

УДК 534.015

© 2000 г. А.Б. БАЗИЯН

О ДИНАМИКЕ ДВУХМАССОВОГО ПРЫГУНА

Рассматривается движение двух тяжелых материальных точек, расположенных вертикально, соединенных идеальной пружиной, движущихся в области, ограниченной снизу горизонтальной плоскостью. Изучаются все возможные режимы движения такой системы, условия, при которых происходит эволюция системы, результаты эволюции – предельные режимы движения, характер изменения эволюции при изменении конструкционных параметров системы.

Двухмассовым прыгуном назовем механическую систему, состоящую из двух материальных точек, соединенных идеальной пружиной и движущихся вдоль вертикали в поле тяжести в области, ограниченной снизу горизонтальной плоскостью (фиг. 1).

Если нижняя точка (нога) находится над горизонтальной плоскостью (опорой) (фаза полета), то центр массы системы движется по инерции, а каждая из точек совершает относительно него колебательное движение. Если же нога находится на опоре (фаза опоры), то верхнее тело (корпус) колеблется около своего положения равновесия. Движение системы состоит из чередующихся фаз полета, ударов и опорных фаз. На фиг. 2 показана примерная зависимость координат от времени.

Исследование данной системы было начато в [1] в связи с построением перелетов, выход на связь при которых осуществлялся бы без удара. Исследование безударных движений было обобщено и продолжено в [2], где показана полуустойчивость безударных движений в системах с двумя степенями свободы, а также дана оценка размера области притяжения для двухмассового прыгуна по первому приближению. В данной работе дается полное описание системы двухмассовый прыгун, полученное численно и аналитически на основе теорем из [2], исследован на качественном уровне характер движения системы при различных конструкционных параметрах, уточнены размеры областей притяжения к безударным движениям.

1. Уравнения движения. Направим ось абсцисс вертикально вверх и свяжем начало отсчета с опорой. Обозначим через x_1 – координату нижнего тела (ноги), x_2 – координату верхнего тела (корпуса), m_1 и m_2 – их массы, $M = m_1 + m_2$ – массу всей системы, k – жесткость пружины, l_0 – длину недеформированной пружины, g – ускорение свободного падения.

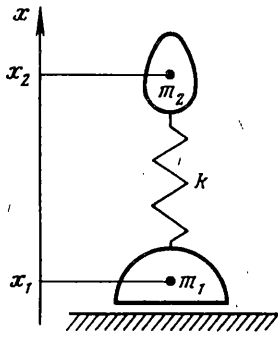
Уравнения Лагранжа имеют вид

$$\ddot{x}_1 + g - \frac{k}{m_1}(x_2 - x_1 - l_0) = \frac{R}{m_1}, \quad \ddot{x}_2 + g + \frac{k}{m_2}(x_2 - x_1 - l_0) = 0 \quad (1.1)$$

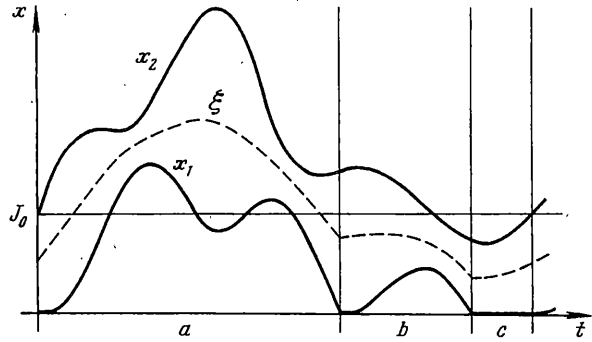
где R – реакция связи: $R \neq 0 \rightarrow x_1 = \dot{x}_1 = \ddot{x}_1 = 0$.

2. Фаза движения на опоре. Пусть в некоторый момент времени нога покоится на опоре. Для того чтобы она и далее находилась на опоре, необходимо и достаточно, чтобы сумма активных сил, действующих на нижнее тело, была неположительна. Данное условие можно переписать в виде:

$$\frac{k}{m_1}(x_2 - l_0) - g \leq 0 \quad (2.1)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

При выполнении (2.1) нога будет покоиться на опоре, а корпус – совершать колебательные движения вокруг положения равновесия. При этом система имеет единственную степень свободы, и ее можно исследовать на фазовой плоскости вплоть до отрыва ноги от опоры (если таковой произойдет). Обозначим через J кривую на фазовой плоскости, на которой происходит отрыв ноги от опоры. Ее уравнением будет [2]:

$$J(x_2, \dot{x}_2) = \frac{k}{m_1}(x_2 - l_0) - g = 0 \quad (2.2)$$

или

$$x_2 = J_0 = m_1 g / k + l_0 \quad (2.3)$$

Заменяя равенства (2.2), (2.3) неравенствами (или), получим формулы для областей J^+ и J^- соответственно. Назовем область J^+ областью схода со связи. Итак, система будет оставаться на фазовой плоскости ($\dot{x}_1 = 0, x_1 = 0$) до тех пор, пока фазовая кривая лежит в области $J^- \cup J$.

