

УДК 539.3:534.1

© 2000 г. Т.В. ГРИШАНИНА, Ф.Н. ШКЛЯРЧУК

**СВЯЗАННАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОГО ИЗГИБА
И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ТОНКОСТЕННОГО КРУГЛОГО СТЕРЖНЯ
ПРИ СОЛНЕЧНОМ НАГРЕВЕ**

На космических аппаратах в качестве удлинителей для различных грузов и приборов, а также штанг гравитационной стабилизации, могут использоваться выдвигаемые тонкостенные стержни, образуемые из предварительно напряженной навитой на барабан металлической ленты. Если два слоя ленты, сваренных по боковым кромкам, после схода с барабана выгибаются в разные стороны, то получается трубчатый стержень с замкнутым контуром поперечного сечения, близким по форме к окружности. Такие стержни могут иметь большую длину и под воздействием солнечных лучей могут испытывать значительный термоупругий изгиб, вынужденные колебания (при изменении ориентации и освещения) и автоколебания (вследствие динамической неустойчивости, обусловленной влиянием упругих деформаций на углы падения лучей и приток тепла). Задачи такого типа рассматривались ранее в различных приближенных постановках, например, в [1–3].

В данной работе рассмотрена связанная нелинейная задача сильного термоупругого изгиба и теплопроводности тонкостенного круглого стержня с учетом внешнего и внутреннего теплоизлучения и получено ее численное решение. Кроме того получено точное аналитическое решение нелинейной связанной задачи без учета излучения.

1. Определение теплового потока. Рассмотрим тонкостенный стержень кругового поперечного сечения, который неподвижно закреплен на одном конце, и его ось в недеформированном состоянии совпадает с осью x . Под действием солнечного нагрева стержень искривляется в плоскости падения солнечных лучей Oxy и его поперечные сечения поворачиваются на углы $\vartheta(s)$ (фиг. 1, *a*). Искривлением кругового контура поперечных сечений будем пренебрегать. Косинус угла между нормалью к поверхности искривленного стержня и направлением солнечных лучей равен $\cos(\gamma - \vartheta) \cos \theta$.

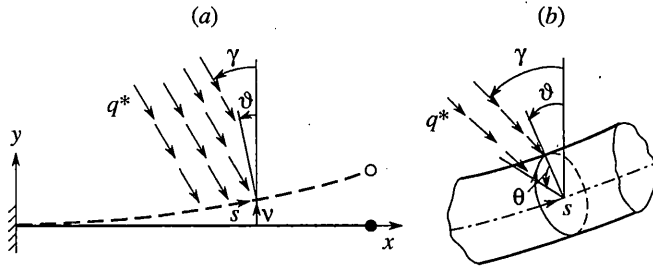
Тепловой поток от прямого солнечного излучения на единицу внешней поверхности оболочки (фиг. 1, *b*):

$$\begin{aligned} q^* &= q^0 \cos(\gamma - \vartheta) \cos \theta & \text{при } -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \\ q^* &= 0 & \text{при } -\pi/2 \geq \theta \geq \pi/2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $q^0 = A_S S_0 L_0^2 / L^2$, A_S – коэффициент поглощения внешней поверхности стержня, $S_0 = 1400 \text{ Вт/м}^2$, $L_0 = 149 \cdot 10^6 \text{ км}$ – среднее расстояние от Земли до Солнца, L [км] – расстояние от объекта до Солнца [4]. Отраженный поток солнечного излучения от поверхности аппарата и планеты здесь не учитывается.

Плотность теплового потока, теряемого за счет внешнего излучения в космическое пространство [4]:

$$q^e = \varepsilon^e E_0; \quad E_0 = c_0 \tau^4, \quad \tau = T/100^\circ \quad (1.2)$$



Фиг. 1

где ε^e – коэффициент черноты внешней поверхности оболочки, $c_0 = 5,77$ Вт/м², $T(s, \theta)$ – температура оболочки в градусах Кельвина.

