

УДК 534.121.2

© 2000 г. Л.Д. АКУЛЕНКО, С.В. НЕСТЕРОВ

### **СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОДНОРОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ МЕМБРАНЫ**

Посредством вариационных оценок, регулярных и асимптотических разложений и численных расчетов определены высокоточные значения собственных частот и форм нескольких низших мод колебаний эллиптической мембраны с закрепленной границей для всех допустимых величин эксцентриситета; построены соответствующие универсальные зависимости. Проведено сравнение с колебаниями равновеликой круговой мембраны; обнаружено свойство расщепления вырожденных частот при увеличении эксцентриситета; дана его аналитическая оценка. Установлены интересные механические свойства частот мембраны с большим эксцентриситетом. Проведен сравнительный анализ полученных результатов и известных в классических исследованиях. Разработана модификация высокоэффективного численно-аналитического метода ускоренной сходимости для определения частот и форм колебаний мембраны в случае произвольных номеров мод и значений эксцентриситета.

Задача о колебаниях однородной равномерно натянутой мембраны представляет несомненный теоретический и прикладной интерес. К ее исследованию были направлены усилия многих механиков и математиков. Одна из первых работ была выполнена в 1868 г. Э. Матье [1], который для решения соответствующих краевых задач типа Штурма – Лиувилля ввел специальные функции, впоследствии названные его именем [2–4]. Эти функции табулированы и подробно изучены во многих аналитических и вычислительных аспектах. Однако решение задачи о нахождении собственных частот и форм колебаний эллиптической мембраны нельзя считать завершенным. Это обусловлено тем, что отсутствуют достаточно простые способы вычисления значений функций Матье в зависимости от аргумента и параметра. Кроме того, что весьма важно, для рассматриваемой двумерной краевой задачи второго порядка требуется нахождение счетного множества корней системы двух трансцендентных уравнений, определяемых численно, поскольку имеет место неполное разделение переменных [3] (параметры разделения входят в оба уравнения – обычное и модифицированное уравнение Матье).

Современные ЭВМ и программное обеспечение на основе методов Рэлея – Ритца, конечных элементов и др. позволяют построить численное решение для отдельных конкретных значений параметров эллиптической мембраны при не очень больших величинах эксцентриситета и с весьма посредственной точностью. Представляет существенный интерес высокоточное численно-аналитическое определение собственных частот и форм колебаний для произвольных значений полуосей эллипса при различных дополнительных условиях, в частности, для мембран фиксированной площади или когда одна из полуосей фиксирована и т.п. Соответствующие универсальные кривые, аналогичные диаграммам Айнса – Стретта [4], характеризующие зависимость собственных значений (и частот колебаний) от величины эксцентриситета, в настоящее время отсутствуют в научной литературе. Построение этих кривых, в первую очередь для низших мод колебаний, и их анализ приводятся ниже.

**1. Постановка задачи.** Определение собственных частот и форм свободных колебаний идеальной равномерно натянутой однородной эллиптической мембраны с закрепленной границей приводится к решению самосопряженной краевой задачи вида [1–4]:

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad (x, y) \in G \setminus \partial G, \quad u|_{\partial G} = 0 \quad (1.1)$$

$$G = \{x, y: x^2 a^{-2} + y^2 b^{-2} \leq 1\}, \quad \lambda = \omega^2 \rho T^{-1}$$

Здесь  $\Delta$  – оператор Лапласа в декартовых координатах  $x, y, u = u(x, y)$  – гладкая неизвестная функция, характеризующая форму колебаний мембраны;  $\lambda$  – параметр, собственные значения которого требуется найти;  $\rho$  – поверхностная плотность,  $T$  – натяжение, предполагаемые постоянными. Частота свободных колебаний  $\omega$  и параметр  $\lambda$  связаны соотношением (1.1). Для определенности предполагается, что  $a$  – большая,  $b$  – малая полуоси эллипса – области  $G$  с границей  $\partial G$ , см. (1.1).

Традиционный способ решения задачи (1.1) связан с введением эллиптических координат  $\alpha, \varphi: (x, y) \rightarrow (\alpha, \varphi)$  и преобразованием уравнения (1.1) следующим образом [1–4]:

$$x = d \operatorname{ch} \alpha \cos \varphi, \quad y = d \operatorname{sh} \alpha \sin \varphi, \quad d = ae, \quad e = (1 - b^2 a^{-2})^{1/2} \quad (1.2)$$

$$0 \leq \alpha \leq \alpha^* = \operatorname{arch} e^{-1}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \pmod{2\pi}, \quad 0 \leq e < 1$$

$$\partial^2 u / \partial \alpha^2 + \partial^2 u / \partial \varphi^2 + \mu (\operatorname{ch}^2 \alpha - \cos^2 \varphi) u = 0, \quad \mu = \lambda d^2 > 0$$

Здесь  $e$  – эксцентриситет эллипса  $G$ ; параметр  $d$  подобран таким образом, чтобы граница  $\partial G$  при  $\alpha = \alpha^*, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$  совпала с одним из координатных эллипсов. Уравнение (1.2) допускает разделение переменных  $\alpha$  и  $\varphi$ , т.е. его решение представимо в виде мономов типа [1–4]:

$$u = A(\alpha)\Phi(\varphi), \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha^*, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (1.3)$$

