МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2000

УДК 539.3

 В.А. ПОСТНОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОВРЕЖДЕНИЙ УПРУГИХ СИСТЕМ ПУТЕМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ЧАСТОТНЫХ СПЕКТРОВ, ПОЛУЧЕННЫХ ИЗ ЭКСПЕРИМЕНТА

Изложен метод определения повреждения упругой конструкции путем использования данных об изменении частотного спектра конструкции в результате полученных повреждений. Предполагается, что требуемая для решения поставленной задачи информация, относящаяся к исходному неповрежденному состоянию упругой системы, известна или может быть определена расчетным путем.

Введение. Повреждение конструкций может быть обнаружено с помощью ряда неразрушающих методов. В частности, весьма перспективным является метод, использующий данные об изменении частотного спектра конструкции в результате полученных повреждений [1, 2]. Развитию именно такого подхода к определению повреждений конструкции и посвящена настоящая работа.

Поясним коротко суть проблемы. В результате механических повреждений конструкция получает изменения жесткостных и инерционных параметров, которые приводят к определенным изменениям ее частотного спектра. Частотный спектр поврежденной конструкции (упругой системы) может быть определен путем экспериментальных замеров. При этом предполагается, что требуемая для решения поставленной задачи информация, относящаяся к исходному состоянию упругой системы, известна или может быть определена расчетным путем.

Таким образом, можно полагать, что для исходной упругой системы известны ее матрица жесткости K, матрица масс M, частотный спектр λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ и соответствующие собственные векторы q_i $(i = 1, \ldots, n)$. Для поврежденной системы имеем лишь частотный спектр λ_i^* $(i = 1,\ldots, n)$, полученный из эксперимента. Этой информации, как будет показано ниже, вполне достаточно, чтобы определить имеющиеся изменения жесткостных и инерционных параметров упругой системы.

Теоретические положения. Пусть частотное уравнение исходной системы имеет вид

$$(K - sM)q = 0, \qquad s = \lambda^2 \tag{1}$$

Частотное уравнение системы, получившей повреждение

$$(K^* - s^*M^*)q^* = 0 \tag{2}$$

Теперь учтем, что

$$s^* = s + ds, \qquad q^* = q + dq, \qquad K^* = K + dK \tag{3}$$

Тогда из уравнения (2), если учесть (1) и пренебречь величинами третьего порядка малости, можно получить для j-го тона следующую зависимость

$$(K - s_jM)dq_j + (dK - s_jdM - ds_jM)q_j + (dK - s_jM - ds_jM)dq_j - ds_jdMq = 0 \tag{4}$$

Одновременно из уравнения (2), если учесть (3), получим

$$dq_j = -q_j - (K - s_j^* M)^{-1}(dK - s_j^* dM)(q_j + dq_j) \tag{5}$$

Если далее учесть, что согласно известному спектральному разложению

$$(K - s_j^* M)^{-1} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{q_k q_k^T}{s_k - s_j^*}$$

то уравнение (5) перепишется в виде

$$dq_j = -q_j - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{q_k q_k^T (dK - s_j^* dM)(q_j + dq_j)}{s_k - s_j^*} \tag{6}$$

Умножая слева уравнение (4) на вектор q_k^T, получим

$$q_k^T (K - s_j M) dq_j + q_k^T (dK - s_j dM - ds_j M) q_j + q_k^T (dK - s_j dM - ds_j M) dq_j = 0 \tag{7}$$

При $k = j$ последнее уравнение может быть преобразовано к виду

$$q_j^T (dK - s_j^* dM)(q_j + dq_j) = ds_j q_j^T M (q_j + dq_j) \tag{8}$$

Если теперь с помощью зависимости (8) в выражении для суммы уравнения (7) исключить j-й член, то получим следующее выражение

$$dq_j = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{q_k q_k^T (dK - s_j^* dM)(q_j + dq_j)}{s_j^* - s_k} (1 - \delta_{jk}) + q_j q_j^T M dq_j \tag{9}$$