Теряемый тепловой поток за счет лучистого теплообмена на внутренней поверхности цилиндрической оболочки при плоской радиации (считая, что влияние продольного искривления на радиацию мало и что температура достаточно медленно изменяется вдоль образующей) определяется из интегрального уравнения [5], которое в случае кругового контура записывается в виде

$$q^i(\theta) = \varepsilon^i E_0(\theta) - \frac{\varepsilon^i}{4} \int_{\theta-2\pi}^{\theta} E_0(\psi) \sin \frac{\theta-\psi}{2} d\psi + \frac{1-\varepsilon^i}{4} \int_{\theta-2\pi}^{\theta} q^i(\psi) \sin \frac{\theta-\psi}{2} d\psi \quad (1.3)$$

Решение этого уравнения нетрудно получить в виде ряда Фурье

$$q^i = \sum_{n=0}^{\infty} q_n^i \cos n\theta \quad (1.4)$$

$$q_0^i = 0, \quad q_n^i = \frac{1}{\pi} \frac{4n^2 \varepsilon^i}{4n^2 - \varepsilon^i} \int_0^{2\pi} E_0(\theta) \cos n\theta d\theta \quad \text{при } n \geq 1$$

Выражения (1.1) и (1.2) для q^* и q^e также представим в виде разложений в ряды Фурье:

$$q^* = \sum_{n=0}^{\infty} q_n^* \cos n\theta, \quad q_n^* = g_n q^0 \cos(\gamma - \vartheta) \quad (1.5)$$

$$g_0 = \frac{1}{\pi}, \quad g_1 = \frac{1}{2}, \quad g_n = -\frac{2}{(n^2 - 1)\pi} \cos \frac{n\pi}{2} \quad \text{при } n \geq 2$$

$$q^e = \sum_{n=0}^{\infty} q_n^e \cos n\theta \quad (1.6)$$

$$q_0^e = \frac{\varepsilon^e}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_0(\theta) d\theta, \quad q_n^e = \frac{\varepsilon^e}{\pi} \int_0^{2\pi} E_0(\theta) \cos n\theta d\theta \quad \text{при } n \geq 1$$

2. Распределение температуры по поверхности оболочки. Уравнение установившейся теплопроводности в окружном направлении тонкой круговой оболочки при солнечном нагреве с учетом внешнего и внутреннего излучения записывается в виде [5]:

$$\frac{h\lambda}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + q^* - q^e - q^i = 0 \quad (2.1)$$

где r, h, λ – радиус, толщина и коэффициент теплопроводности материала оболочки.

Представим безразмерную температуру $\tau(s, \theta)$ в виде усеченного ряда Фурье

$$\tau = \sum_{n=0}^N \tau_n \cos n\theta \quad (2.2)$$

Тогда из уравнения (2.1) с учетом (1.4)–(1.6) получим систему уравнений которая с учетом (1.2), (1.4)–(1.6) записывается в виде

$$\frac{n^2 h \lambda 100^\circ}{r^2} \tau_n + c_0 \left(\varepsilon^e + \frac{4n^2 \varepsilon^i}{4n^2 - \varepsilon^i} \right) F_n = g_n q^0 \cos(\gamma - \vartheta) \quad (n = 0, 1, \dots, N) \quad (2.3)$$

где F_n – нелинейные функции от τ_0, \dots, τ_N . Они вычисляются как коэффициенты ряда Фурье для функции τ^4 с учетом разложения (2.2):

$$F_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau^4 d\theta, \quad F_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tau^4 \cos n\theta d\theta$$

Возведем ряд (2.2) в квадрат и преобразуем его к виду

$$\tau^2 = \sum_{n=0}^{2N} a_n \cos n\theta \quad (2.4)$$

$$a_0 = \tau_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \tau_n^2, \quad a_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \tau_k \tau_{n-k} + \sum_{k=n}^N \tau_k \tau_{k-n} \quad (n \geq 1)$$