где  $A, \Phi$  – искомые функции, причем  $\Phi(\varphi)$  – периодическая с периодом  $\pi$  или  $2\pi$ . После подстановки представления (1.3) в (1.2) и введения  $\chi$  – постоянной разделения переменных  $\alpha$  и  $\varphi$  – получим систему уравнений

$$A'' + (\mu \operatorname{ch}^2 \alpha - \chi)A = 0, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha^*(e) \quad (1.4)$$

$$\Phi'' + (\chi - \mu \cos^2 \varphi)\Phi = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Система (1.4) содержит два неизвестных параметра  $\mu, \chi$ , подлежащих дальнейшему совместному определению. Использование специфики уравнений (1.4) позволяет записать соответствующие исходной задаче (1.1) краевые условия в виде [1–4]:

$$A(0) = A(\alpha^*) = 0, \quad \Phi(0) = \Phi(\pi) = 0 \quad (1.5)$$

$$A'(0) = A'(\alpha^*) = 0, \quad \Phi'(0) = \Phi'(\pi) = 0 \quad (1.6)$$

Условия (1.5) определяют так называемые нечетные решения уравнения типа Матье для  $\Phi$  (1.4) и соответствующие им решения модифицированного уравнения типа Матье для  $A$ . Аналогично условия (1.6) определяют четные решения задачи. Таким образом, исходная краевая задача на собственные значения и функции типа Штурма – Лиувилля в частных производных для эллиптической области (1.1) с помощью преобразований (1.2), (1.3) сведена к краевым задачам двух видов (1.4)–(1.6) для системы связанных посредством параметров  $\mu, \chi$  двух уравнений второго порядка в обыкновенных производных.

Эти соотношения дают математический аппарат численного и аналитического решения исходной задачи. Однако следует отметить, что замена (1.2) вырождается для  $e = 0$  (в случае круговой области  $G, \partial G$  – окружность), так как  $\alpha^* = \infty$ . При  $e \rightarrow 0$  требуется осуществить аккуратный предельный переход, при котором  $d \operatorname{ch} \alpha \rightarrow ar, d \operatorname{sh} \alpha \rightarrow ar$ , где  $r$  – полярный радиус ( $0 \leq r \leq 1$ ). Уравнение (1.4) для функции  $A$  пе-

переходит в уравнение Бесселя, а в уравнении для  $\Phi$  полагается  $\mu = 0$  [3]. В результате задача для неизвестной  $\Phi$  полностью отделяется ( $\chi$  – параметр) и элементарно решается в тригонометрических функциях; дальнейший ход решения задачи для круга общеизвестен. Кроме того, из (1.2) вытекает, что при  $e \rightarrow 1$  замена также вырождается, поскольку  $\alpha^* \rightarrow 0$ , т.е. интервал изменения аргумента  $\alpha$  неограниченно сокращается. Поэтому и случай  $e \rightarrow 1$  требует внимательного асимптотического анализа решения краевой задачи, см. ниже, п. 4.

Итак, требуется разработка эффективных численно-аналитических методов высокоточного построения решения совместных краевых задач на собственные значения и функции (1.4)–(1.6) и их анализа. Интерполяционные процедуры, основанные на табулировании функций Матье, весьма трудоемки и часто неудовлетворительны при попытках провести надежные высокоточные расчеты. Подходы, связанные с формальным разделением задач для переменных  $A$  и  $\Phi$  и с априорным заданием одной из величин  $\chi$  и  $\mu$  на основе общих соображений, никак не обоснованы и послужили причиной грубых вычислительных ошибок [2, 4].

**2. Вариационный подход и построение высокоточных оценок.** Краевая задача на собственные значения и функции (1.1) эквивалентна следующей вариационной задаче [3, 5]. Требуется найти минимум функционала  $J[u]$  на классе непрерывно дифференцируемых функций  $\{u\}$ , удовлетворяющих нулевому граничному условию и условию нормировки

$$J[u] = \iint_G (\nabla u)^2 dx dy \rightarrow \min_u, \quad u|_{\partial G} = 0$$

$$I[u] = \iint_G u^2 dx dy = I_0 = \text{const} \quad (2.1)$$

Здесь  $I_0$  – фиксированная положительная величина, в частности,  $I_0 = 1$ . Если такая функция  $u_1(x, y)$  определена, то минимальное собственное значение  $\lambda_1$ , характеризующее низшую моду колебаний, равно  $\lambda_1 = J[u_1]/I[u_1]$ . Последующие собственные функции  $u_k(x, y)$  и значения  $\lambda_k$  ( $k \geq 2$ ) определяются соотношениями (2.1) и дополнительными условиями ортогональности

$$I_l[u] = \iint_G u_l(x, y) u dx dy = 0, \quad \lambda_k = \frac{J[u_k]}{I[u_k]} \quad (2.2)$$

$$(l = 1, 2, \dots, k-1; k = 1, 2, \dots)$$

Выражения (2.1), (2.2) составляют основу метода Рэлея – Ритца для построения эффективных оценок сверху  $\lambda_k^*$  собственных значений задачи (1.1), а также соответствующих им собственных функций  $u_k^*(x, y)$  [3, 5, 6]. Точность этих оценок в определенной, а зачастую в значительной, степени зависит от удачного выбора пробных функций, учитывающих специфику задачи и исследуемой моды колебаний. Неучет этих обстоятельств, как показывает вычислительная практика, послужил причиной грубых вычислительных ошибок [7] и др.

