

УДК 539.3

© 2000 г. В.И. КОНДАУРОВ, Н.В. КУТЛЯРОВА

ПОВРЕЖДАЕМОСТЬ И РЕОЛОГИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НАЧАЛЬНО-ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ

Для описания зарождения и эволюции пор, трещин и других микродефектов в начально-пористых материалах предложена континуальная модель, опирающаяся на локальный баланс изменений накопленной упругой энергии среды и эффективной поверхностной энергии. Рассмотрен ряд иллюстрирующих примеров, подтверждающих, что предложенный подход позволяет описать характерные особенности поведения начально-пористых сред, в частности, возникновение процесса разрушения не только при сдвиге и растяжении, но и при всестороннем сжатии, а также развитие дилатансии или компактирования в процессе накопления поврежденности. Исследована возможность появления реологической неустойчивости материала и формы ее реализации.

В рамках предложенной модели рассмотрена задача о накоплении поврежденности и потере устойчивости начально-пористого материала в окрестности сферической полости. Показано, что обрушение полости обусловлено реологической неустойчивостью материала. Предельный размер области поврежденности, соответствующий началу обрушения, не зависит от перепада давлений, а определяется характеристиками материала.

1. Введение. Горные породы и многие конструкционные материалы, такие как керамики, бетоны, некоторые металлы, представляют собой среды, содержащие поры, микротрещины, и другие дефекты. Поведение таких сред характеризуется рядом особенностей, главными из которых являются:

упругое (обратимое) деформирование при относительно небольших давлениях и сдвигах;

необратимое накопление поврежденности при достаточно интенсивных нагрузках, причем не только растягивающих и сдвиговых, но и сжимающих;

развитие необратимой объемной деформации (дилатансия или компактирование) в процессе накопления трещиноватости;

разрушение, вызываемое действием интенсивных нормальных или касательных напряжений и приводящее либо к фрагментации тела, либо к качественному изменению реологических свойств в случае сильного дробления.

Описание физико-механических свойств таких сред и моделирование протекающих в них процессов традиционно опирается на механику гетерогенных сред [1, 2]. Основные особенности используемого при этом подхода связаны с введением нескольких континуумов с определенными реологическими свойствами. Взаимодействие сред описывается обычно простейшими моделями, нередко мало согласующимися с используемой реологией материала. При этом в процессе роста микродефектов не учитывается трансформация термомеханических форм энергии в иные формы, в частности, в эффективную поверхностную энергию микротрещин. Разрушение отождествляется с достижением параметрами состояния некоторого заранее предопределенного критерия прочности. Следует отметить также, что методы механики гетерогенных сред связаны с существенными математическими трудностями и используют ряд

неочевидных предположений и гипотез, необходимых для перехода от элементарных физических явлений к усредненным феноменологическим моделям.

Другой подход к описанию процессов зарождения и эволюции микродефектов для случая начально-гомогенной среды развит в работах [3, 4]. В отличие от традиционных теорий накопления повреждаемости, этот подход явным образом учитывает энергозатраты, связанные с образованием новых поверхностей при появлении и росте микротрещин. Для случая мгновенной кинетики рассеянного разрушения используемая модель опирается на локальный баланс изменений накопленной упругой энергии среды и эффективной поверхностной энергии ансамбля микродефектов аналогично энергетическому подходу Гриффитса [5] в механике изолированной трещины. Распространение этого подхода на случай начально-пористого материала связано с необходимостью учета разрушения не только при сдвиге и растяжении, но и при всестороннем сжатии. В данной работе предлагается энергетическая модель, с единых позиций описывающая характерные особенности поведения сухих начально-пористых или трещиноватых сред с упругим скелетом.

2. Основные уравнения. При математическом моделировании поведения начально-пористых хрупких материалов ограничимся приближением малых изотермических деформаций. Предполагая хаотическим распределение и ориентацию микропустот, эффективную среду будем считать начально-изотропной, однородной с начальной пористостью Δ_0 . Влиянием вязкости будем пренебрегать, равно как и кинетикой развития поврежденности. Система дифференциальных уравнений, описывающая поведение такой среды в отсутствие массовых сил может быть записана в виде

$$\rho \dot{\mathbf{v}} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad 2\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \nabla \otimes \mathbf{v} + \nabla \otimes \mathbf{v}^T \quad (2.1)$$

где ρ – плотность материала, \mathbf{v} – вектор скорости, $\boldsymbol{\epsilon}$ – тензор малых деформаций, $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений. Локальное уравнение баланса энергии в изотермическом приближении с учетом (2.1) имеет вид

$$\rho \dot{U} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (2.2)$$

где U – плотность внутренней энергии. Распределенными источниками энергии и энергопереносом вследствие диффузии микродефектов пренебрегается. Независимыми параметрами состояния элемента среды будем считать тензор $\boldsymbol{\epsilon}$ и скалярную меру поврежденности ω , реакция среды определяется изотропными функциями $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}, \omega)$, $U = U(\boldsymbol{\epsilon}, \omega)$, причем

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}, \omega) = \rho \partial U(\boldsymbol{\epsilon}, \omega) / \partial \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.3)$$