В опорной фазе система обладает интегралом энергии

$$h = m_2 \dot{x}_2^2 / 2 + m_2 g x_2 + \frac{1}{2} k (x_2 - l_0)^2 \quad (2.4)$$

При малых значениях энергии вся фазовая траектория будет лежать в J^- и схода со связи не произойдет. Действительно, в момент отрыва из (2.2) для фазовых координат имеем

$$x_1 = 0, \quad \dot{x}_1 = 0, \quad x_2 = J_0 \quad (2.5)$$

В силу независимости координат точек системы в момент отрыва от начальных условий, потенциальная энергия данной системы в момент отрыва также не зависит от начальных условий и равна

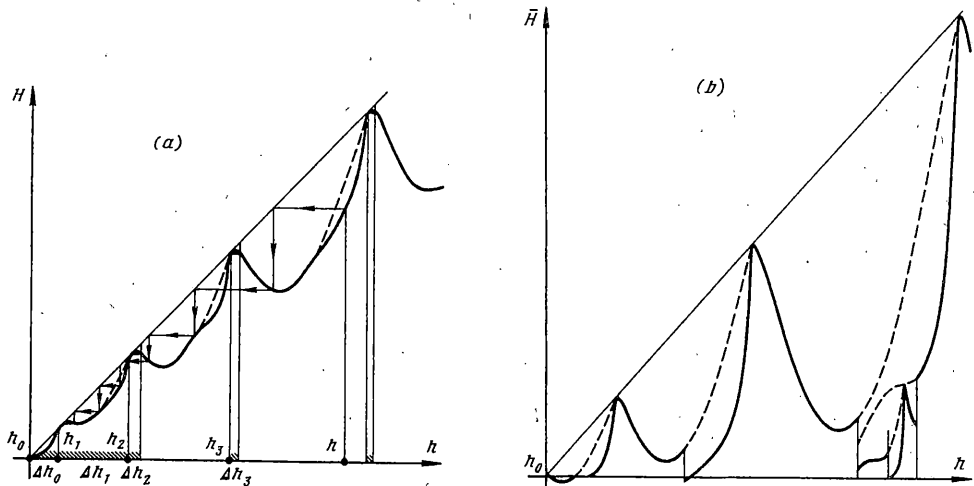
$$P_0 = \frac{g^2}{2k} (M^2 - m_2^2) + m_2 g l_0 \quad (2.6)$$

Таким образом, сход со связи произойдет при условии $h \geq P_0$. При $h = P_0$ система все время остается на опоре, но уже существуют мгновения, когда реакция связи равна нулю.

Отметим также, что физически возможны лишь такие движения, для которых значение x_2 больше неотрицательной величины, соответствующей полностью сжатой пружине [3].

3. Фаза полета. В полете система имеет две степени свободы. Обозначим: ξ – координата центра масс (ЦМ), η – деформация пружины

$$\xi = (m_1 x_1 + m_2 x_2) / M, \quad \eta = x_2 - x_1 - l_0 \quad (3.1)$$



Фиг. 3

Тогда из (1.1) получим

$$\ddot{\xi} = g, \quad \ddot{\eta} + \omega^2 \eta = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{Mk}{m_1 m_2}} \quad (3.2)$$

Иными словами, в полете ЦМ движется как тяжелая частица, а нога и корпус совершают колебания вокруг ЦМ (фиг. 2, а).

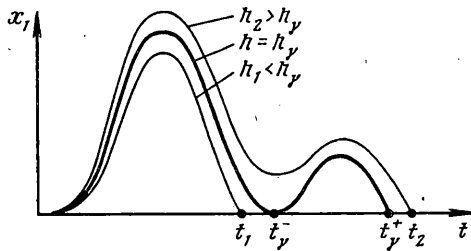
Каждое из уравнений (3.2) обладает интегралом энергии

$$h_{\xi} = \frac{M\dot{\xi}^2}{2} + Mg\xi, \quad h_{\eta} = \frac{m_1 m_2}{M} \frac{\dot{\eta}^2}{2} + \frac{k\eta^2}{2}$$

Таким образом, после отрыва от опоры полная механическая энергия системы в полете $h = h_{\xi} + h_{\eta}$ сохраняется и равна энергии системы в опорной фазе. Поскольку энергия системы в полете при фиксированных конструктивных параметрах зависит только от скорости корпуса в момент отрыва x_2 (остальные фазовые координаты фиксированы, см. (2.5)), которая, в свою очередь, однозначно определяется энергией системы в опорной фазе, то константа энергии полностью определяет движение системы до момента удара.