Ниже излагаются примеры весьма удачного выбора пробных функций для высокоточной оценки главного и последующих собственных значений на основе принципа Рэлея. С этой целью вместо  $(x, y)$  введем обобщенные полярные координаты  $(r, \varphi)$ :

$$x = ar \cos \varphi, \quad y = br \sin \varphi, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$r = (x^2 a^{-2} + y^2 b^{-2})^{1/2}, \quad dS = abr dr d\varphi \quad (2.3)$$

Здесь  $dS$  – элемент площади эллипса. Отметим, что система координат  $(r, \varphi)$  неортогональна; при  $r = \text{const}$  имеют место подобные эллипсы:  $e = (1 - b^2 a^{-2})^{1/2} = \text{const}$ .

Факт использования переменных  $(r, \varphi)$  вида (2.3) для исследования колебаний мембран и пластин эллиптической формы в научной литературе неизвестен.

Рассмотрим сперва случай, для которого допустимые пробные функции в обобщенных полярных координатах  $(r, \varphi)$  не зависят от угла  $\varphi$ :  $u = u(r)$ . Тогда вариационная задача (2.1) для неизвестной функции  $u(r)$  после интегрирования по  $\varphi$  приводится к виду

$$J[u] = \pi ab(a^{-2} + b^{-2}) \int_0^1 u'^2 r dr \rightarrow \min_u, \quad u = u(r) \quad (2.4)$$

$$I[u] = 2\pi ab \int_0^1 u^2 r dr = 1, \quad u(1) = 0, \quad |u(0)| < \infty$$

Выпишем соответствующее задаче (2.4) уравнение Эйлера – Лагранжа. Получим классическую задачу Штурма – Лиувилля для уравнения Бесселя нулевого порядка [3, 5, 6]:

$$r^{-1}(ru')' + \nu u = 0, \quad r(1) = 0, \quad |r(0)| < \infty, \quad \nu = 2\lambda(a^{-2} + b^{-2})^{-1} \quad (2.5)$$

Решение задачи (2.5) имеет вид  $u_{n0}(r) = c_{n0} J_0(\gamma_{n0} r)$ , где  $\gamma_{n0}$  – нули функции  $J_0(\gamma)$ . Рассмотрим, в частности, первую моду колебаний ( $n = 1$ ):

$$u_{10}(r) = c_{10} J_0(\gamma_{10} r), \quad \gamma_{10} = 2,4048, \quad \lambda_{10}^* = \frac{1}{2} \gamma_{10}^2 (a^{-2} + b^{-2}) \\ \lambda_{10}^*(e) = (\gamma_{10}^2 a^{-2})(1 - \frac{1}{2} e^2)(1 - e^2)^{-1} \approx \gamma_{10}^2 a^{-2} (1 + \frac{1}{2} e^2 + O(e^4)), \quad e \ll 1 \quad (2.6)$$

Здесь  $J_0$  – функция Бесселя нулевого порядка,  $\gamma_{10}$  – первый нуль функции  $J_0(\gamma)$ ,  $c_{10}$  – постоянная, выбираемая из условия нормировки:  $c_{10}^2 = \frac{1}{2} J_1^2(\gamma_{10})$  ( $J_1$  – функция Бесселя первого порядка). В результате получена согласно (2.6) оценка сверху первого собственного значения задачи (1.1) и отвечающая ей приближенная собственная функция, поскольку класс функций  $\{u(r)\}$  уже, чем  $\{u(r, \varphi)\}$ . Отметим, что для первого собственного значения  $\lambda_{10}^*$ , определяющего низшую частоту собственных колебаний эллиптической мембраны, получены двусторонние оценки [8, 9]:

$$\gamma_{10}^2 (ab)^{-1} \leq \lambda_{10} \leq \frac{1}{2} \gamma_{10}^2 (a^{-2} + b^{-2}) = \lambda_{10}^* \quad (2.7)$$

При  $a = b$  оценки (2.7) становятся точными, т.е. достигаются в случае круговой мембраны:  $\lambda_{10} = \gamma_{10}^2 a^{-2}$ . Из (2.7) следует, что для эллиптических мембран фиксированной площади  $S = \pi ab$  минимальной низшей частотой обладает круговая мембрана.

Вычисления показывают, что оценка сверху  $\lambda_{10}^*$  (2.6) весьма точна в широком диапазоне изменения эксцентриситета  $e$  (1.2). Зафиксируем значение полуоси  $a$ , например  $a = 1$ ; тогда  $b = (1 - e^2)^{1/2}$ ; будем изменять величину  $e$  в пределах  $0 \leq e \leq 0,9$ . Сравним оценку сверху  $\lambda_{10}^*(e)$  (2.6) и высокоточную оценку снизу  $\lambda_{10*}(e)$ , полученную численно-аналитическим методом ускоренной сходимости [10] для больших значений  $e$  с погрешностью  $10^{-5}$ . Результаты вычислений представлены в табл. 1.