С учетом (2.3) соотношение (2.2) сводится к равенству $\dot{\omega} \partial U(\boldsymbol{\epsilon}, \omega) / \partial \omega = 0$, из которого следует, что в повреждающейся среде возможны два процесса: пассивный ($\dot{\omega} = 0$) и активный ($\dot{\omega} \neq 0, \partial U(\boldsymbol{\epsilon}, \omega) / \partial \omega = 0$). Пренебрегая залечиванием микротрещин, получим, что в активном процессе

$$\partial U(\boldsymbol{\epsilon}, \omega) / \partial \omega = 0, \quad \dot{\omega} > 0, \quad \omega \geq 0 \quad (2.4)$$

Заметим, что равенство (2.4) не противоречит предположению о независимости параметров состояния $\boldsymbol{\epsilon}$ и ω , несмотря на то, что это соотношение накладывает дополнительное условие на деформацию и поврежденность в активном процессе. Независимость $\boldsymbol{\epsilon}$ и ω обусловлена действием распределенных источников энергии, связанных с изменением поврежденности материала за счет немеханических воздействий. Плотность таких источников произвольна и, в частности, может быть тождественно равна 0.

Представим плотность внутренней энергии в виде

$$U(\boldsymbol{\epsilon}, \omega) = u_f(\omega) + u(\boldsymbol{\epsilon}, \omega)$$

$$\rho u(\boldsymbol{\epsilon}, \omega) = \frac{1}{2} K I_1^2 + G J^2 - \alpha_p(I_1) \omega I_1 - \alpha_s \omega J \quad (2.5)$$

$$\rho u_f(\omega) = u_f^0 + \gamma \omega + \frac{1}{2} \beta \omega^2 \quad (2.6)$$

где ρu – упругий потенциал, обращающийся в ноль в отсутствие деформации среды, ρu_f – плотность эффективной поверхностной энергии, изменение которой отлично от нуля в любом процессе роста поврежденности; величины $K, G, \alpha_s, \beta, u_f^0, \gamma$ – параметры среды, которые предполагаются зависящими только от свойств скелета и начальной пористости Δ_0 , т.е. их зависимостью от текущих значений поврежденности пренебрегается. Значения объемной деформации I_1 и интенсивности сдвиговой деформации J определяются соотношениями $I_1 = \mathbf{I} : \boldsymbol{\epsilon}, J = (\boldsymbol{\epsilon}' : \boldsymbol{\epsilon}')^{1/2}, \boldsymbol{\epsilon}' = \boldsymbol{\epsilon} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{I}$, где \mathbf{I} – единичный тензор второго ранга. В отличие от упругого потенциала повреждающейся гомогенной среды [4, 5], представление (2.5) содержит функцию $\alpha_p(I_1)$, которая является существенно знакопеременной, что связано с необходимостью учета уменьшения упругого потенциала при росте поврежденности в условиях сжатия ($I_1 < 0$). Из (2.3), (2.5) следует

$$\boldsymbol{\sigma} = (K I_1 - \hat{\alpha}_p \omega) \mathbf{I} + (2G - \alpha_s \omega / J) \boldsymbol{\epsilon}', \quad \hat{\alpha}_p = \alpha_p(I_1) + I_1 \alpha'_p(I_1) \quad (2.7)$$

Уравнение (2.4) баланса энергии для потенциалов (2.5), (2.6) приводит к соотношению, которое связывает текущие значения параметра поврежденности и деформации в активном процессе

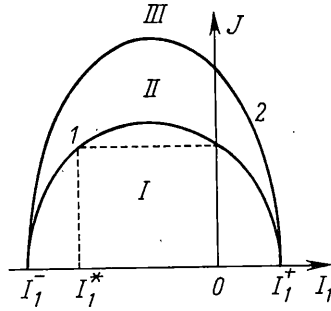
$$\omega = \{\alpha_p(I_1) I_1 + \alpha_s J - \gamma\} / \beta \quad (2.8)$$

Из условия (2.4) и равенства (2.8) следует соотношение $\dot{\omega} = \hat{\alpha}_p(I_1) \dot{I}_1 + \alpha_s \dot{J} > 0$, накладывающее ограничение на скорости изменения величин I_1 и J в активном процессе. Указанные выше особенности поведения начально-пористых геоматериалов приводят к разбиению полуплоскости состояний (I_1, J) , где I_1 – объемная деформация, J – интенсивность сдвиговой деформации, на три области (фиг. 1). Кривая $I - J = f(I_1)$ ограничивает область I упругих состояний. Граница этой области обладает сильной асимметрией относительно оси $I_1 = 0$, обусловленной существенным различием прочностных свойств при растяжении и сжатии. Область II соответствует повреждающемуся материалу, III – разрушенному, причем, в отличие от кривой $f(I_1)$, граница между областями II и III зависит от процесса деформирования.