4. Переход в опорную фазу. Кривая энергии. В силу параболического закона движения ЦМ системы, фаза полета непременно закончится выходом на связь, который в общем случае сопровождается ударом. В результате происходит мгновенная диссипация энергии. Здесь и далее будем считать удар абсолютно неупругим. Это означает, что после удара фазовая точка попадает на фазовую плоскость ($x_1 = 0, \dot{x}_1 = 0$). Останется ли далее фазовая точка на плоскости (в опорной фазе), зависит от того, в какую область она попадет: если фазовая точка попадет в область J^+ , то произойдет мгновенный сход со связи и система снова окажется в фазе полета вплоть до следующего удара (фиг. 2, в); если в область J^- , то система останется в опорной фазе (но уже с меньшей, потерянной в результате удара, энергией) (фиг. 2, с); при попадании же на кривую J дальнейшее движение зависит от знака скорости корпуса.

Если известна закономерность отображения энергии системы из одной опорной фазы в другую (следующую) после одного или серии ударов, то возможно описать полную картину движения посредством серии отображений энергии [4]. На фиг. 3, а; 3, в представлена зависимость $H(h)$ энергии после первого выхода системы в опорную



Фиг. 4

фазу от энергии до выхода при различных конструкционных параметрах системы. Штрихами обозначены части кривой, попадающие в область схода. Саму же эволюцию по энергетической кривой (фиг. 3, а) проследить весьма легко: по заданному h определяем H ; берем это H в качестве нового h и определяем новое H и т.д. Графически это эквивалентно построению диаграммы Ламерея для энергетической кривой $H(h)$.

Из фиг. 3, а; 3, в видно, что конкретный вид кривой $H(h)$ зависит от конструкционных параметров системы, однако качественно он остается неизменным.

5. Область схода. Для фазовых кривых, попавших после удара в область схода, значение энергии уже не будет полностью определять траекторию системы, поскольку не только скорость, но и координата корпуса в момент нового отрыва могут быть произвольными. Поэтому для исследования дальнейшей эволюции необходимо построить отображение F всей области J^+ в фазовую плоскость ($x_1 = 0, \dot{x}_1 = 0$). Сформулируем теорему относительно свойств отображения F [2]: траекториям, для которых напряжение связи сопровождается ударом, соответствуют точки дифференцируемости отображения F ; безударному напряжению связи с последующим попаданием в область J^- соответствуют точки непрерывности, но недифференцируемости F , точкам разрыва F соответствует случай, когда изображающая точка после безударного выхода на связь попадает в область J^+ .

Фиг. 4 иллюстрирует причины потери непрерывности F на безударных перелетах с энергией h_γ с последующим попаданием в область схода. Такая траектория касается опоры в момент t_γ^- и соударяется с ней при t_γ^+ . При энергиях системы, сколь угодно близких к h_γ , таких что $h_1 \leq h_\gamma$, момент приземления t_1 будет близок к моменту t_γ^- , а при $h_2 \geq h_\gamma$, момент приземления t_2 будет близок к моменту $t_\gamma^+ \neq t_\gamma^-$, поэтому и фазовые координаты в момент приземления будут существенно различаться. Построим эти безударные перелеты.

В момент отрыва система сходит со связи, очевидно, без удара. В силу обратимости системы на безударных участках, можно подобрать такие начальные условия, чтобы траектория была симметричной, и тогда выход на связь также будет безударным. Других безударных перелетов в этой системе нет. Пусть система находится в полете время T . Необходимым и достаточным условием симметричности траектории ($x_1(t), x_2(t)$) в обратимой системе является равенство нулю скоростей точек системы в момент $T/2$:

$$\dot{\xi}(T/2) = 0, \quad \dot{\eta}(T/2) = 0 \quad (5.1)$$

Выписав явно уравнения для ξ и η , подставив их в (5.1) и преобразовав, получим, что безударными являются траектории, начальные условия для которых удовлетворяют

уравнению

$$\operatorname{tg} \alpha = \alpha / \beta \quad (5.2)$$

$$\alpha = \frac{k}{m_1 g} \frac{\dot{x}_2}{\omega} > 0, \quad \beta = \frac{k}{m_1 g} (x_2 - l_0) \geq 1$$

Данное уравнение для каждого β имеет счетное число решений, лежащих на интервалах $\pi n < \alpha_n < \pi(n+0,5)$ ($n = 1, 2, \dots$); при этом

$$\alpha_n - \pi(n+0,5) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ и } \alpha_n - \pi n \rightarrow 0 \text{ при } \beta \rightarrow \infty \quad (5.3)$$

Для некоторого фиксированного n множество α и β , удовлетворяющих (5.2), образует непрерывную кривую, поэтому геометрическому месту точек (x_2, \dot{x}_2) , удовлетворяющих (5.2), на фазовой плоскости соответствует семейство кривых γ_n , изображенных на фиг. 5 и имеющих горизонтальные асимптоты $\dot{x}_n = (m_1 g / k) \omega \pi n$.