Данные табл. 1 подтверждают вычислительную эффективность оценки  $\lambda_{10}^*(e)$  (2.6) для разумных значений параметра  $e$ . Отметим, что при  $e \leq 0,5$  близость  $\lambda_{10}^*(e)$  и точного значения  $\lambda_{10}(e)$  еще выше. Кроме того, если рассматривать класс эллиптических мембран фиксированной площади  $S$  для различных  $a, b$ , связанных соотношением  $S = \pi ab$ , то оценка  $\lambda_{10}^*(e)$  принимает вид

$$\lambda_{10}^* = \frac{1}{2} \pi \gamma_{10}^2 S^{-1} (2 - e^2)(1 - e^2)^{-1/2}, \quad \lambda_{10}(e) \leq \lambda_{10}^*(e)$$

Таблица 1

$e$	$\lambda_{10}^*$	$\lambda_{10}$	$\Delta\lambda/\lambda$
0,5	6,74691	6,74653	$10^{-4}$
0,6	7,40955	7,38894	$1,4 \cdot 10^{-3}$
0,7	8,56120	8,52048	$5 \cdot 10^{-3}$
0,8	10,92356	10,84783	$10^{-2}$
0,9	18,11012	17,93740	$10^{-2}$

Таблица 2

$e$	$\lambda_{11}^{*c}$	$\lambda_{11}^c$	$\Delta\lambda/\lambda$
0,5	15,9054		$10^{-4}$
0,6	16,7466		$10^{-4}$
0,7	18,2085	18,1321	$5 \cdot 10^{-3}$
0,8	21,2073	20,9461	$5 \cdot 10^{-3}$
0,9	30,3330	29,6271	$2 \cdot 10^{-2}$

Таблица 3

$e$	$\lambda_{11}^{*s}$	$\lambda_{11}^s$	$\Delta\lambda/\lambda$
0,4	16,7875	16,7722	$10^{-3}$
0,5	18,3614	18,3314	$1,2 \cdot 10^{-3}$
0,6	20,8861	20,8385	$2,2 \cdot 10^{-3}$
0,7	25,2739	25,0891	$8 \cdot 10^{-3}$
0,8	34,2746	33,7240	$1,6 \cdot 10^{-2}$
0,9	61,6536	60,6543	$2 \cdot 10^{-2}$

Она также весьма точна для указанных значений  $e$ . Рассмотренную форму колебаний  $u_{10}(r)$  по аналогии с радиально симметричными колебаниями круглой мембраны можно условно назвать эллиптикосимметричной, см. (2.3). Однако это решение приближенное, хотя и весьма точное при не очень больших значениях  $e$  ( $e \leq 0,5$ ).

Естественно, вычисление оценок сверху  $\lambda_{n0}^*(e)$ ,  $n=1,2,\dots$  собственных значений  $\lambda_{n0}(e)$  на основе корней  $\gamma_{n0}$  аналогично (2.6) приведет к росту абсолютной погрешности, которая может быть допустимой при достаточно малых значениях  $e > 0$  (относительная погрешность будет существенно меньше).

Рассмотрим теперь форму колебаний, зависящую от угловой переменной  $\varphi$  и содержащую узловую линию вдоль оси  $y$ . Для этой цели возьмем пробную функцию вида  $u(r, \varphi) = v(r)\cos\varphi$ , где  $v(r)$  – неизвестная функция из допустимого класса. После подстановки  $u$  в (2.1) и интегрирования по  $\varphi$  для  $v(r)$  получается вариационная задача типа (2.4)

$$J[v] = \pi ab \int_0^1 (A^c r v'^2 + B^c v v' + A^c r^{-1} v^2) dr \rightarrow \min_v \quad (2.8)$$

$$I[v] = \pi ab \int_0^1 v^2 r dr = 1, \quad v(1) = 0, \quad |v(0)| < \infty$$

$$A^c = \frac{3}{4} a^{-2} + \frac{1}{4} b^{-2}, \quad B^c = a^{-2} - b^{-2}$$

Соответствующая (2.8) задача на собственные значения и функции приводится к виду уравнения Бесселя первого порядка и краевым условиям; в результате

$$r^{-1}(rv')' - r^{-2}v + \nu v = 0, \quad v(1) = 0, \quad |v(0)| < \infty$$

$$\nu = \lambda / A^c, \quad \nu_{n1} = \gamma_{n1}^2, \quad J_1(\gamma) = 0, \quad \nu_{n1}(r) = c_{n1} J_1(\gamma_{n1} r) \quad (2.9)$$

Нетрудно объяснить тот факт, что задача (2.9) не содержит параметра  $B^c$  ( $\nu v' = \frac{1}{2} \nu^2$ , см. (2.8)). Решение задачи Штурма – Лиувилля (2.9) строится сходным образом, как и (2.5), (2.6). Наименьшее собственное значение  $\lambda_{11}^{*c}$  дает хорошую оценку сверху для исходной задачи

$$\lambda_{11}^c \leq \lambda_{11}^{*c} = A^c \gamma_{11}^2, \quad \gamma_{11} = 3,8317, \quad A^c = a^{-2}(1 - \frac{3}{4}e^2)(1 - e^2)^{-1} \quad (2.10)$$

В предельном случае  $a = b$  коэффициент  $A^c = a^{-2}$  и оценка  $\lambda_{11}^{*c}$  становится равной точному значению  $\lambda_{11}^c = \gamma_{11}^2 a^{-2}$ . Поскольку функция  $\nu_{11}(r) \cos \varphi$  ортогональна  $u_{10}(r)$ , то  $\lambda_{11}^{*c} > \lambda_{10}^*$  [5].

