновением зон отрыва. Поэтому в любой конечной области G пространства $\varkappa\boldsymbol{\omega\eta}\alpha\psi$, за исключением окрестностей особых точек, правые части системы (2.3) удовлетворяют условию Липшица, а задача Коши корректна. Это, а также автономность системы (2.3) означает, что построенная математическая модель удобна для проведения качественного и численного анализа движений тел в прочных средах.

3. Удлиненные тела. Рассмотрим удлиненные фигуры пологого меридиана $\varepsilon \equiv r_m \ll 1$, за исключением, быть может, малой окрестности затупленной носовой части $S_\perp$ при $0 < l < l_1 \ll 1$, где $\gamma, \delta = O(1)$ (важность рассмотрения затупленных фигур отмечалась в [8]). Пусть тело движется преимущественно вдоль оси, а углы атаки, отрыва и скорость вращения являются малыми величинами. Лобовая поверхность $S_\perp$ при таких движениях будет полностью смоченной и на ней, как на едином элементе, $C_x = C_\perp$, $b_0 = b_\perp = \mathrm{const}$. Исходя из сказанного выше и формулы (1.5), осредненное значение b_0 на участке $l \in (0, l_1)$ можно принять равным $b_\perp = (4\sqrt{3}/9)[4\ln(\sqrt{3}\mu/\tau_d)+1]$. На пологой части смоченной боковой поверхности $S_f = S_+ - S_\perp$, где $\gamma, \delta \ll 1$, $C_x(S_f) = C_f\delta^2$, а величины $b_0 = b_f$ и C_f будем определять по формулам (1.6). В случае обтекания пластически сжимаемой средой в режиме с присоединенной ударной волной коэффициент C_f можно взять из решения задачи для конуса [18]: $C_f = 0.638/(\rho^\circ - 1) + 0.404$, где $\rho^\circ = \rho_0/\rho_-$; ρ_0, ρ_- – постоянные плотности за и перед фронтом присоединенного скачка уплотнения.

Изменим нормировку основных величин так, чтобы функции, их производные и постоянные стали $O(1)$ при развитом отрывном обтекании, когда $\mathrm{mes}\, S_f = O(\mathrm{mes}\, S)$:

$$\begin{gathered}
\varkappa^* = c_*^2/v_x^2, \quad \eta = \varepsilon\eta^*, \quad \omega = \varepsilon\omega^*, \quad \xi = s/\zeta \\
\sigma^* = \varkappa^* + (\beta - a_1\cos\phi - a_2\sin\phi)^2, \quad a_1 = -\omega_3^* x - \eta_2^*, \quad a_2 = \omega_2^* x - \eta_3^* \\
\tau_* = \frac{\tau_S}{\varepsilon b_f \tau_d}, \quad c_*^2 = \frac{2b_f\tau_d}{\varepsilon^2\rho_0 C_f}, \quad \zeta = \frac{2l_e}{\rho C_f}, \quad \beta = \frac{\gamma}{\varepsilon}, \quad \beta_* = \frac{\gamma_*}{\varepsilon}
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Индекс "звездочка" ниже опускаем, кроме γ_*, β_*. Упростим задачу (2.3), отбрасывая величины $O(\varepsilon^2)$ по сравнению с единицей

$$\varkappa' = 2\varkappa\varepsilon^2(b_1\varkappa + b_2 + f_\varkappa - \zeta\eta_2\omega_3 + \zeta\eta_3\omega_2)$$

$$\eta_2' = f_\eta^{(2)} - \zeta\omega_3, \quad \eta_3' = f_\eta^{(3)} + \zeta\omega_2, \quad \omega_2' = j_0 f_\omega^{(2)}, \quad \omega_3' = j_0 f_\omega^{(3)}$$

$$\varkappa = \varkappa_0, \quad \xi = 0; \quad (') = d/d\xi$$

$$b_1 = R_1^2\frac{b_\perp}{b_f}, \quad b_2 = \frac{R_1^2 C_\perp}{\varepsilon^2 C_f}, \quad R_1 = R(l_1), \quad 0 < R = \frac{r}{r_m} < 1$$

$$(f_\varkappa, f_\eta^{(2)}, f_\eta^{(3)}) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{S_f}(\tau\varkappa + \beta\sigma,\ -\sigma\cos\phi, -\sigma\sin\phi)R\,dl\,d\phi$$

$$\mathbf{f}_\omega = \frac{1}{\pi}\int\limits_{S_f}(\sigma x\sin\phi,\ -\sigma x\cos\phi)R\,dl\,d\phi \tag{3.2}$$