Аналогичным образом получим

$$\tau^4 = \sum_{n=0}^{4N} F_n \cos n\theta \quad (2.5)$$

$$F_0 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{2N} a_n^2, \quad F_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} + \sum_{k=n}^{2N} a_k a_{k-n} \quad (n \geq 1)$$

3. Термоупругий изгиб стержня. Уравнение термоупругого изгиба тонкостенного стержня кругового поперечного сечения записывается в виде

$$\frac{d\vartheta}{ds} + \frac{100^\circ \alpha}{r} \tau_1 = \frac{M}{EI} \quad (3.1)$$

где M – изгибающий момент, EI – изгибная жесткость стержня.

Для консольного стержня $M \equiv 0$ и $\vartheta(0) = 0$; в результате из (3.1) получаем

$$\vartheta = -\frac{100^\circ \alpha}{r} \int_0^s \tau_1 ds \quad (3.2)$$

Это уравнение совместно с (2.3) дает замкнутую систему уравнений для рассматриваемой связанной задачи термоупругого изгиба и теплопроводности тонкостенного стержня при солнечном нагреве с излучением.

Если пренебречь влиянием излучения, то из (2.3) при $n = 1$ находим

$$\tau_1 = \frac{1}{2} \frac{r}{h} \frac{q_0 r}{100^\circ \lambda} \cos(\gamma - \vartheta) \quad (3.3)$$

Подставив это выражение в (3.2), получим

$$\vartheta = \gamma + \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} \left[e^{\eta s/r} \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad \eta = \frac{1}{2} \frac{r}{h} \frac{\alpha q^0 r}{\lambda} \quad (3.4)$$

N	ε	τ_0	τ_1	τ_2
1	0.56	2.767180	0.217274	—
2	0.56	2.766939	0.215679	0.032319
10	0.56	2.766938	0.215682	0.032330
—	0	2.779897	0.378886	0.040201

В линейном приближении, когда не учитывается влияние изгиба на угол падения солнечных лучей ($\cos(\gamma - \vartheta) \approx \cos \gamma$) вместо (3.4) получаем

$$\vartheta = -\eta \frac{s}{r} \cos \gamma \quad (3.5)$$

В линеаризованной постановке, полагая $\cos(\gamma - \vartheta) \approx \cos \gamma + \vartheta \sin \gamma$ получаем

$$\vartheta = -\operatorname{ctg} \gamma \left(1 - e^{-(\eta s / r) \sin \gamma} \right) \quad (3.6)$$

4. Численные решения. Для численного решения стержень разбиваем на конечные элементы поперечными сечениями $s = s_k$ ($k = 0, 1, \dots, p$), начиная от заделки ($k = 0, s_0 = 0$) и до свободного конца ($k = p, s_p = l$). В качестве неизвестных рассматриваем значения угла поворота $\vartheta(s)$ и коэффициентов разложения температуры $\tau_n(s)$ ($n = 0, 1, \dots, N$) во всех расчетных сечениях (узлах), т.е. $\vartheta_k, \tau_{0,k}, \tau_{1,k}, \dots, \tau_{N,k}$ ($k = 0, 1, \dots, p$); при этом $\vartheta_0 = 0$.

Нелинейные уравнения (2.3) совместно с (3.2) решаются методом итераций по следующей схеме (v — номер итерации):

$$\begin{aligned} \tau_{0,k}^{(v+1)} &= \left[g_0 \frac{q^0}{c_0 \varepsilon^e} \cos(\gamma - \vartheta_k^{(v)}) - \left(F_{0,k}^{(v)} - (\tau_{0,k}^{(v)})^4 \right) \right]^{1/4} \\ \tau_{n,k}^{(v+1)} &= \frac{r^2 c_0}{100^\circ h \lambda n^2} \left[\frac{g_n q^0}{c_0} \cos(\gamma - \vartheta_k^{(v)}) - \left(\varepsilon^e + \frac{4n^2 \varepsilon^i}{4n^2 - \varepsilon^i} \right) F_{n,k}^{(v)} \right] \quad (n \geq 1) \\ \vartheta_k^{(v)} &= \vartheta_{k-1} - \frac{100^\circ \alpha l_k}{2r} (\tau_{1,k-1} + \tau_{1,k}^{(v)}); \quad l_k = s_k - s_{k-1} \end{aligned} \quad (4.1)$$