Определим теперь погрешность оценки  $\lambda_{11}^{*c}(e)$  для различных  $e$  при  $a = 1$ ,  $b = (1 - e^2)^{1/2}$ , см. выше. Эти данные приведены в табл. 2. Относительная погрешность оценки  $\lambda_{11}^{*c}(e)$  при  $e \leq 0,6$  меньше, чем  $10^{-4}$  и поэтому не приведена. Итак, из табл. 2 следует, что форма колебаний, для которой узловая линия совпадает с малой полуосью эллипса, достаточно точно описывается функцией  $\nu_{11}(r) \cos \varphi$ , а частота этих колебаний с высокой точностью может быть определена согласно (2.10) для широкого диапазона изменения эксцентриситета. Естественно, абсолютная точность ухудшается при увеличении индекса  $n$ .

Рассмотрим теперь пробную функцию вида  $u = w(r) \sin \varphi$ , для которой узловая линия совпадает с большой полуосью эллипса. Совершенно аналогичными вычислениями получаем задачу типа (2.9); оценка  $\lambda_{11}^{*s}$  имеет вид

$$\lambda_{11}^{*s} = A^s \gamma_{11}^2, \quad A^s(a, b) = A^c(b, a) = a^{-2}(1 - \frac{1}{4}e^2)(1 - e^2)^{-1}$$

$$w_{11}(r) = c_{n1} J_1(\gamma_{n1} r), \quad \lambda_{11}^{*c,s}(a, a) = \gamma_{11}^2 a^{-2} \quad (2.11)$$

Из (2.11) следует, что  $\lambda_{11}^{*s} \geq \lambda_{11}^{*c} > \lambda_{10}^*$  (это отвечает интуитивным физическим представлениям, см. ниже), причем равенство (вырождение) имеет место при  $a = b$ , т.е. в случае круговой мембраны, что очевидно; для  $e > 0$  вырождение снимается (расщепление собственных значений); при  $e \rightarrow 1$  отношение  $\lambda_{11}^{*s} / \lambda_{11}^{*c} \rightarrow 3$ . Данные расчетов согласно оценке (2.11) и численному методу ускоренной сходимости представлены в табл. 3. Оценка (2.11), как и следовало ожидать, оказалась несколько менее точной. Отметим, что отношение  $A^s/A^c \approx 2$  при  $e = 0,9$ , см. последние строки в табл. 2, 3. Из (2.10), (2.11) также следует, что (см. п. 3):

$$\lambda_{11}^{*c,s}(e) = \gamma_{11}^2 a^{-2} (1 + \frac{1}{4}e^2(2 \mp 1) + O(e^4)), \quad e \ll 1$$

Результаты вычисления указанных оценок сверху и высокоточных расчетов оценок снизу по методу ускоренной сходимости представлены для наглядности в виде графиков на фигуре. Расчеты оценок снизу (практически точные значения, их относительная погрешность менее  $10^{-5}$ ) для сравнительно больших значений  $e$  (помечены крестиками) проводились с целью контроля точности указанных высокоточных оценок сверху на основе удачного выбора пробных функций согласно принципу

Рэлея. Штриховыми линиями на фигуре представлены точные собственные значения  $\lambda_{10}^{\circ}$ ,  $\lambda_{11}^{\circ}$  круговых мембран, равновеликих по площади эллипсам  $S = \pi(1 - e^2)^{1/2}$  при данном значении  $e$ :  $\lambda_{ll}^{\circ} = \gamma_{ll}^2(1 - e^2)^{-1/2}$ ,  $l = 0, 1$ . Следует отметить, что  $\lambda_{10}^{*c} > \lambda_{10}^{\circ}$ ,  $\lambda_{11}^{*s}(e) > \lambda_{11}^{\circ}(e)$ , но кривая  $\lambda_{11}^{*c}(e)$  вначале ниже, а при достаточно больших  $e$  ( $e \geq 0,94$ , т.е.  $b/a \leq 1/3$ ) выше кривой  $\lambda_{11}^{\circ}(e)$ . Как указывалось выше, такое поведение собственных значений (и частот) представляется естественным для специалиста с развитой механической интуицией. Очевидно, что круг "более компактен", чем равновеликий эллипс, а половина круга может быть "более или менее компактной", чем соответствующая часть эллипса, при изменении эксцентриситета.

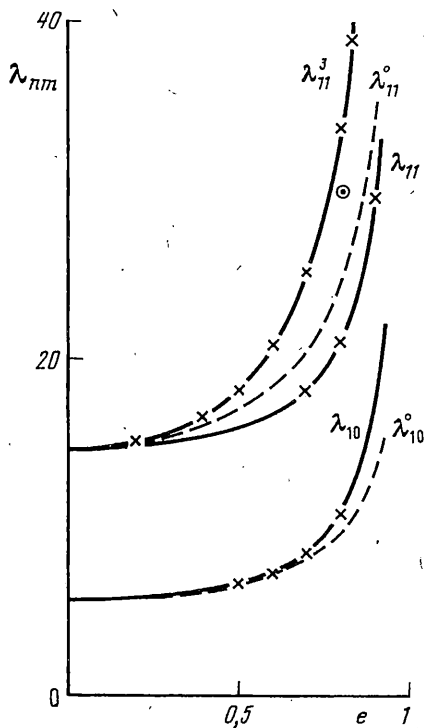
Итак, получен основной результат, заключающийся в построении универсальных кривых, определяющих высокоточные значения низших собственных частот колебаний  $\omega_{ll}^{*c,s} = (\lambda_{ll}^{*c,s} T / (a^2 \rho))^{1/2}$ ,  $l = 0, 1$  и соответствующих им форм для широкого диапазона изменения эксцентриситета  $e$ . Можно условно считать, что эти значения являются результатом линейного преобразования, зависящего от  $e$ , величин частот колебаний круговой мембраны, причем для  $e > 0$  происходит расщепление двукратно вырожденных частот, которое неограниченно растет при  $e \rightarrow 1$ .