Здесь неизвестные функции $\varkappa, \eta_2, \eta_3, \omega_2, \omega_3$, число которых уменьшилось на два по сравнению с общим случаем (2.3), зависят от десяти безразмерных параметров. Величина $\varkappa$ представляет собой отношение прочностных и инерционных сил. В процессе замедленного движения тела до остановки она изменяется в пределах $\varkappa_0 < \varkappa < \infty$, а приближенная модель (3.2) асимптотически правильно описывает почти все этапы замедленного движения тонкого тела по инерции. При $\varkappa \ll 1$ превалирует инерция и это, возможно – область сверхзвуковых скоростей, когда принятая модель локального взаимодействия не всегда реалистична. При $\varkappa \gg 1$ следует пренебречь влиянием инерции при вычислении равнодействующих. Порядок величины $\varkappa$ определяется не только скоростью, но и прочностью среды, и значение $\varkappa_0 = O(1)$ можно обеспечить при достаточно малых скоростях движения. Для грунта средней динамической прочности $\tau_d = 5 \cdot 10^6$ Па и конуса 15° условие $\varkappa \approx 1$ означает $v_x \approx 700$ м/с.

Вклад интегрирования по поверхности $S_\perp$ определяется лишь лобовым сопротивлением $\approx \varepsilon^2(b_1\varkappa + b_2)$в первом уравнении (3.2) и равен нулю для заостренных тел. Для равномерности приближения необходимо также выполнение асимптотических равенств: $l_1 = O(\varepsilon^2)$, $\tau = O(\varepsilon)$. Асимптотический порядок уравнений разный независимо от порядка величины $\varkappa$: $O(\varkappa\varepsilon^2)$ у первого и $O(\varkappa)$ у второго и третьего уравнений при движении с развитым отрывом (если $b_2 = O(1)$). Это имеет ясный физический смысл: обобщенные боковое сопротивление и момент сил преобладают над осевым сопротивлением для тонких тел при развитой асимметрии кавитации. При безотрывном обтекании, как и при движении в жидкости, производные $\eta_i', \omega_i' = O(1)$ $(i = 2, 3)$ и определяются лишь "гидродинамической" составляющей нормального напряжения σ, а сами функции η_i, ω_i могут быть $o(1)$. В следующих приближениях появятся поправки от прочности порядка $O(\varkappa\varepsilon^2)$и будут давать основной вклад при $\varkappa \to \infty$ – уравнения (3.2) теряют силу при описании безотрывного обтекания на заключительной стадии движения, но на основные характеристики движения это повлияет слабо. Определение указанных поправок связано уже с решением с высокой точностью модельных задач об обтекании тонких тел под углом атаки и при вращении.

Параметр $\zeta \approx \rho^{-1}$ и, как следует из уравнений, для массивных ($\rho \ll 1$) и легких ($\rho \gg 1$) проникателей характерное время развития возмущений будет различаться по порядку величины, а нормированные длины траекторий ξ_0: $\varkappa(\xi_0) = \infty$, будут практически инвариантны по отношению к этому параметру.

4. Анализ зон отрыва. В случае тонких тел удается провести интегрирование по углу ϕ в выражениях для равнодействующих (3.2) и в них тогда останутся только одинарные интегралы

$$(f_\varkappa, f_\eta^{(2)}, f_\eta^{(3)}, f_\omega^{(2)}, f_\omega^{(3)}) = \frac{1}{\pi}\int_{l_1}^{1} [X, \Phi_1, -\Phi_2, (l_c - l)(\Phi_2, \Phi_1)]R\,dl$$

$$X = (\tau\varkappa + \beta\varkappa + \beta^3)\Phi_{00} - 2\beta^2 A\Phi_{01} + \beta A^2\Phi_{02}$$

$$\Phi_1 = a_1 F / A, \quad \Phi_2 = -a_2 F / A, \quad F = [-(\varkappa + \beta^2)\Phi_{01} + 2A\beta\Phi_{02} - A^2\Phi_{03}] \tag{4.1}$$

$$\Phi_{ij} = \int_0^{2\pi} \sin^i \Lambda \cos^j \Lambda H(\delta^*)d\Lambda, \quad A = (a_1^2 + a_2^2)^{1/2}\operatorname{sgn} a_1$$

$$\Lambda = \phi + \vartheta, \quad \vartheta = -\operatorname{arctg}(a_2 / a_1) \quad (i = 0,1, \quad j = 0,1,2,3)$$

где использованы симметричность функций δ^* и $\cos^j\Lambda$ и кососимметричность функции $\sin\Lambda$ относительно плоскости $\phi = -\vartheta$.