где в нулевом приближении $v = 0$ полагаем $\tau_{n,k}^{(0)} = 0$ или $\tau_{n,k}^{(0)} = \tau_{n,k-1}^{(0)}$ при $k \geq 1$.

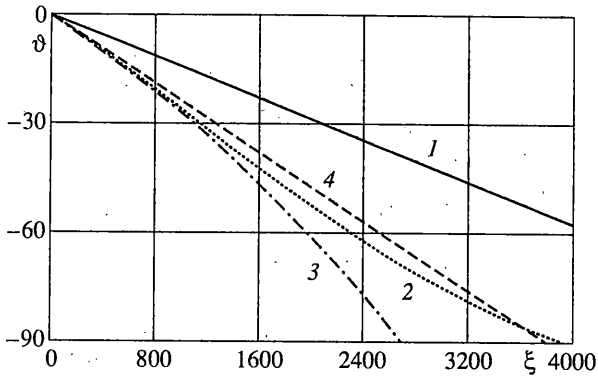
Функции $F_{0,k}^{(v)}, F_{n,k}^{(v)}$ вычисляются как F_0, F_n при $\tau_{0,k}^{(v)}, \tau_{1,k}^{(v)}, \dots, \tau_{N,k}^{(v)}$.

Вычисления выполним для тонкостенного стержня из листовой стали при следующих параметрах: $r = 25$ мм, $h = 0,1$ мм, $A_S = 0,5$, $L_0/L = 1$, $100^\circ \lambda = 5 \cdot 10^3$ Вт/м, $100^\circ \alpha = 1,1 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon^e = \varepsilon^i = 0,56$.

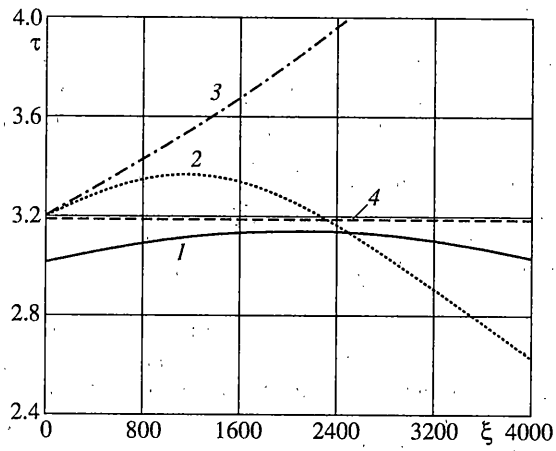
В таблице приведены значения коэффициентов τ_0, τ_1, τ_2 для некоторого поперечного сечения, в котором $\gamma - \vartheta = \pm 30^\circ$, полученные с учетом излучения ($\varepsilon = 0,56$) при различном числе N членов в разложении (2.2) и без учета излучения ($\varepsilon = 0$). Все последующие коэффициенты ($\tau_n, n \geq 3$) по величине значительно меньше и быстро убывают с возрастанием n .

Приведенные результаты показывают, что при расчете температуры и деформаций тонкостенного круглого стержня при солнечном нагреве необходимо учитывать излучение и можно ограничиваться в разложении (2.2) только двумя первыми членами ($n = 0, 1; N = 1$) с коэффициентами τ_0 и τ_1 .