Из условия $\omega(I_1, J) = 0$ начала активного процесса при известной границе упругой области $J = f(I_1)$ следует связь между функцией $\alpha_p(I_1)$, параметром γ и уравнением границы упругой области: $\gamma / \alpha_s = f(0), \alpha_p(I_1) = \alpha_s \{f(0) - f(I_1)\} / I_1$. Таким образом, функция $\alpha_p(I_1)$ и параметр γ определяются уравнением границы упругой области. Отметим, что для выпуклой вверх функции $f(I_1)$ величина $\alpha_p(I_1)$ положительна при $I_1 \in (I_1^*, I_1^+)$ и отрицательна при $I_1 \in (I_1^-, I_1^*)$. Зависимость от I_1 функции $\alpha_p(I_1)$ и ее знакопеременность существенным образом влияет на реологию материала и обусловлена начальной пористостью среды.

3. Простейшие процессы деформирования. Рассмотрим в качестве примера процесс объемного деформирования, в котором $\boldsymbol{\epsilon} = I_1(t) \mathbf{I} / 3$, где $I_1(t)$ – заданная функция времени. Из (2.7), (2.8) следует $\boldsymbol{\sigma} = K I_1 \mathbf{I}, \omega = 0$ при $I_1^- < I_1 < I_1^+$; $\boldsymbol{\sigma} = (K - \hat{\alpha}_p \alpha_p / \beta) I_1 \mathbf{I} + \hat{\alpha}_p \gamma / \beta \mathbf{I}, \omega = (\alpha_p(I_1) I_1 - \gamma) / \beta$ при $I_1 > I_1^+ > 0, \dot{I}_1 > 0; I_1 < I_1^- < 0, \dot{I}_1 < 0$.

При деформации сдвига $\boldsymbol{\epsilon} = \varepsilon(t) (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)$, где $\varepsilon(t)$ – заданная интенсивность



Фиг. 1

сдвига, накопление поврежденности начинается при $\varepsilon_0 = \gamma / (\alpha_s \sqrt{2})$. В активном процессе

$$\sigma_{12} = (2G - \alpha_s^2 / \beta) \varepsilon + \varepsilon_0 \alpha_s^2 / \beta, \quad \omega = \alpha_s \sqrt{2} (\varepsilon - \varepsilon_0) / \beta, \quad \sigma_{11} = -f'(0) \alpha_s^2 \sqrt{2} (\varepsilon - \varepsilon_0) / \beta$$

Применяя формулы (7), (8) к задаче одноосной деформации $\epsilon = \varepsilon(t) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$, получим

$$\sigma_{11} = \begin{cases} \Lambda_0 \varepsilon(t), & \varepsilon_f^- < \varepsilon < \varepsilon_f^+ \\ \left(\Lambda_0 - \frac{\alpha^\pm \hat{\alpha}^\pm}{\beta} \right) \varepsilon(t) + \frac{\gamma \hat{\alpha}^\pm}{\beta}, & |\varepsilon| > |\varepsilon_f^\pm|; \quad \varepsilon \dot{\varepsilon} > 0 \\ \Lambda_0 \varepsilon(t) - \hat{\alpha}^\pm \omega_*, & |\varepsilon| > |\varepsilon_f^\pm|; \quad \varepsilon \dot{\varepsilon} < 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{22} = \begin{cases} \lambda \varepsilon(t), & \varepsilon_f^- < \varepsilon < \varepsilon_f^+ \\ \left(\lambda - \frac{\alpha^\pm \tilde{\alpha}^\mp}{\beta} \right) \varepsilon(t) + \frac{\gamma \tilde{\alpha}^\mp}{\beta}, & |\varepsilon| > |\varepsilon_f^\pm|; \quad \varepsilon \dot{\varepsilon} > 0 \\ \lambda \varepsilon(t) - \tilde{\alpha}^\mp \omega_*, & |\varepsilon| > |\varepsilon_f^\pm|; \quad \varepsilon \dot{\varepsilon} < 0 \end{cases}$$

$$\omega = \begin{cases} 0, & \varepsilon_f^- < \varepsilon < \varepsilon_f^+ \\ \frac{\alpha^\pm (\varepsilon(t) - \varepsilon_f^\pm)}{\beta}, & |\varepsilon| > |\varepsilon_f^\pm|; \quad \varepsilon \dot{\varepsilon} > 0 \\ \omega_*, & |\varepsilon| > |\varepsilon_f^\pm|; \quad \varepsilon \dot{\varepsilon} < 0 \end{cases}$$

$$\Lambda_0 = K + \frac{4}{3} G, \quad \lambda = K - \frac{2}{3} G, \quad \varepsilon_f^\pm = \frac{\gamma}{\alpha^\pm}, \quad \alpha^\pm = \alpha_p \pm \sqrt{2/3} \alpha_s$$

$$\hat{\alpha}^\pm = \hat{\alpha}_p \pm \sqrt{2/3} \alpha_s, \quad \tilde{\alpha}^\pm = \hat{\alpha}_p \pm \alpha_s / \sqrt{6}$$

Заметим, что в силу того, что в активном процессе $\omega(\varepsilon) > 0$ (в том числе и при $\varepsilon(t) < \varepsilon_f^- < 0$), величина $\alpha^- < 0$. Таким образом, с учетом того, что $\tilde{\alpha}^+ > 0$, имеем $\lambda - \alpha^- \tilde{\alpha}^+ \beta > \lambda$.