Для вычисления интегралов по углу ϕ в равенствах (4.1), а также анализа расположения и числа неизвестных заранее зон отрыва, проведем исследование уравнения (1.2), принимающего вид

$$\delta^* = \beta^* - A\cos\Lambda = 0, \quad \beta^* = \beta - \beta_* \tag{4.2}$$

Его решения $\phi^* = -\vartheta + \arccos(\beta^*/A)$ определяют симметричные относительно меридианов $\phi = -\vartheta, -\vartheta + \pi$ границы зон отрыва. Экстремумы функции δ^* достигаются при $\Lambda = 0, \pi$. Следовательно, анализ сводится к изучению поведения функции δ^* около меридианов $\phi = -\vartheta$ и $\phi = -\vartheta + \pi$. Обозначим $q = \beta^* / |A|$ и введем разрывные функции:

$$h(q) = \begin{cases} -\operatorname{sgn}(q), & |q| \geqslant 1 \\ -q, & |q| \leqslant 1 \end{cases}, \quad \phi_0 = \arccos(h) = \begin{cases} \pi, & q \geqslant 1 \\ 0, & q \leqslant -1 \end{cases},$$

$$\phi_0 = \begin{cases} \pi - \vartheta - \phi^*, & a > 0, \ |q| \leqslant 1 \\ \vartheta + \phi^*, & a < 0, \ |q| \leqslant 1 \end{cases}$$

Возможны случаи, когда при некотором значении l:

1. зона отрыва локализована около меридиана $\phi = -\vartheta$:

$$0 \leqslant |\phi + \vartheta| < \phi^* + \vartheta, \quad A > |\beta^*|, \quad |q| < 1; \quad \beta^* \geqslant 0 \to 0 \leqslant q < 1$$

$$0 \leqslant \phi^* + \vartheta \leqslant \pi/2; \quad \beta^* < 0 \to -1 < q < 0, \quad \pi/2 < \phi^* + \vartheta < \pi$$

$$\phi_0 = \pi - \vartheta - \phi^*; \quad \Phi_{00} = 2\phi_0, \quad \Phi_{01} = -2\sqrt{1-q^2}, \quad \Phi_{02} = \phi_0 - q\sqrt{1-q^2}$$

$$\Phi_{03} = -\tfrac{2}{3}(2+q^2)\sqrt{1-q^2}, \quad \Phi_{10} = \Phi_{11} = \Phi_{12} = 0; \quad X = X_1\phi_0 + X_2 \qquad (4.3)$$

$$X_1 = 2(\varkappa\tau + \varkappa\beta + \beta^3) + \beta A^2, \quad X_2 = \beta|A|(4\beta - \beta^*)\sqrt{1-h^2}; \quad \Phi_1 = \frac{a_1}{A}F$$

$$\Phi_2 = \frac{-a_2}{A}F, \quad F = 2A\beta\phi_0 + \psi_1, \quad \psi_1 = 2\left\{\varkappa + \beta^2 + \frac{1}{3}A^2(2+q^2) - \beta\beta^*\right\}\sqrt{1-h^2}$$

2. зона отрыва локализована около меридиана $\phi = \pi - \vartheta$:

$$\phi^* \leqslant |\phi| \leqslant \pi - \vartheta, \quad A < -|\beta^*|, \quad |q| < 1; \quad \beta^* \geqslant 0 \to 0 \leqslant q < 1$$

$$\pi/2 \leqslant \phi^* + \vartheta < \pi; \quad \beta^* < 0 \to -1 < q < 0, \quad 0 \leqslant \phi^* + \vartheta \leqslant \pi/2$$

$$\phi_0 = \vartheta + \phi^*; \quad \Phi_{00} = 2\phi_0, \quad \Phi_{01} = 2\sqrt{1-q^2}, \quad \Phi_{02} = \phi_0 - q\sqrt{1-q^2} \qquad (4.4)$$

$$\Phi_{03} = \tfrac{2}{3}(2+q^2)\sqrt{1-q^2}, \quad \Phi_{10} = \Phi_{11} = \Phi_{12} = 0$$

$$X = X_1\phi_0 + X_2, \quad \Phi_1 = \frac{a_1}{A}F, \quad \Phi_2 = \frac{-a_2}{A}F, \quad F = 2A\beta\phi_0 - \psi_1$$

3. безотрывное обтекание параллели при $|A| \leqslant \beta^*$, $q > 1$:

$$\phi_0 = \pi, \quad \Phi_{00} = 2\pi, \quad \Phi_{02} = \pi, \quad \Phi_{01} = \Phi_{03} = 0, \quad X = \pi X_1$$

$$\Phi_1 = 2\pi\beta a_1, \quad \Phi_2 = -2\pi\beta a_2 \qquad (4.5)$$

4. полный отрыв ($|A| \leqslant -\beta^*$, $q < -1$): $\Phi_1 = \Phi_2 = X = 0$.