Представим неизвестные dq_j соответственно в виде

$$dq_j = \sum_{k=1}^{n} d_{jk} q_k \tag{10}$$

Непосредственное сравнение левых частей (10) и (9) позволяет получить

$$d_{jk} = \frac{q_k^T (dK - s_j^* dM) q_j + q_k^T (dK - s_j^* dM) dq_j}{s_j^* - s_k} (1 - \delta_{jk}) + q_j^T M dq_j \delta_{jk} \tag{11}$$

Внося (10) в зависимость (11), получим

$$(1 - \delta_{jk}) q_k^T (dK - s_j^* dM) q_j + d_{jk}(s_k - s_j^*) +$$

$$+ q_k^T (dK - s_j^* dM)(1 - \delta_{jk}) \sum_{p=1}^{p=n} d_{jp} q_p + (s_j^* - s_k) q_j^T M dq_j \delta_{jk} = 0 \tag{12}$$

Используя далее выражение (10), а также условие ортогональности форм колебаний, непосредственно из уравнения (8), получим

$$q_j^T (dK - s_j^* dM) q_j - ds_j + q_j^T)(dK - s_j^* dM) \sum_{p=1}^{p=n} d_{jp} q_p - ds_j q_j M \sum_{p=1}^{n} d_{jp} q_p = 0 \tag{13}$$

Изменение матрицы жесткости dK и матрицы масс dM ищем в виде

$$dK = \sum_{i=1}^{i=n_1} c_i K_i, \quad dM = \sum_{i=n_1+1}^{i=n} c_i M_i \tag{14}$$

где K_i и M_i – определенные матрицы, структура которых определяется соответственно структурами матриц K и M рассматриваемой упругой системы; c_i – неизвестные параметры, определяющие величину изменений соответственно жесткостных и массовых параметров упругой системы.

С учетом (14) и дополнительных обозначений

$$b_{kij} = q_k^T K_i q_i \quad (i = 1, \ldots, n_1), \quad b_{kij} = ds_j q_k^T M_i q_j (n_1 + 1, \ldots, n)$$

уравнения (13) и (12) соответственно перепишутся в виде

$$\sum_{i=0}^{n} b_{jij} c_i - ds_j + \sum_{i=0}^{n} \sum_{p=0}^{n} c_i d_{jp} b_{jip} - ds_j q_j^T M \sum_{p=0}^{n} d_{jp} q_p = 0 \tag{15}$$

$$(1-\delta_{jk}) \sum_{i=1}^{i=n} b_{kij} c_i + d_{jk}(s_k - s_j^*) + (1-\delta_{jk}) \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{p=1}^{p=n} d_{jp} b_{kip} c_i + (s_j^* - s_k) q_j^T M d q_j \delta_{jk} = 0 \tag{16}$$

Решение системы уравнений (15) и (16) позволяет определить искомые значения параметров c_i.

Способ определения параметров c_i. Для решения системы уравнений (15) и (16) воспользуемся итерационным методом. С этой целью уравнение (15) представим в виде

$$\sum a_{ji} c_i = ds_j (1 + q_j^T M \sum_{p=1}^{n} d_{jp} q_p), \quad a_{ji} = b_{jij} + \sum_{p=1}^{n} d_{jp} b_{jip} \tag{17}$$

а уравнение (16) целесообразно представить так

$$d_{jk} = \frac{(1-\delta_{jk}) e_{kj} + (1-\delta_{jk}) \sum_{p=1}^{n} d_{jp} e_{kp} (1-\delta_{pk}) + (s_j^* - s_k) q_j^T M d q_j \delta_{jk}}{s_j^* - s_k - e_{kk}(1-\delta_{kj})} \tag{18}$$

$$e_{kj} = \sum_{i=1}^{i=n} b_{kij} c_i$$

В первом приближении можно положить $d_{ik}^{(1)} = 0$. Далее из уравнения (17) определяются в первом приближении параметры $c_i^{(1)}$. Затем из уравнения (18) получаем возможность уточнить значение $d_{ik}^{(2)}$. После чего из уравнения (17) определим значения параметров $c_i^{(2)}$ во втором приближении. Этот процесс продолжается до момента, когда различие в значениях параметров c_i, полученных в текущем и предыдущем приближениях, будет, по мнению расчетчика, вполне допустимой погрешностью расчета.