Из полученных соотношений следует:

наличие пороговых значений деформации, при которых начинается процесс рассеянного разрушения;

уменьшение эффективных модулей при накоплении поврежденности, что свидетельствует о возможности появления реологической неустойчивости материала;

возникновение нормальных напряжений при деформации сдвига, причем в зависимости от знака $f'(0)$ они могут быть как отрицательными, так и положительными;

упрочнение материала в направлении ортов \mathbf{e}_2 и \mathbf{e}_3 в результате разрушения при одноосном сжатии в направлении \mathbf{e}_1 .

4. Распространение волн и реологическая неустойчивость материала. Система (2.1) может быть записана в виде

$$\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{L}(\boldsymbol{\epsilon}) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\epsilon}) = 0, \quad 2\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \nabla \otimes \mathbf{v} - \nabla \otimes \mathbf{v}^T = 0$$

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\epsilon}) = \partial^2 u(\boldsymbol{\epsilon}, \omega(\boldsymbol{\epsilon})) / \partial \boldsymbol{\epsilon} \otimes \partial \boldsymbol{\epsilon} + (\partial^2 u(\boldsymbol{\epsilon}, \omega(\boldsymbol{\epsilon})) / \partial \boldsymbol{\epsilon} \partial \omega) \otimes (\partial \omega(\boldsymbol{\epsilon}) / \partial \boldsymbol{\epsilon})$$

где $\mathbf{L}(\boldsymbol{\epsilon})$ – тензор четвертого ранга гипопругих коэффициентов. Используя формулы (2.5), (2.8), получим явное выражение для тензора \mathbf{L} в активном процессе

$$\rho \mathbf{L} = (\Lambda - M) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2M \mathbf{1} - \xi (\mathbf{I} \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes \mathbf{I}) - \eta (\mathbf{N} \otimes \mathbf{N})$$

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\epsilon}' / J, \quad \xi = \hat{\alpha}_p \alpha_s / \beta, \quad \eta = \alpha_s^2 / \beta - \varphi, \quad \varphi = \alpha_s \omega / J,$$

$$\Lambda = K + \frac{1}{3} G - \frac{1}{6} \varphi - \hat{\alpha}_p^2 / \beta - \alpha'_p \omega,$$

$$M = G - \varphi / 2$$

где $\mathbf{1}$ – единичный тензор четвертого ранга, такой, что $\mathbf{1} : \mathbf{B} = \frac{1}{2} (\mathbf{B} + \mathbf{B}^T)$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2} (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{I})$. Акустический тензор $\rho \mathbf{A}(\boldsymbol{\epsilon}, \omega, \mathbf{v}) \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{v}$ имеет вид

$$\rho \mathbf{A} = M \mathbf{I} + \Lambda \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \xi (\mathbf{v} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{v}) - \eta \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{v} \quad (4.1)$$

Скорость c поверхности слабого разрыва с единичной нормалью \mathbf{v} определяется уравнением

$$(c^2 \mathbf{I} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (4.2)$$

где $\mathbf{V} \equiv \mathbf{v} \cdot [\nabla \otimes \mathbf{v}]$ – скачок нормальной производной скорости частиц. С учетом выражения (4.1), уравнение (4.2) примет вид

$$(S \mathbf{I} - \Lambda \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \xi (\mathbf{v} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{v}) - \eta \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{V} = 0, \quad S = \rho c^2 - M \quad (4.3)$$

Однородная система (4.3) имеет нетривиальное решение при условии равенства нулю детерминанта матрицы коэффициентов. Это условие представимо в форме

$$S(S^2 - 2QS - q) = 0 \quad (4.4)$$

$$2Q(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{v}) = K + \frac{1}{3} G - \hat{\alpha}_p \omega - \frac{1}{6} \mathbf{v} \cdot (\hat{\alpha}_p \mathbf{I} + \alpha_s \mathbf{N})^2 \cdot \mathbf{v} + \varphi (\mathbf{v} \cdot \mathbf{N}^2 \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{6}),$$

$$q = \zeta (\mathbf{v} \cdot \mathbf{N}^2 \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{v})^2) \quad (4.5)$$

$$\zeta = \xi^2 + \eta \Lambda$$

Корнями уравнения (4.4) являются $\rho c_{1,2}^2 = M + Q \pm (Q^2 + q)^{1/2}$, $\rho c_3^2 = M$.

Будем называть состояние $\boldsymbol{\epsilon}_0$ *реологически неустойчивым*, если существует нормаль \mathbf{v}_0 , такая, что скорость нестационарной поверхности слабого разрыва $c(\boldsymbol{\epsilon}_0, \mathbf{v}_0) \rightarrow 0$ при $\boldsymbol{\epsilon} \rightarrow \boldsymbol{\epsilon}_0$, $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}_0$. Основанием для такого определения является стремление скачка $\mathbf{E} \equiv \mathbf{v} \cdot [\nabla \otimes \boldsymbol{\epsilon}]$ нормальной производной тензора деформаций к бесконечности при $c \rightarrow 0$, что соответствует превращению волн слабого разрыва в стационарный сильный разрыв (поверхность локализации деформаций [6]).