5. особая точка $\beta^* = A = 0$. Тогда поведение решения в этой точке рассматривается как левый и правый предел.

Исходя из определения функции $h(q)$, функции X, Φ_1 и Φ_2 можно записать в виде единых формул так

$$X = X_1\phi_0 + X_2, \quad \Phi_1 = \frac{a_1}{A}F, \quad \Phi_2 = \frac{-a_2}{A}F$$

$$F = 2A\beta\phi_0 + \psi_1 \operatorname{sgn}(A), \quad l_1 < l < 1$$

Правые части уравнений (3.2) остаются нелинейными, несмотря на условия малости (3.1). Так, например, величины ϕ_0, $q = O(1)$ содержат отношения искомых функций.

5. Критерии устойчивости. При изучении устойчивости прямолинейного движения тонких выпуклых тел вращения рассмотрим два варианта:

1. Безотрывное обтекание, когда при нормированных малых возмущениях $|\eta| + |\omega| \ll 1$отрыв на боковой поверхности не происходит.

2. Возникновение зоны несимметричного отрыва в случае, когда при прямолинейном движении гладкого тела на параллели $l = l_w$ образуется отрыв потока от тела. Эта зона будет малой по площади и длине при $K \equiv |\beta'(l_w)| \neq 0$ и малых возмущениях.

Оказалось, что при безотрывном обтекании и в случае малой зоны несимметричного отрыва система дифференциальных уравнений поперечного движения в большом распадается на две независимых системы второго порядка, описывающих движение тела в двух взаимоперпендикулярных плоскостях, причем обе эквивалентны системе уравнений, полученной при изучении устойчивости плоского движения [20]. Отсюда следует, что критерии устойчивости [2] остаются справедливыми и в пространственном случае.

Теорема: Прямолинейное движение тонкого тела вращения будет устойчивым в смысле Ляпунова при расположении центра масс $l_c < l_s$ и неустойчивым при $l_c > l_s$, где критическая длина l_s задается формулами:

(*a*). При безотрывном обтекании боковой поверхности тела $l_s = l_g$;

(*в*). В случае малой зоны несимметричного отрыва ($h \neq 0$):

$$l_s = l_g + \frac{\Psi(p_0 l_w - p_1)(\zeta + p_0 l_w - p_1)}{\zeta p_0(\Psi + p_0)}$$

$$l_g = 1 - \frac{\zeta(p_0 - p_1) + p_1^2 - p_2 p_0}{\zeta p_0}, \quad p_i = 2\int\limits_{R(l_1)}^{R(l_w)} l^i R dR, \quad \Psi = \frac{\varkappa + \beta_*^2}{eK} R(l_w) > 0$$

где $e = 1$ в случае $l_w < 1$ и $e = 2$, если условие отрыва при прямолинейном движении выполняется на задней кромке ($l_w = 1$) ($i = 0, 1, 2$).

(*c*). При вырождении ($K = 0$) движение тела будет абсолютно устойчивым. Примером является тонкий цилиндр с закруглением или заострением переднего торца в предположении $\beta_* = 0$.

Приведем идею доказательства последней части теоремы, видоизмененной по сравнению с изложенным в [20]. Система уравнений возмущенного движения при $|\eta| + |\omega| \ll 1$ в диапазоне скоростей $\varkappa = O(1)$ принимает вид

$$\eta_2' = f_\eta^{(2)} - \zeta\omega_3, \quad \eta_3' = f_\eta^{(3)} + \zeta\omega_2, \quad \omega_2' = j_0 f_\omega^{(2)}, \quad \omega_3' = j_0 f_\omega^{(3)} \tag{5.1}$$

Введем в рассмотрение квадрат модуля нормированного четырехмерного вектора возмущений $Q = (2j_0)^{-1}[j_0(\eta_2^2 + \eta_3^2) + \omega_2^2 + \omega_3^2]$.