Числовой пример. Рассмотрим призматическую жесткозаделанную на левом торце консольную балку. Примем, для упрощения расчета, что ее изгибная жесткость, погонная масса и длина равны единице $EI_1 = m_1 = l = 1$. Каждая из этих величин имеет соответствующую размерность.

Для расчета свободных колебаний используем метод Ритца. Потенциальная и кинетическая энергии балки определяются по формулам:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EI_1(x) w^n(x,t)^2 dx, \quad T = \frac{1}{2} \int_0^l m_1(x) \dot{w}(x,t)^2 dx$$

Перемещение $w(y, t)$ ищем в виде

$$w(y,t) = \sum_{k=0}^{n} w_k(y) e^{i\lambda t}, \quad y = \frac{x}{l}$$

Применительно к рассматриваемой балке базисную функцию $w_k(y)$ примем в виде

$$w_k(y) = q_k \varphi_k(y), \quad \varphi_k(y) = y^{k+2} \quad (k = 0,1,2,\ldots,n)$$

Тогда потенциальная и кинетическая энергии могут быть представлены в виде

$$\Pi_{\max} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} k_{ik} q_i q_k, \quad T_{\max} = \frac{s}{2}\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} m_{ik} q_i q_k, \quad s = \lambda^2$$

где k_{ik} и m_{ik} есть соответственно элементы матриц жесткости K и массы M:

$$k_{ik} = \int_0^1 \frac{EI_1(y)}{EI_0} \varphi_i''(y)\varphi_k''(y)dy, \quad m_{ik} = \int_0^1 \frac{m_1(y)}{m_0}\frac{m_0 l^4}{EI_0}\varphi_i(y)\varphi_k(y)dy \tag{19}$$

Используя далее метод Ритца, получим систему уравнений для определения форм свободных колебаний q_i:

$$\sum_{k=0}^{n}(k_{ik} - s m_{ik})q_k = 0 \quad (i = 0,1,\ldots,n) \tag{20}$$

Отсюда получаем частотное уравнение исходной неповрежденной балки:

$$\Delta_n(s) = | k_{ik} - s m_{ik} | = 0, \quad s = \lambda^2 \tag{21}$$

Предположим, что в результате повреждений или естественного износа произошли определенные изменения изгибной жесткости и погонной массы балки. Эти изменения приближенно аппроксимируем с помощью следующих зависимостей:

$$\Delta EI(y) = EI_1(y)(c_1 + c_2 y), \quad \Delta m(y) = m_1(c_3 + c_4 y) \tag{22}$$

где $c_i (i = 1, 2, 3, 4)$ – подлежащие определению неизвестные параметры.

С учетом выражений (19) и (22) матрицы K_1, K_2, M_1 и M_2, входящие в (14), определятся с помощью следующих зависимостей:

$$K_1 = | k_{ik}^{(1)} |, \quad \Delta K_2 = | k_{ik}^{(2)} |, \quad M_1 = | m_{ik}^{(1)} |, \quad M_2 = | m_{ik}^{(2)} |$$

$$k_{ik}^{(1)} = k_{ik}, \quad k_{ik}^{(2)} = \int_0^1 \frac{EI_1(y)}{EI_0} y\varphi_i''(y)\varphi_k''(y)dy$$

$$m_{ik}^{(1)} = m_{ik}, \quad m_{ik}^{(2)} = \int_0^1 \frac{m_1(y)}{m_0}\frac{m_0 l^4}{EI_0} y\varphi_i(y)\varphi_k(y)dy$$

Числовые расчеты были выполнены при сохранении в выражении $w(y, t)$ лишь первых четырех членов ряда. В табл. 1 приведены квадраты первых четырех частот исходной балки $s_i^{(1)}$, найденные непосредственно из уравнения (21), и квадраты первых четырех частот $s_i^{*(1)}$ поврежденной балки, предположительно найденные из эксперимента. Естественно, что в рамках настоящего исследования эксперимент не проводился. Были заданы некоторые значения параметров c_i ($c_1 = -0{,}1$, $c_2 = -0{,}15$, $c_3 = -0{,}1$, $c_4 = -0{,}07$). По формулам (22) определялись изменения изгибной жесткости и погонной массы как бы поврежденной балки и затем также путем численных расчетов находились частоты поврежденной балки.