Поскольку траектории с начальными условиями $(x_2, \dot{x}_2) \in \gamma_n$ являются симметричными, то начальная точка отобразится в точку $(x_2, -\dot{x}_2)$, которая находится внутри области схода, что повлечет за собой повторный сход (см. фиг. 4). Согласно вышеприведенной теореме, именно на кривых γ_n отображение F терпит разрыв. Область J^+ разбивается этими кривыми на счетное число связных компонент, в каждой из которых отображение F непрерывно и продолжается по непрерывности на границу. Обозначим Γ_n^- и Γ_n^+ образ границы γ_n , построенный при помощи такого непрерывного продолжения снизу и сверху соответственно. Иными словами, траектория с начальными условиями на γ_n дважды контактирует с опорой, сначала она ее лишь касается, а потом соударяется с ней (см. фиг. 4). Обозначим Γ_n^- образ γ_n в момент касания, а Γ_n^+ – образ γ_n в момент соударения с опорой.

Из сказанного выше ясно, что Γ_n^- симметрична с γ_n относительно оси $\dot{x}_2 = 0$. Кривая Γ_n^+ построена численно. Вид кривых γ_n , Γ_n^- и Γ_n^+ показан на фиг. 5. Образ всякого участка произвольной непрерывной кривой, начинающегося на γ_n и заканчивающегося на γ_{n+1} , начнется на Γ_n^+ , закончится на Γ_{n+1}^- и будет непрерывен.

Теперь найдем множество точек, являющееся прообразом кривой схода J . Построив кривые ψ_n , такие что $F(\psi_n) \subset J$, полностью опишем топологию отображения F . Для точек, принадлежащих ψ_n в момент приземления имеем $x_1(T) = 0$, $x_2(T) = J_0$ или

$$\xi(T) = (m_2 / M) J_0, \quad \eta(T) = J_0 - l_0 \quad (5.4)$$

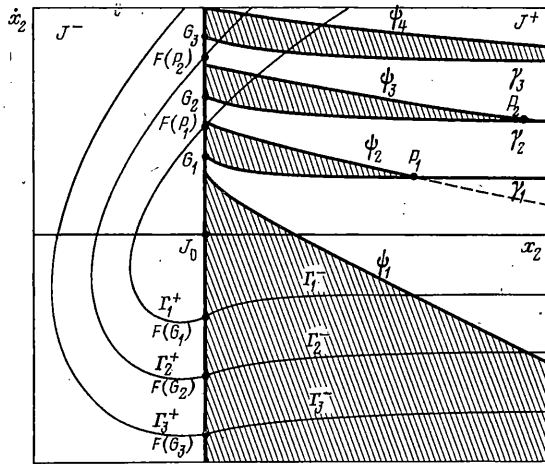
Выпишем явно решение (3.2) с начальными условиями:

$$\xi_0 = \frac{m_2}{M} x_2, \quad \dot{\xi}_0 = \frac{m_2}{M} \dot{x}_2, \quad \eta_0 = x_2 - l_0, \quad \dot{\eta}_0 = \dot{x}_2$$

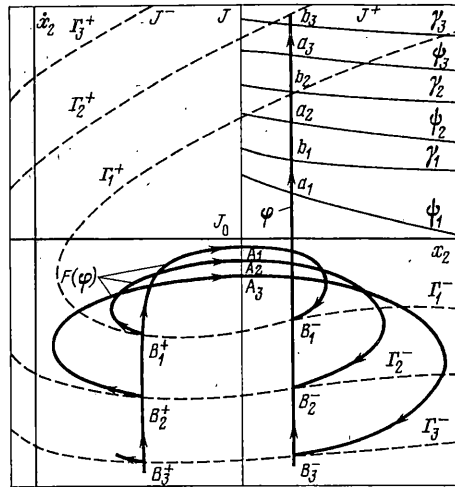
Подставим его в (5.4) и выразив x_2 и \dot{x}_2 , получим:

$$\dot{x}_2 = \frac{J_0 - l_0 - (J_0 - l_0 + 1/2 MgT^2 / m_2) \cos \omega T}{(1/\omega) \sin \omega T - T \cos \omega T}, \quad x_2 = J_0 - \dot{x}_2 T + \frac{MgT^2}{2m_2}, \quad T > 0$$