Необходимое условие экстремума скорости $c_2^2(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{v})$ с учетом равенства $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1$ записывается в виде:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{B} = S_2 \{ \varphi \mathbf{N}^2 - (\hat{\alpha}_p \mathbf{I} + \alpha_s \mathbf{N})^2 \} + \zeta (\mathbf{N}^2 - 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{v})^2 \mathbf{N}) \quad (4.6)$$

Если все собственные числа тензора \mathbf{B} различны, то \mathbf{v} – однозначно определенный

(с точностью до направления) собственный вектор \mathbf{B} . В этом случае экстремальные значения скорости равны $\rho c_2^2 = M$, при $Q \geq 0$, $\rho c_2^2 = M + 2Q$, при $Q < 0$. Отсюда следует, что реологическая неустойчивость наступает при условии

$$(\alpha_s^2 / \beta - \varphi^*) J = \alpha_s^2 f(I_1) / \beta \quad (4.7)$$

Пусть N_1, N_2, N_3 – собственные числа тензора \mathbf{N} . Тогда если параметры материала и деформированное состояние удовлетворяют неравенствам

$$2G - \alpha_s^2 / \beta < 0, \quad N_1 \notin (N_1^-, N_1^+)$$

или

$$2G - \alpha_s^2 / \beta > 0, \quad N_1 \in (N_1^-, N_1^+)$$

$$N_1^\pm(I_1) = \left(-\frac{\hat{\alpha}_p \alpha_s}{\beta} \pm \sqrt{\hat{K} \frac{\alpha_s^2}{\beta} + 2G \frac{\hat{\alpha}_p^2}{\beta} - 2G\hat{K}} \right) / \left(\frac{\alpha_s^2}{\beta} - 2G \right)$$

$$\hat{K} = K - 2G\alpha_s \hat{\alpha}_p(I_1) f(I_1) / (\alpha_s^2 - 2G\beta)$$

то величина $\varphi^*(N_1, I_1)$ определяется выражением

$$\varphi^* = \left\{ \hat{K} + \frac{4}{3}G - \frac{1}{\beta} (\hat{\alpha}_p + \alpha_s N_1)^2 \right\} / (2/3 - N_1^2) \quad (4.8)$$

причем $\varphi^* < 2G$ при всех $I_1 \in (I_1^-, I_1^+)$ и $N_1^2 \leq 2/3$.

Если же $2G - \alpha_s^2 / \beta < 0$, $N_1 \in (N_1^-, N_1^+)$, то величина

$$\varphi^* = 2G \quad (4.9)$$

т.е. реологическая неустойчивость наступает при больших значениях поврежденности по сравнению с предыдущим случаем.

В случае $2G - \alpha_s^2 / \beta > 0$, $N_1 \notin (N_1^-, N_1^+)$ рассматриваемая форма реологической неустойчивости отсутствует.

При различных собственных числах \mathbf{B} реологическая неустойчивость реализуется в форме *плоскостей отрыва (уплотнения)*, на которых локализуются нормальная компонента тензора деформаций.

Если два собственных числа тензора \mathbf{B} совпадают (например, $B_2 = B_3$), то кроме вектора \mathbf{v} , коллинеарного первой главной оси \mathbf{e}_1 , решением (4.6) является вектор, принадлежащий плоскости, перпендикулярной \mathbf{e}_1 . Причем в случае $N_2 = N_3$ этот вектор может быть любым. При $N_2 \neq N_3$ компоненты нормали удовлетворяют равенствам

$$v_2^2 = \{1 + \zeta^{-1} S_2(\eta N_1 - 2\xi) / (N_2 - N_3)\} / 2, \quad \gamma_3^2 = 1 - v_2^2 \quad (4.10)$$

В случае реологической неустойчивости, когда $c_2 \rightarrow 0$ и, следовательно, $S_2 \rightarrow -M(\varphi)$, соотношения (4.10) превращаются в равенства, определяющие v_2 и v_3 как функции параметров материала, критических значений I_1, J и нормированного девиатора \mathbf{N} . Реологическая неустойчивость, как и ранее, наступает при условии (4.7), однако в отличие от соотношений (4.8), (4.9), выражение для φ^* имеет достаточно громоздкий вид. Формой проявления данного вида реологической неустойчивости являются *плоскости сдвига*, на которых локализуются как сдвиговая, так и нормальная компоненты тензора деформаций. Скачок нормальной компоненты связан с дилатансией (компак-

тированием) и является менее интенсивным по сравнению со скачком сдвиговой составляющей.

При шаровом тензоре \mathbf{B} , соответствующем одноосной деформации ($N_1 = \pm\sqrt{2/3}$, $N_2 = N_3 = \mp 1/\sqrt{6}$), скорость c_2 достигает экстремального значения при ν , принадлежащей поверхности кругового конуса с углом полураствора ϑ , таким что

$$\sin^2 \vartheta = 1/2 + (2\sqrt{6}\xi + \eta)S_2 / 6\zeta \quad (4.11)$$

В этом случае деформации локализуются на поверхности конуса с нормалью ν , определяемой формулой (4.11) при $S_2 = -M(\varphi)$.