Для проведения уверенных расчетов на основе вариационных оценок и численных методов необходимо построение приближенных аналитических выражений в зависимости от величины  $e$ . Эти выражения могут быть использованы как для контроля точности, так и для задания начальных приближений искомых величин при применении рекуррентного численно-аналитического метода ускоренной сходимости [10], см. п.5. Приближенные аналитические представления для собственных значений и функций удается эффективно построить при  $e \ll 1$  с помощью метода регулярных возмущений и при  $1 - e = \delta \ll 1$  посредством процедуры асимптотических разложений; приведем их краткий вывод.

**3. Построение приближенных аналитических выражений для собственных значений при малых величинах эксцентриситета.** Регулярные разложения искомых собственных значений и функций в зависимости от малого параметра  $\varepsilon = e^2 \ll 1$  удобнее проводить на основе вариационной трактовки задачи (2.1), (2.2). Зафиксируем величину большой полуоси эллипса  $a$ :  $a = 1$ ,  $b(\varepsilon) = (1 - \varepsilon)^{1/2}$ . Совершим замену переменных  $(x, y) \rightarrow (r, \varphi)$ ; получим задачу

$$J[u, \varepsilon] = b \int_0^1 \int_0^{2\pi} [u_r'^2 (\cos^2 \varphi + b^{-2} \sin^2 \varphi) + r^{-2} u_\varphi'^2 (b^{-2} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)] r dr d\varphi \rightarrow \min_u$$

$$I_1[u, \varepsilon] = b \int_0^1 \int_0^{2\pi} r dr d\varphi = 1, \quad I_2[u, \varepsilon] = b \int_0^1 \int_0^{2\pi} u r dr d\varphi = 0 \quad (3.1)$$



Фиг. 1

Ее приближенное решение будем строить разложениями по степеням  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = e^2$ ); в частности, при  $j = 0, 1$  имеем соотношения

$$\begin{aligned} J &= J_0 + \varepsilon J_1 + \varepsilon^2 \dots \rightarrow \min_u, & I &= I_0 + \varepsilon I_1 + \varepsilon^2 \dots = 1 \\ u &= u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 \dots, & \lambda &= \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \dots \\ J_0[u_0] &\rightarrow \min_{u_0}, & I_0[u_0] &= 1, & \lambda_0 &= \lambda_{nm}^0 = \gamma_{nm}^2 \\ u_0^c &= c_{nm} J_m(\gamma_{nm} r) \cos m\varphi, & u_0^s &= s_{nm} J_m(\gamma_{nm} r) \sin m\varphi \\ J_1[u_1] &= -\frac{1}{2} J_0[u_0] + F_1[u_0] + L_1[u_1] \rightarrow \min_{u_1}, & I_1[u_1] &= -\frac{1}{2} + H_1[u_1] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь  $F_1, L_1, I_1, H_1$  – коэффициенты при  $\varepsilon$  разложений  $J, I$  после подстановки выражения для  $u$ ; они получаются стандартным образом и не приводятся вследствие громоздкости. Отметим, что разложения условий ортогональности для дальнейших построений не потребуются. Коэффициент  $L_1[u_1]$  – линейный интегральный оператор от  $u_1, u_0^c$ ; и  $u_1^c u_0^s$  – вычисляется интегрированием по частям с учетом граничных условий при  $r = 0, 1, \varphi = 0, 2\pi$ . Затем используем условие  $I_1 = 0$  (3.2), где  $H_1$  – линейный интегральный оператор от  $u_1 u_0$ . В результате получим конечную формулу  $L_1[u_1] = \frac{1}{2} \lambda_0$ . Вычислим теперь выражение  $F_1[u_0]$ ; после элементарных преобразований тригонометрических функций получим явное выражение

$$\begin{aligned} F_1[u_0] &= \frac{1}{2} \lambda_0 + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (-u_0^c{}^2 + r^{-2} u_0^s{}^2) \cos 2\varphi r dr d\varphi = \\ &= \begin{cases} 0, & m \neq 1 \quad (m = 0, 2, 3, \dots) \\ \frac{1}{4} \lambda_{n1}^0 (2 \mp 1), & m = 1 \quad (\lambda_{nm}^0 = \gamma_{nm}^2) \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Верхний знак минус в (3.3) отвечает функции  $u_0^c$ , а плюс – функции  $u_0^s$ , см. (3.2). Подставляя полученные конечные выражения для  $L_1, F_1$ , находим искомые приближенные значения  $\lambda_{nm}^{c,s}$ :