Значения векторов q_i ($i = 1, 2, 3, 4$) исходной балки определялись из решения системы (20). К сожалению, числовые расчеты показали, что применительно к рассматриваемой задаче матрица $A = | a_{ji} |$ в системе уравнений (17) имеет очень высокое значение числа обусловленности (порядка 10^{11} на L_2 норме). В результате полученные значения параметров c_i резко отличались от тех их значений, которые закладывались выше в расчет при определении частот поврежденной балки.

Таблица 1

i	1	2	3	4
Неповрежденная балка, $s_i^{(1)}$	12,362	490,97	4013	79300
Поврежденная балка, $s_i^{*(1)}$	14,028	511,00	4062	76040
Разность $ds_i^{(1)} = s_i^{*(1)} - s_i^{(1)}$	1,666	20,03	49	–3260

Таблица 2

i	1	2	3	4
Неповрежденная балка, $s_i^{(2)}$	9,272	368,23	3010	59470
Поврежденная балка, $s_i^{*(2)}$	9,356	355,73	2866	54490
Разность $ds_i^{(2)} = s_i^{*(2)} - s_i^{(2)}$	0,084	–12,50	–44,0	–4980

Таблица 3

N	c_1	c_2	c_3	c_4
1	–0,199	–0,155	–0,205	–0,144
2	–0,2	–0,151	–0,201	–0,149
3	–0,2	–0,15	–0,2	–0,15

Существенно понизить число обусловленности матрицы A, и тем самым обеспечить достаточную устойчивость расчетного алгоритма, удалось с помощью следующего приема. Присоединяя к поврежденной консольной балке дополнительную балку с известными изгибной жесткостью $EI_2(y)$ и погонной массой $m_2(y)$ и обеспечивая их параллельную работу, получаем как бы вторую исследуемую балку, которая до повреждения имела жесткость $EI_1 + EI_2$ и погонную массу $m_1 + m_2$ (ниже в расчетах принималось $EI_2 = 0{,}5EI_1$, $m_2 = m_1$). При этом изменение ее жесткости и погонной массы в результате повреждения вновь выражается зависимостью (22).

Для этой дополнительной балки путем численного расчета определялись первые четыре частоты $s_i^{(2)}$ (приведены в табл. 2) и соответствующие им собственные векторы. Частоты поврежденной балки $s_i^{*(2)}$, как и в случае для основной балки, определялись численно.

Теперь в состав системы уравнений (19) для определения параметров c_i имеем возможность вместо двух последних уравнений для двух высших частот основной балки ввести два первых уравнения для двух низших частот второй вспомогательной балки. При таком подходе число обусловленности матрицы A в системе (19) резко снизилось и оказалось равным $k(A) = 1265$.

Для решения системы уравнений (19) использовался алгоритм, изложенный выше. Найденные при этом значения параметров c_i, определяющих степень повреждения балки (изменение ее жесткости $\Delta EI(y)$ и погонной массы $\Delta m(y)$), приведены в табл. 3 (N – номер итерации).

Данные табл. 3 показывают, что уже первое приближение итерационного процесса обеспечивает получение практически точных значений для искомых параметров c_i.

Заключение. Приведенный числовой пример показывает высокую эффективность изложенного метода определения структурных повреждений. Метод применим для произвольных конструкций и позволяет определить как размеры повреждений, так и их расположение с требуемой точностью. Сохранение в расчетных зависимостях членов первого и второго порядка малости позволяет использовать разработанный метод даже при наличии значительных повреждений рассматриваемой конструкции (вплоть до значений параметров c_i, приближающихся к 0,5).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 98-01-00382).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cawley P., Adams R.D.* The location of defects in structures from measurements of natural frequences // J. Strain Analyses. 1979. V. 14. P. 49–57.
2. *Nenad Bicanic, Hua-Peng Chen.* Damage identitication in framed structures using natural frequencies // Intern. J. for numer. Meth. In Eng. 1997. V. 40. P. 4451–4468.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
8.12.1999