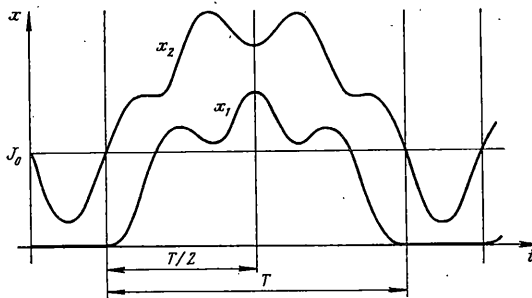
Обозначим через T_k k -й корень уравнения $(1/\omega) \sin \omega T - T \cos \omega T = 0$, а через $\psi_{k/2}^*$ – непрерывную кривую, заданную параметрически вышеприведенной формулой, где $T \in (T_{k-1}, T_k)$ ($F(\psi^*)$ будет отображаться в J только до первого пересечения ψ^* с одной из кривых γ). В точке первого пересечения ψ^* и γ отображение $F(\psi^*)$ терпит разрыв, поэтому прообразом J – множеством ψ : $F(\psi) \subset J$ является лишь часть кривой ψ^* ,



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

заклученная между прямой $x_2 = J_0$ и кривой γ . Оказывается, что ψ^* с нечетными k пересекаются с γ уже на границе области схода (отображение данных точек границы попадает на J , см. ниже), поэтому будем рассматривать ψ^* лишь с четными k ($n = k/2$).

Точка пересечения ψ_n^* с γ_{n-1} непременно существует, поскольку ψ_n^* имеет наклонную асимптоту:

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{T_{2n}}(x_2 - J_0) + \frac{Mg}{2m_2} T_{2n}$$

Отсюда, в частности, следует, что угол наклона ψ_n с увеличением n будет падать, и точка пересечения с γ_{n-1} будет отодвигаться вправо. Вид кривых ψ_n также показан на фиг. 5. Штриховкой изображены области, при отображении попадающие внутрь J . Всякая точка, лежащая ниже ψ_1 , отобразится вне области схода.

Если некоторая кривая ϕ пересекает ψ_n , то $F(\phi)$ пересечет J . На фиг. 6 для примера показано отображение прямой $x_2 = \text{const} > J_0$. Точкам пересечения ϕ с ψ_n (обозначено a_n), соответствуют образы A_n , лежащие на J . Точкам пересечения b_n кривой ϕ с γ_n соответствует два образа B_n^- и B_n^+ .

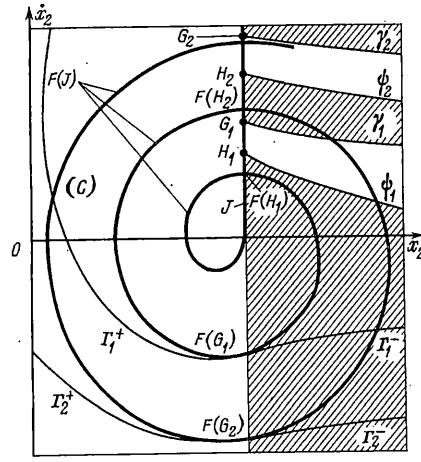
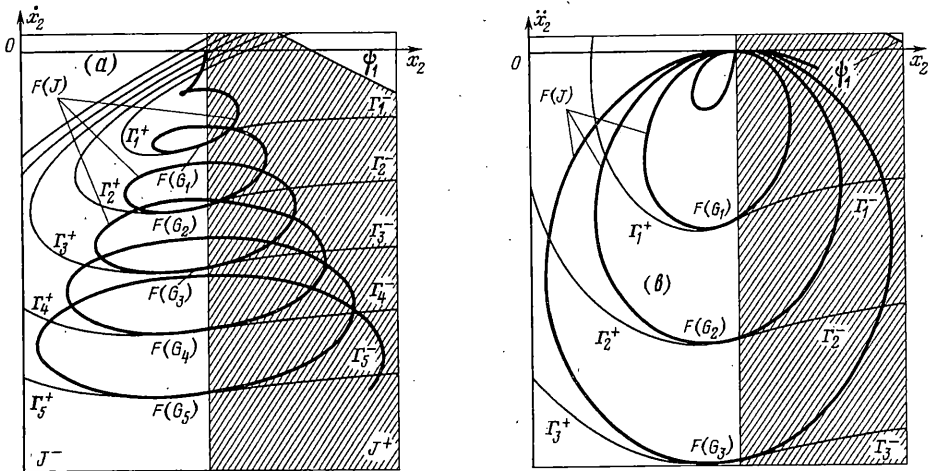
6. Граница области схода. Безударные движения. Особый интерес представляет отображение самой границы области схода $x_2 = J_0$. Однако предварительно изучим отображение $F(G_n)$ точек пересечения кривых γ_n и J , имеющих фазовые координаты $G_n = (0, 0, J_0, \dot{x}_2^n)$, где \dot{x}_2^n — n -ый корень уравнения (5.2) при $\beta = 1$; $F(G_n) = (0, 0, J_0, -\dot{x}_2^n) \in J$, причем после приземления фазовая точка попадет уже в область J^- , что следует из отрицательности скорости в момент приземления. Поскольку выход на связь осуществляется без удара, и энергия $h_n = h_n(G_n)$ сохраняется, то повторный сход произойдет в той же точке G_n и т.д. При значениях энергии, равных h_n , и начальных условиях в опорной фазе система будет совершать периодические безударные движения. Траектория системы на одном из безударных движений ($n = 3$) изображена на фиг. 7. Данным значениям на кривой энергии (фиг. 3, а; 3, в) соответствуют точки, лежащие на биссектрисе 1-ой четверти:

$$h_n = \frac{1}{2} \frac{m_1 g}{-k} Mg \alpha_n^2 + P_0 \quad (6.1)$$

Поскольку α_n при увеличении n возрастает практически в арифметической прогрессии (см. (5.3)), то h_n в формуле (6.1) будут удаляться от начала по закону, близкому к квадратичному, при этом "провис" энергетической кривой будет увеличиваться.

Замечательным является тот факт, что периодические безударные движения полустойчивы, т.е. каждой энергии безударного движения h_n соответствует значение $\Delta h_n > 0$, характеризующее размеры области притяжения к безударным периодическим движениям такое, что если в начальный момент $h_n < h < h_n + \Delta h_n$, то и в дальнейшем h останется больше h_n , и последовательность значений энергии $\{h_n^{(k)}\}$ после k -го удара будет сходиться к h_n , а фазовая траектория, оставаясь разрывной, будет асимптотически стремиться к безударной. Геометрически, на энергетической кривой, это означает, что в окрестности Δh_n функция $H(h)$ останется больше h_n , а диаграмма Ламерея будет сходиться к h_n (см. фиг. 3, а).

Подчеркнем, что энергию $h_0 = P_0$ (см. фаза движения на опоре) следует также отнести к безударным энергиям в том смысле, что она тоже имеет область полустойчивости, причем наибольшую.



Фиг. 8

В [2] приведена оценка области притяжения по первому приближению при абсолютно неупругом ударе

$$\Delta h_n < \frac{2g^2}{81} \frac{M^7}{km_1^2 m_2^3} \frac{1}{\alpha_n^2 \sin^8 \alpha_n} \quad (6.2)$$

Отметим, что размеры Δh_n уменьшаются прямо пропорционально квадрату α_n (из (5.3): $\sin \alpha_n \rightarrow 1$ при увеличении n). Поэтому точность оценки (6.2) при увеличении n возрастает.

Образ границы области схода $F(J)$ (где $\dot{x}_2 > 0$) есть непрерывная кривая, вид которой представляет собой раскручивающуюся спираль с началом в точке $(0, 0, J_0, 0)$, имеющую различную степень вытянутости вниз в зависимости от значения конструкционных параметров системы. На фиг. 8, а, в, с изображена $F(J)$, $\dot{x}_2 > 0$) для различных значений параметров ($c = 1$; фиг. 8, а: $\mu = 0,2$; фиг. 8, в: $\mu = 0,5$; фиг. 8, с: $\mu = 0,9$).

7. Конструкционные параметры системы. Система зависит от пяти параметров: m_1, m_2, k, g и l_0 ; здесь и далее параметры g и l_0 , будем считать неизменяемыми и исследуем характер изменения динамики системы при изменении значений лишь трех параметров m_1, m_2 и k . После нормирования их останется два.

n	α_n	λ_n	λ_n	μ_1	μ_2
0	0	—	0,1857	0,25	0,75
1	4,49340	0,0815	0,0847	0,09	0,91
2	7,72525	0,0424	0,0569	0,06	0,94
3	10,9041	0,0315	0,0428	0,05	0,95
4	14,0662	0,0240	0,0343	0,04	0,96
5	17,2208	0,0197	0,0286	0,03	0,97

Введем параметры: $\mu = m_1 / M$, $c = k / M$, $H = h / M$, $k = c / \mu$, $M = m_1 + m_2$.