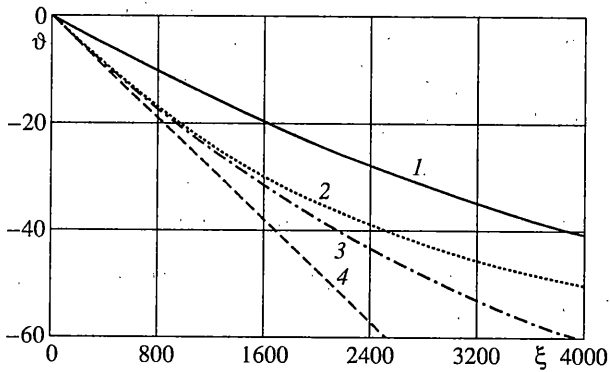
При расчете термоупругого изгиба стержень разбивался на конечные элементы длиной $l_k = 0,1$ м и в разложении (2.2) учитывалось шесть членов ($N = 5$). Распре-



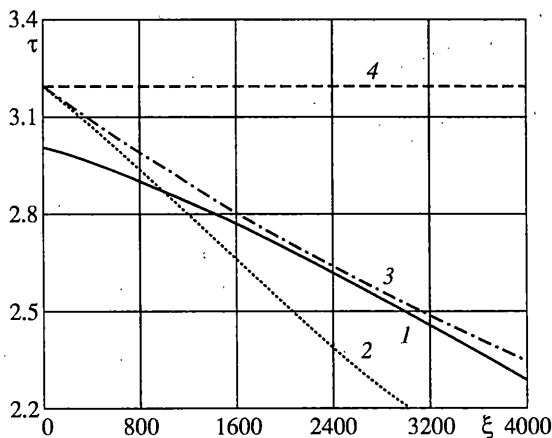
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

деление по длине углов поворота $\vartheta(\xi)$ и безразмерной температуры $\tau(\xi, 0)$ приведены на фиг. 2, 3 при $\gamma = -30^\circ$ и на фиг. 4, 5 при $\gamma = 30^\circ$; $\xi = s/r$. Здесь показаны результаты: 1 – численного решения с учетом излучения $\epsilon = 0,56$, $N = 5$ (сплошные линии); 2 – точного аналитического решения без учета излучения (пунктирные линии), 3 – решения линеаризованной задачи (при $\cos(\gamma - \vartheta) \approx \cos \gamma + \vartheta \sin \gamma$) без учета излучения (штрихпунктирные линии); 4 – решения линейной задачи ($\cos(\gamma - \vartheta) \approx \cos \gamma$) без учета излучения (штриховые линии).

5. Заключение. Приведена формулировка связанной нелинейной задачи сильного термоупругого изгиба и теплопроводности тонкостенного круглого стержня при солнечном нагреве с учетом внешнего и внутреннего излучения. Связанность задачи обусловлена тем, что здесь учитывается влияние изгибных деформаций стержня на изменение угла между нормалью к его деформированной поверхности и направлением солнечных лучей. В итоге распределение температуры в стержне зависит от его изгиба, а изгиб зависит от температуры.

Решение нелинейной задачи с учетом излучения получено численно методом итераций с использованием разложений в ряды Фурье по окружной координате, а без учета излучения – аналитически в виде формул. На примере консольного стержня даны сравнения этих решений и показано, что влияние излучения на распределение температуры и деформацию стержня может быть значительным.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-01-00567).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Florio F.A., Hobbs R.B.Jr. An analytical representation of temperature distribution in gravity gradient rods // AIAA J. 1968. V. 6. No. 1. P. 99–102.
2. Yu Y.-Y. Thermally induced vibration and flutter of a flexible boom // J. of Spacecraft and Rockets. 1969. V. 6. No. 8. P. 902–910.
3. Graham J.D. Solar induced bending vibrations of a flexible member // AIAA J. 1970. V. 8. No. 11. P. 2031–2036.
4. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике / Под ред. В.С. Авдуевского. М.: Машиностроение, 1992. 519 с.
5. Марченко В.М. Температурные поля и напряжения в конструкциях летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1965. 298 с.