Таким образом, реологическая неустойчивость, связанная лишь с уравнениями состояния среды и текущими деформациями, может трактоваться как зарождение макро-разрывов, а условия реологической неустойчивости – как критерий прочности материала. Наступление неустойчивости сильно зависит от вида деформированного состояния, характеризующего нормированным девиатором тензора деформаций \mathbf{N} . Условия неустойчивости, в соответствии с (4.7), представляют собой кривые на плоскости (I_1, J) , подобные границе упругой области $J = f(I_1)$ с коэффициентом подобия, зависящим от характеристик материала и деформированного состояния. Отсюда следует, в частности, что при чисто гидростатическом растяжении (сжатии) неравенство $I_1^- < I_1 < I_1^+$ определяет не только границу упругого состояния, но и служит критерием макроразрушения.

5. Задача об обрушении полости. Рассмотрим сферически-симметричную задачу о деформировании, накоплении поврежденности и потере устойчивости начально-изотропного, однородного, пористого материала в окрестности сферической полости радиуса a . На бесконечности материал гидростатически нагружен давлением $p_\infty = \text{const}$, на поверхности полости – давлением p_0 . Будем использовать изотермическое приближение, поврежденность будем характеризовать скалярным параметром ω . При описании поведения среды воспользуемся в дальнейшем потенциалами (2.5), (2.6). Деформации будем считать малыми. Выберем сферическую систему координат (r, φ, θ) , начало которой совпадает с центром полости. Пусть $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$ – вектор перемещения частицы, $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_\theta$ – физические компоненты тензора напряжений, $\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_\theta$ – компоненты тензора малых деформаций, s_r, s_φ, s_θ – компоненты девиатора тензора напряжений. В силу сферической симметрии имеют место равенства $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$, $s_\varphi = s_\theta$, $\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta$. С учетом выражений $\varepsilon_r = du/dr$, $\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta = u/r$, из которых следует, что $I_1 = u' + 2u/r$, $J = \sqrt{2/3} |u' - u/r|$, уравнение равновесия может быть записано в виде

$$\partial p / \partial r = \partial s_r / \partial r + 3s_r / r \quad (5.1)$$

где $p = -\sigma : \mathbf{I}/3$ – давление, $-p + s_r = \sigma_r$. Граничные условия для (5.1) имеют вид

$$\sigma_r \rightarrow -p_\infty, \quad r \rightarrow \infty \quad (5.2)$$

$$\sigma_r = -p_0, \quad r = a \quad (5.3)$$

Из соотношения для тензора напряжений (2.7) и выражения для параметра поврежденности в активном процессе (2.8) получим

$$p = -\left(K - \frac{\alpha_p \hat{\alpha}_p}{\beta} \right) I_1 + \frac{\alpha_s \hat{\alpha}_p}{\beta} J - \frac{\gamma \hat{\alpha}_p}{\beta} \quad (5.4)$$

$$s_r = -2s_\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \left(2G - \frac{\alpha_s^2}{\beta} \right) J - \frac{\alpha_s \alpha_p}{\beta} I_1 + \frac{\gamma \alpha_s}{\beta} \right\}$$

Будем аппроксимировать границу упругой области $J = f(I_1)$ кусочно-линейной функцией

$$J = \begin{cases} J_0(1 - I_1 / I_1^+), & I_1^* \leq I_1 \leq I_1^+ \\ J_1(1 - I_1 / I_1^-), & I_1^- \leq I_1 \leq I_1^* \end{cases} \quad (5.5)$$

$$J_1 \equiv J_0(1 - I_1^* / I_1^+) / (1 - I_1^* / I_1^-)$$

Тогда из условия начала активного процесса $\omega(I_1, J) = 0$ получим

$$\hat{\alpha}_p = \begin{cases} \alpha_s J_0 / I_1^+ \equiv \alpha_p^+, & I_1^* \leq I_1 \leq I_1^+ \\ \alpha_s J_1 / I_1^- \equiv \alpha_p^-, & I_1^- \leq I_1 \leq I_1^* \end{cases}$$

т.е. коэффициент $\hat{\alpha}_p$ в данном случае является кусочно-постоянной функцией I_1 , что позволяет получить аналитическое решение рассматриваемой задачи. Выражение для параметра повреждаемости ω может быть записано в виде

$$\omega = (\alpha_p^\pm I_1 + \alpha_s J - \gamma^\pm) / \beta, \quad \gamma^+ \equiv \gamma, \quad \gamma^- \equiv \gamma J_1 / J_0 \quad (5.6)$$