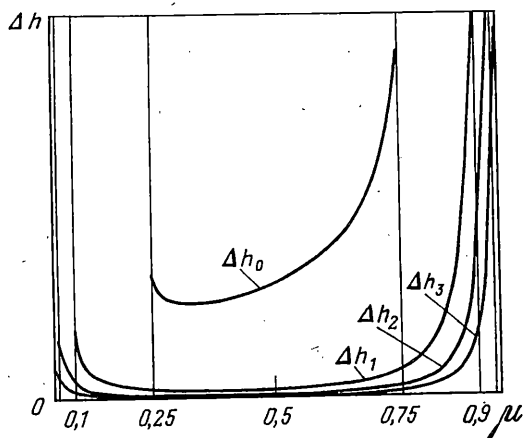
Как отмечалось выше, качественно вид кривой энергии (см. фиг. 3) и отображение области схода (см. фиг. 5) при изменении μ и c меняться не будет. Согласно (6.1), безударные энергии h_n появляются тем чаще, чем больше величина k , при этом фиг. 5 будет сжиматься по оси \dot{x}_2 , а на энергетической кривой безударные энергии будут располагаться ближе друг к другу. Величина "провиса" энергетической кривой прямо пропорциональна k и величине $\lambda = \mu(1 - \mu)$, соответственно размеры областей притяжения обратно пропорциональны им, что и видно из (6.2). Более того, при определенных значениях λ (вне зависимости от c) "провис" энергетической кривой становится настолько малым, что если энергия системы до удара больше безударной, то и после удара она останется больше нее, что означает неограниченное возрастание области притяжения Δh_n (но $\Delta h_n \leq h_{n+1} - h_n$). Данные значения λ зависят от n , поскольку, как было замечено выше, провис кривой энергии возрастает при увеличении n . Опуская вывод, приведем формулу для оценки λ_n :

$$\lambda_n \leq \frac{1}{3\alpha_n} \sqrt{\frac{2}{(2 + \cos \alpha_n) \sin^3 \alpha_n}} \quad (7.1)$$

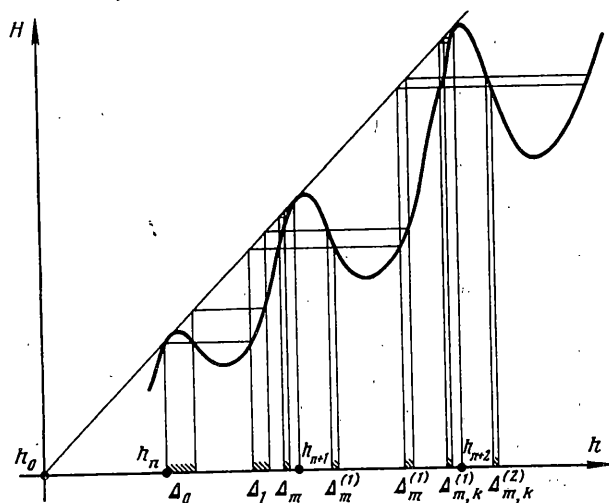
Это неравенство получено из оценки максимальной скорости ноги в момент удара. Каждому λ_n соответствует два значения μ_n^1 и $\mu_n^2 = 1 - \mu_n^1$ ($\lambda_n = \mu_n^1 \mu_n^2$), такие что при $\mu < \mu_n^1$ или $\mu > \mu_n^2$ область притяжения n -го безударного движения неограниченно возрастает. В таблице приведено сравнение (7.1) с результатами численного моделирования λ_n^* . На фиг. 9 показан характер изменения размеров областей притяжения при изменении μ и фиксированной жесткости пружины c .

Также существенными оказываются значения конструкционных параметров для отображения границы области схода $F(J)$. На фиг. 8, *a, в, с* видно, что степень вытянутости вниз $F(J)$ тем больше, чем меньше величина μ . В частности, при $\mu \leq 0,47$ ($\forall c$) спираль $F(J)$ целиком будет лежать ниже ψ_1 , поэтому если фазовая точка и окажется в области схода после одного удара, то после второго удара она непременно окажется в опорной фазе. С возрастанием μ вероятность повторного отображения в область схода возрастает (см. фиг. 8, *с*). Тем не менее, всякая серия отображений непременно закончится выходом на связь. Это следует из того, что, лишь при безударных движениях $\Delta H^k = 0$ (где ΔH^k — потеря энергии при k -ом ударе), и лишь при движениях асимптотических к безударным $\Delta H^k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, при всех остальных движениях потери энергии не малы, поэтому либо энергия системы попадет в область притяжения одной из безударных энергий, либо ее значение станет меньше P_0 .

8. Дополнительные компоненты областей притяжения. Финальные состояния. Зафиксируем некоторое c и μ . Данные значения параметров однозначно определяют на



Фиг. 9



Фиг. 10

оси энергии системы множество интервалов $\Omega_1 = \{\Delta h_n\}$, Δh_n — область притяжения к n -ому безударному движению, таких, что если в начальный момент энергия системы равна h и $h \in \Omega_1$, то фазовая траектория системы будет асимптотически стремиться к непрерывной фазовой траектории безударного периодического движения. Однако, может так случиться, что энергия h , будучи не принадлежащей множеству Ω_1 в начальный момент, попадет туда с течением времени [3]. Обозначим множество всех точек на оси энергии, приводящих $h(t)$ с течением времени в Ω_1 через Ω_2 . Это множество представляет собой систему отрезков.