$$\begin{aligned} \lambda_{nm}^{c,s}(e) &= \gamma_{nm}^2 + \frac{1}{2} \gamma_{nm}^2 e^2 + O(e^4) \quad (n = 1, 2, \dots, m \neq 1) \\ \lambda_{n1}^{c,s}(e) &= \gamma_{n1}^2 + \frac{1}{4} \gamma_{n1}^2 e^2 (2 \mp 1) + O(e^4) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из (3.4) следует, что при  $e > 0$  в первом приближении по  $\varepsilon = e^2$  происходит расщепление собственных значений  $\lambda_{n1}^{c,s}(e)$ , аналогичное случаю уравнения Матье [1–4]. Значения  $\lambda_{n1}^0 = \gamma_{n1}^2$ , как известно, двукратно вырождены. При  $n = 1$  выражения (3.4) совпадают с полученными в п. 2 на основе вариационных оценок. Значения  $\lambda_{nm}^{c,s}(e)$  при  $m \geq 2$  не расщепляются в первом приближении по  $\varepsilon$ ; порядок расщепления по  $\varepsilon$  будет более высоким, причем расщепления  $\lambda_{n0}(e)$  вовсе не происходит.

Отметим, что расчет по формулам (3.4) полностью соответствует вариационным оценкам табл. 1–3 и графикам на фигуре для  $0 \leq e \leq 0,5$ . С помощью метода возмущений могут быть построены следующие приближения искомых величин. Однако получающиеся выражения весьма громоздки и соответствующие расчеты по этим формулам малоэффективны. Более адекватным для проведения высокоточных массовых расчетов собственных значений  $\lambda_{nm}^{c,s}(e)$  и функций  $u_{nm}^{c,s}(r, \varphi, e)$  оказывается численно-аналитический метод ускоренной сходимости [10, 11], эквивалентный методу касательных Ньютона, в сочетании с процедурой продолжения по параметру, см. п. 5.



**4. Асимптотические разложения собственных значений для больших величин эксцентриситета.** Асимптотические приближенные выражения для собственных значений и функций удобнее проводить на основе математического аппарата краевых задач (1.4) – (1.6). Посредством элементарных преобразований функций  $\text{ch}^2\alpha$ ,  $\cos^2\varphi$  и переобозначений получаются следующие уравнения для  $A$ ,  $\Phi$  [2, 4]:

$$A'' + (\Lambda \text{ch} 2\alpha - N)A = 0, \quad \Phi'' + (N - \Lambda \cos 2\varphi)\Phi = 0$$

$$\Lambda = \frac{1}{2}\mu, \quad N = \chi - \frac{1}{2}\mu \quad (\mu = \lambda d^2) \quad (4.1)$$

с краевыми условиями (1.5), (1.6). Будем строить приближенные асимптотические выражения для искомых величин  $\Lambda(e)$ ,  $N(e)$  при условии достаточной малости величины  $\delta$ ,  $\delta = 1 - e$ .

Рассмотрим сперва асимптотику  $\Lambda$ ,  $N$ , вытекающую из краевых задач для модифицированного уравнения Матье для  $A$ . При  $\delta \rightarrow 0$  интервал  $\alpha \in [0, \alpha^*]$  неограниченно сокращается ( $\alpha^* \rightarrow 0$ ); поэтому уравнение (4.1) для  $A$  должно быть преобразовано посредством замены  $\alpha = \alpha^*z$  к виду ( $A = A(z)$ ):

$$A'' + (\sigma \text{ch} 2\alpha^*z - v)A = 0, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad \sigma = \alpha^{*2}\Lambda, \quad v = \alpha^{*2}N$$

$$\alpha^* = \text{arch} e^{-1} = -\ln(1 - \delta) + \ln(1 + \sqrt{2\delta}(1 - \frac{1}{2}\delta)^{1/2}) = \sqrt{2\delta} + \delta + O(\delta^{3/2}) \quad (4.2)$$

Краевые условия (1.5), (1.6) соответствующим образом преобразуются: вместо условий при  $\alpha = \alpha^*$  берутся при  $z = 1$ . Приближенные решения задач (4.2), (1.5), (1.6) при достаточно малом  $\alpha^*$  могут быть построены аналитически с произвольной степенью точности по степеням малого параметра  $\varepsilon = \alpha^*(e) > 0$  ( $\varepsilon \approx \sqrt{2\delta}$ ,  $\delta = 1 - e$ ) на основе результатов [12]. В частности, с учетом членов  $O(\varepsilon^3)$  (с погрешностью  $O(\varepsilon^4)$ ) имеем выражения, связывающие параметры  $\sigma$ ,  $v$ :

$$\sigma = v + \gamma + \varepsilon^2 l(v + \gamma) + O(\varepsilon^4), \quad \gamma = \gamma_n^{c,s}, \quad l = l_n^{c,s}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

$$\gamma_n^c = \pi^2(n - \frac{1}{2})^2, \quad l_n^c = -\frac{2}{3} + 4\pi^{-2}(2n - 1)^{-2}, \quad \gamma_n^s = (\pi n)^2, \quad l_n^s = -\frac{2}{3} + 2(\pi n)^{-2}$$

Здесь индексы  $c$ ,  $s$ , как и раньше, отвечают четным и нечетным соответственно решениям основного уравнения Матье согласно (1.6), (1.5). Разделив выражение (4.3) на  $\varepsilon^2$ , т.е. возвратившись к введенным в (4.1) параметрам  $\Lambda$ ,  $N$ , получим искомую связь

$$\Lambda - N = \Gamma + \varepsilon^2 l\Lambda + O(\varepsilon^2), \quad \Gamma = \gamma\varepsilon^{-2} \quad (\Gamma \gg 1) \quad (4.4)$$

Зависимость (4.4) согласно (4.3) содержит индекс  $n = 1, 2, \dots$ , характеризующий номер моды по  $\alpha$ .