Из соотношений (5.4), (5.6) следует уравнение для радиального перемещения

$$u'' + 2 \frac{u'}{r} - 2m \frac{u}{r^2} + \frac{n}{r} = 0 \quad (5.7)$$

$$m = \begin{cases} 1 + 3 \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\alpha_p^\pm \alpha_s / \beta}{\lambda + 2G - \alpha_\pm^2 / \beta}, & u' - u/r > 0 \\ 1 - 3 \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\alpha_p^\pm \alpha_s / \beta}{\lambda + 2G - \alpha_\pm^2 / \beta}, & u' - u/r < 0 \end{cases}$$

$$n = \begin{cases} 3 \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\alpha_s \gamma^\pm}{\beta} \frac{1}{\lambda + 2G - \alpha_\pm^2 / \beta}, & u' - u/r > 0 \\ -3 \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\alpha_s \gamma^\pm}{\beta} \frac{1}{\lambda + 2G - \alpha_\pm^2 / \beta}, & u' - u/r < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_\pm = \alpha_p^\pm + \alpha_s \sqrt{2/3}$$

Общим решением уравнения (5.7) является

$$u(r) = Ar^{q_1} + Br^{q_2} + \frac{n}{2(m-1)} r, \quad q_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{8m+1}) / 2 \quad (5.8)$$

В области упругого состояния материала, когда $\omega = 0$, величины $m = 1$, $n = 0$, общее решение (5.7) имеет вид

$$\dot{u}(r) = 1/3 A_e r - B_e / r^2 \quad (5.9)$$

Предположим, что при достаточно больших r материал находится в упругом состоянии. Тогда, удовлетворяя граничному условию на бесконечности (5.2), находим, что $A_e = -p_\infty / K$, откуда

$$\dot{u}(r) = -p_\infty r / 3K - B_e / r^2 \quad (5.10)$$

Если перепад давлений $\Delta p = p_\infty - p_0$ достаточно мал, то рассеянное разрушение в материале отсутствует. В этом случае, с учетом граничного условия на поверхности по-

лости (5.3), упругое решение имеет вид

$$\dot{u}(r) = -\frac{p_\infty}{3K} r - \frac{\Delta p a^3}{4G} \frac{1}{r^2}, \quad \sigma_r^\circ(r) = -p_\infty + \Delta p \frac{a^3}{r^3}$$

Из условия $\omega = 0$ начала активного процесса и выражения (5.6) получим, что процесс накопления поврежденности на границе полости $r = a$ начнется тогда, когда абсолютная величина перепада давлений $|\Delta p|$ достигнет критического значения

$$|\Delta p^*| = \begin{cases} \frac{4G\gamma^+}{\sqrt{6}\alpha_s} \left(1 + \frac{p_\infty}{KI_1^+}\right), & KI_1^* < -p_\infty < KI_1^+ \\ \frac{4G\gamma^-}{\sqrt{6}\alpha_s} \left(1 + \frac{p_\infty}{KI_1^-}\right), & KI_1^- \leq -p_\infty \leq KI_1^* \end{cases}$$

Если $|\Delta p| > |\Delta p^*|$, то будем предполагать, что поврежденный материал занимает область $a \leq r \leq b$, где b — неизвестный радиус границы области накопления поврежденности. Вне этой области, при $r > b$, материал находится в упругом состоянии, что соответствует $\omega \equiv 0$. При этом считается, что характер напряженно-деформированного состояния, определяемый значением I_1 и знаком выражения $u' - u/r$, не меняется во всей области поврежденности.

Из граничного условия на поверхности полости, условий непрерывности перемещений и радиальных напряжений и соотношения $\omega = 0$ на границе $r = b$ области поврежденного материала получим следующую систему уравнений для нахождения неизвестных A, B, B_e, b :

$$\begin{cases} F(q_1)A + F(q_2)B = -p_0 - Gg_1 \\ Ab^{q_1-1} + Bb^{q_2-1} + B_e/b^3 = g_2 \\ F(q_1)Ab^{q_1-1} + F(q_2)Bb^{q_2-1} - 4\mu B_e/b^3 = -p_\infty - Gg_1 \\ \Psi(q_1)Ab^{q_1-1} + \Psi(q_2)Bb^{q_2-1} = 0 \end{cases}$$

$$F(x) = (\lambda + 2G)x + 2\lambda - \alpha_\pm \Psi(x), \quad \Psi(x) = (\alpha_\pm x + \tilde{\alpha}_\pm) / \beta, \quad \tilde{\alpha}_\pm = 2\alpha_p^\pm - \sqrt{2/3}\alpha_s$$

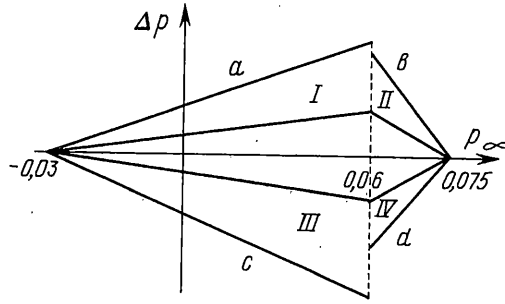
$$g_1 = \frac{3Kn}{2G(m-1)}, \quad g_2 = -\frac{p_\infty}{3K} - \frac{n}{2(m-1)}$$

Из этой системы следует уравнение для радиуса границы области поврежденного материала b :