Его производная по времени с учетом (5.1) равна

$$Q' = \eta_2 f_\eta^{(2)} + \eta_3 f_\eta^{(3)} + \omega_2 f_\omega^{(2)} + \omega_3 f_\omega^{(3)} - \zeta\eta_2\omega_3 + \zeta\eta_3\omega_2 \tag{5.2}$$

В общем случае на поверхности тела могут существовать области безотрывного обтекания при ($l_1 < l < l_+$), частичного отрыва ($l_+ < l < l_-$) и полного отрыва ($l_- < l < 1$).

Просуммируем приращения компонент обобщенных сил $f_\eta^{(2)}$, $f_\eta^{(3)}$, $f_\omega^{(2)}$, $f_\omega^{(3)}$, заданных формулами (4.1), с использованием (4.3)–(4.5) и подставим найденное в (5.2).

Тогда можно показать, что при малых, но ненулевых возмущениях выполняется строгое неравенство $Q' < 0$. Это означает абсолютную устойчивость рассматриваемого движения, что и требовалось доказать.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-01265).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сагомонян А.Я.* Проникание. М.: Изд-во МГУ, 1974. 299 с.
2. *Сагомонян А.Я.* Пробивание плиты тонким твердым снарядом // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1975. № 5. С. 104–111.
3. *Флитман Л.М.* Дозвуковое осесимметричное обтекание тонких заостренных тел вращения упругопластическим потоком // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 4. С. 155–164.
4. *Флитман Л.М.* Безотрывное обтекание затупленного тела высокоскоростным упругопластическим потоком // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 642–651.
5. *Бивин Ю.К., Викторов В.В., Коваленко Б.Я.* Определение динамических характеристик грунтов методом пенетрации // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 3. С. 105–110.
6. *Бивин Ю.К., Колесников В.А., Флитман Л.М.* Определение механических свойств среды методом динамического внедрения // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 5. С. 181–184.
7. *Бивин Ю.К.* Каверна при вертикальном входе твердых тел в упругопластическую среду // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 1. С. 93–101.
8. *Григорян С.С.* Приближенное решение задачи о проникании тела в грунт // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 4. С. 18–24.
9. *Бивин Ю.К., Симонов И.В.* Оценки глубин проникания жестких тел в грунтовые среды при сверхзвуковых скоростях входа // Докл. РАН. 1993. Т. 328. № 4. С. 447–450.
10. *Симонов И.В.* Кавитационное проникание тел минимального сопротивления в прочную среду // Изв. РАН. ПММ. 1993. Т. 57. № 6. С. 110–119.
11. *Велданов В.А., Исаев А.Л., Маринчев Д.В., Пушилин Ю.М.* Программа расчета на ПЭВМ параметров процесса взаимодействия ударника с преградой // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: 12-я Всес. конф., Тверь, 1991. Новосибирск: Изд-во ИТПМ СО РАН, 1992. С. 65–72.
12. *Шамолин М.В.* Об интегрируемом случае в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 2. С. 65–68.
13. *Богданов А.В., Николаев А.В., Сербин В.И., Скуридин Г.А., Хаврошкин О.Б., Цыплаков В.В.* Об одном методе исследования планет земной группы // Космические исследования. 1988. Т. 26. Вып. 4. С. 591–603.
14. *Симонов И.В., Федотов С.А., Хаврошкин О.Б.* Предкатастрофическое состояние геофизических объектов, триггерное воздействие и пенетрация // Докл. РАН. 1996. Т. 347. № 6. С. 811–813.
15. *Симонов И.В.* Трансзвуковое обтекание тонкого твердого тела упругой средой // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 1. С. 114–122.
16. *Бетяев С.К.* Гидродинамика: проблемы и парадоксы // Успехи физических наук. 1995. Т. 165. № 3. С. 299–330.
17. *Бивин Ю.К., Глухов Ю.М., Пермяков Ю.В.* Вертикальный вход твердых тел в воду // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 6. С. 3–9.
18. *Осипенко К.Ю., Симонов И.В.* Обтекание конуса сверхзвуковым потоком пористой среды // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 2. С. 87–96.
19. *Poncelet J.* Rapport sur un Mémoire de MM Piobern et Morin, concernant les expériences faites à Metz en 1834, sur la pénétration des projectiles dans divers milieux resistauts et sur la rupture de corps par le choc. 1835 // Mem. Acad. sci. Paris. 1838. T. 15. P. 55–91.
20. *Симонов И.В.* Об устойчивости движения удлиненного тела вращения в упругопластической среде при отрыве потока // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 2. С. 311–320.

Москва

Поступила в редакцию
23.11.1999