Исследуем более подробно Ω_2 . Зафиксируем некоторую безударную энергию h_n . Рассмотрим вначале участок энергетической кривой $h_n < h < h_{n+1}$, фиг. 10 (фиг. 10 имеет для большей наглядности схематичный характер с искажением пропорций). Область притяжения к безударной энергии h_n представляет собой интервал $\Delta_0 = \Delta h_n = (h_n, h_n + \Delta h_n) \in \Omega_1$, причем $H(h_n + \Delta_0) = h_n$. Прообраз множества Δ_0 при отображении H содержит еще одну компоненту (фиг. 10):

$$\Delta_1 = H^{-1}(\Delta_0) \setminus \Delta_0 \quad (8.1)$$

Если $h \in \Delta_1$, то движение имеет следующий вид: после первого перелета и напряжения связи значение энергии попадает в интервал Δ_0 , а затем остается в нем вечно, асимптотически приближаясь к h_n .

Аналогично определяется счетное множество Δ_m других компонент области притяжения из интервала $h_n < h < h_{n+1}$:

$$\Delta_{m+1} = H^{-1}(\Delta_m) \cap (h_n, h_{n+1}), \quad m \in N \quad (8.2)$$

Все эти области, лежащие в интервале $h_n < h < h_{n+1}$, сходятся к точке h_{n+1} . Кроме того, поскольку минимальное значение функции $H(h)$ на следующем интервале (h_{n+1}, h_{n+2}) меньше, чем h_{n+1} , то для достаточно больших значений m области Δ_m из (8.2) имеют прообразы и в этом интервале:

$$\Delta_m^{(1)} = H^{-1}(\Delta_m) \cap (h_{n+1}, h_{n+2}) \quad (8.3)$$

(множество $\Delta_m^{(1)}$ состоит из двух интервалов).

В свою очередь, каждое из множеств $\Delta_m^{(1)}$ имеет в интервале (h_{n+1}, h_{n+2}) счетное множество прообразов, соответствующих различным степеням обратного отображения:

$$\Delta_{m,k}^{(1)} = H^{-k}(\Delta_m^{(1)}) \cap (h_{n+1}, h_{n+2}), \quad k \in N \quad (8.4)$$

и стягивающихся к точке h_{n+2} при $n \rightarrow \infty$. Далее, множества (8.4) индуцируют дополнительные компоненты области $\Delta_{m,k}^{(1)}$, лежащие в интервале (h_{n+2}, h_{n+3}) :

$$\Delta_{m,k}^{(2)} = H^{-1}(\Delta_{m,k}^{(1)}) \cap (h_{n+2}, h_{n+3}) \quad (8.5)$$

где число k достаточно велико, и т.д. Таким образом, каждая область притяжения Δh_n имеет "своих представителей" во всех интервалах (h_m, h_{m+1}) , $m \geq n$. Более того, такую разветвленную систему интервалов порождает лишь одна область притяжения Δh_n , а таких областей счетное число. Таким образом, система интервалов Ω_2 имеет весьма нетривиальную структуру.

Теперь очевидно, что при $h \notin \Omega_1 \cup \Omega_2$ система после конечного числа ударов будет колебаться на опоре вокруг положения равновесия с энергией $h \leq P_0$.

Финальными состояниями для этой системы являются все безударные движения, а также колебательное движение корпуса в опорной фазе. При этом вероятность попадания системы в одно из этих состояний зависит исключительно от размеров областей притяжения к безударным движениям, которые можно изменять, меняя конструкционные параметры системы.

Подчеркнем, что асимптотические движения к периодическим безударным движениям системы играют существенную роль в динамике данной системы, и тем самым делают более значимыми сами безударные движения, соответствующие лишь дискретным значениям энергии.

В заключение отметим, что сама жизнь приводит массу примеров моделей двухмассового прыгуна. Огромное разнообразие прыгающих живых существ (с некоторыми оговорками) можно считать двухмассовыми прыгунами. Оказывается, что не всегда прыгать – энергетически невыгодно. Режим безударных движений – это самый экономный способ преодоления преград, и, вполне возможно, что обычный воробей "знает" об этом, тем более, что масса тела воробья много больше массы его ножек, а значит и область устойчивости его безударных прыжков велика.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-01440), а также фонда INTAS (проект 96-2138).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schiehlen W., Gao J.* Simulation des stossfreien Hüpfens // ZAMM. 1989. Bd. 69. N. 5. S. 302–303.
2. *Иванов А.П.* О безударных движениях в системах с неудерживающими связями // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 3–15.
3. *Иванов А.П.* Динамика систем с механическими соударениями. М.: Международная программа образования, 1997. 336 с.
4. *Белецкий В.В.* Об относительном движении связки двух тел на орбите // Космич. исследования. 1969. Т. 7. Вып. 6. С. 827–840.
5. *Иванов А.П., Базилян А.Б.* Исследование асимптотических движений связки двух тел на круговой орбите // Космич. исследования. 1995. Т. 33. Вып. 5. С. 487–490.

Москва

Поступила в редакцию
7.03.1998