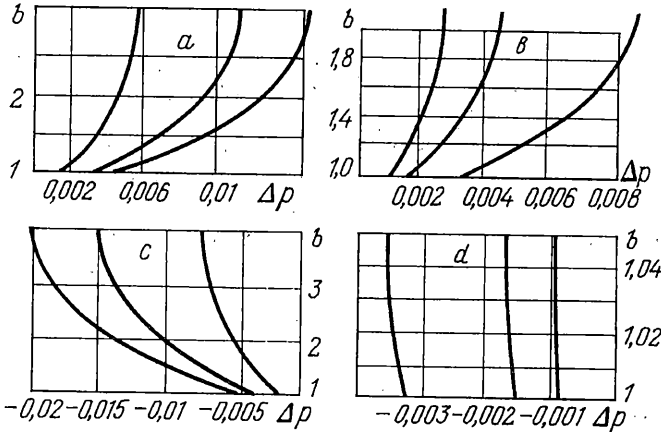
$$F(q_1)t_1 b^{1-q_1} + F(q_2)t_2 b^{1-q_2} = -p_0 - Gg_1 \quad (5.11)$$

$$t_1 = \frac{\Psi(q_2)(-p_\infty - Gg_1 + 4Gg_2)}{\Psi(q_2)(F(q_1) + 4G) - \Psi(q_1)(F(q_2) + 4G)}, \quad t_2 = -\frac{\Psi(q_1)}{\Psi(q_2)} t_1$$

В общем случае трансцендентное уравнение (5.11) требует численного решения. При расчетах использовались следующие параметры материала: $K/G = 3$, $\alpha_s/G = 1,42$, $\beta/G = 1$, граница упругой области $J = f(I_1)$ определялась величинами $I_1^+ = 0,01$; $I_1^- = -0,025$; $I_1^* = -0,02$; $J_0 = 0,001$. Условия $I_1^- \leq I_1 \leq I_1^*$, $I_1^* \leq I_1 \leq I_1^+$, определяющие значение коэффициента $\hat{\alpha}_p$, характеризуют процесс накопления поврежденности, сопровождающийся явлениями дилатансии и компактирования соответственно. Соотношения $u' - u/r > 0$, $u' - u/r < 0$ определяют преобладание радиального или бокового удлинения материала. Указанные неравенства однозначно определяют параметры m и n , входящие в уравнение (5.11). Таким образом, эти неравенства в сочетании с непрерывностью изменения решения при переходе материала из упругого



Фиг. 2



Фиг. 3

состояния в поврежденное приводят к разбиению внешности упругой области на плоскости $(p_\infty, \Delta p)$ на четыре подобласти (фиг. 2), в каждой из которых существует единственное решение. На фиг. 3, $a - 3, d$ представлены зависимости радиуса b границы поврежденного материала от величины перепада приложенных давлений Δp , которые соответствуют областям I–IV на фиг. 2.

Полученные решения обладают следующей особенностью: $db/\partial(\Delta p) \rightarrow \infty$ при $b \rightarrow b_*$, причем постоянная величина.

$$b_* = \left[\frac{F(q_1)(q_1 - 1)\psi(q_2)}{F(q_2)(q_2 - 1)\psi(q_1)} \right]^{1/q_1 - q_2} \quad (5.12)$$

является характеристикой нагружения, независящей от приложенного давления Δp . Этот результат можно трактовать как обязательное обрушение полости при достижении радиусом b критического значения b_* .

Обрушение является следствием перехода материала в неустойчивое состояние. Действительно, используемое выше определение реологической неустойчивости приводит к следующему условию: $c(r, b, \Delta p) = 0$ при $r = a$, где c – максимальная скорость распространения поверхности слабого разрыва, определяемая соотношением

$$\rho c^2 = G - \frac{1}{2} \frac{\alpha_s \omega}{J} \quad (5.13)$$

Величина b , являющаяся решением уравнения (5.13), не зависит от Δp и совпадает со

значением b_* , определенным формулой (5.12). Следовательно, условие реологической неустойчивости является критерием прочности материала.

Таким образом, в зависимости от величин давлений p_∞, p_0 возможны следующие процессы деформирования: если перепад давлений мал, т.е. если $|\Delta p| < |\Delta p^*|$, то разрушение в материале отсутствует. Если же $|\Delta p^*| \leq |\Delta p| < |\Delta p(b_*)|$, то поврежденный материал занимает область $a \leq r \leq b(\Delta p)$, вне этой области материал находится в упругом состоянии. Наконец, при $|\Delta p| > |\Delta p(b_*)|$ происходит обрушение полости.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 97-05-65607, 96-05-64347).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Николаевский В.Н. Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984. 232 с.
2. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 С.
3. Кондауров В.И. Континуальное разрушение нелинейно-упругих тел // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 302–310.
4. Кондауров В.И., Никитин Л.В. Теоретические основы реологии и геоматериалов. М.: Наука, 1990. 206 с.
5. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1920. V. 221. P. 163–198.
6. Rudnickiy J.W., Rice J.R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials // J. Mech. and Phys. Solids. 1975. V. 23. № 6. P. 371–394.

Москва

Поступила в редакцию
23.02.1998