Воспользуемся теперь известной асимптотической зависимостью между параметрами в основном уравнении Матье [2]; для  $N$  и  $\Lambda$  при  $\Lambda \gg 1$ , получим выражение

$$N + \Lambda = p\sqrt{2\Lambda} - \frac{1}{8}(p^2 + 1) - \frac{1}{64}(p^3 + p)/\sqrt{2\Lambda} + O(\Lambda^{-1}) \quad (4.5)$$

Целое число  $p$  в (4.5) определяется номером моды  $m$  и симметрией решения ( $c$  или  $s$ , см. ниже). Разрешим систему уравнений (4.4), (4.5) относительно искомых  $\Lambda$ ,  $N$  посредством рекуррентной процедуры метода последовательных приближений; имеем

$$2\Lambda = \Gamma + O(\varepsilon^{-1}) = \Gamma + p\sqrt{\Gamma} + O(1) = \Gamma + p\sqrt{\Gamma} + \frac{1}{8}(3p^2 - 1) + \frac{1}{2}l\gamma + O(\varepsilon) \equiv \quad (4.6)$$

$$\equiv 2\Lambda_{(2)} + O(\varepsilon) = \Gamma + p\sqrt{2\Lambda_{(2)}} + \frac{1}{2}l\gamma - \frac{1}{8}(p^2 + 1) - \frac{1}{2}\varepsilon lp\sqrt{\Gamma} - \frac{1}{64}\varepsilon(p^3 + 3p)/\sqrt{\Gamma} + O(\varepsilon^2)$$

$$2N = 2\Lambda - 2\Gamma - l(\gamma + \varepsilon p\sqrt{\Gamma}) + O(\varepsilon^2)$$

Окончательная точность вычислений согласно (4.6) содержит абсолютную погрешность  $O(\varepsilon^2) = O(\delta)$ , которая по порядку величины при расчетах приведет к относитель-

ной погрешности  $O(\epsilon^4) = O(\delta^2)$ . Формулы (4.3) – (4.6) могут быть уточнены путем учета более высоких степеней параметра  $\epsilon$ . Однако выражения становятся весьма громоздкими и малоэффективными для вычислений. Практически достаточными для аналитического и численного продолжения расчетов при  $e \geq 0,9$  оказываются вторые приближения  $\Lambda_{(2)}$  и  $N_{(2)}$  с малыми относительными  $O(\epsilon^3)$  и абсолютной  $O(\epsilon)$  погрешностями согласно (4.6).

Перейдем к приближенному вычислению исходных искомым параметров  $\lambda$  и  $\chi$ , определяемых формулами (4.1):

$$\lambda = 2d^{-2}\Lambda, \quad \chi = N + \Lambda, \quad d^2 = a^2 e^2, \quad e \approx 1 \quad (4.7)$$

Здесь параметры  $\Lambda$ ,  $N$  как функции  $\epsilon = \alpha^*(e)$  задаются выражениями (4.6). Из (4.3) – (4.7) следует, что  $\Lambda \approx 1/2\Gamma$ ,  $N \approx -1/2\Gamma$ ,  $\chi \approx p\sqrt{\Gamma}$ , т.е. параметр разделения  $\chi$  переменных  $\alpha$  и  $\phi$  много меньше, чем  $\lambda$ :  $\chi/\lambda \sim \epsilon$ , хотя  $\chi \sim \epsilon^{-1}$ . Задание  $\chi = 0$  в модифицированном уравнении Матье (1.4) приведет к большой абсолютной ошибке [2, 9], см. п. 5.

Чтобы определить приближение выражения  $\lambda_{nm}^{c,s}(e)$ ,  $\chi_{nm}^{c,s}(e)$  согласно (4.3) – (4.7), необходимо задать связь индексов  $m$  и  $p = 2i + 1$ ; коэффициенты  $\Gamma_n^{c,s}$ ,  $\gamma_n^{c,s}$ ,  $l_n^{c,s}$  и индекс  $n$  определены формулами (4.3), (4.4). Целые числа  $p, i$  зависят от индекса  $m$  – номера моды колебаний по  $\phi$  – и типа решения  $c, s$  уравнения Матье следующим образом [2]:

$$p = p_m^{c,s} = 2i_m^{c,s} + 1, \quad i_m^c = m, \quad i_m^s = m - 1, \quad m \geq 1, \quad p_0^c = 1, \quad p_0^s = 0 \quad (4.8)$$

Таким образом, из (4.5), (4.8) вытекает, что одинаковые асимптотические разложения имеют место для  $N_0^c$  и  $N_1^s$ ,  $N_1^c$  и  $N_2^s, \dots, N_m^c$  и  $N_{m+1}^s$ , поскольку  $p_m^c = p_{m+1}^s$ , т.е. в (4.5) для  $p$  подставляется величина  $p = 2m + 1$  или  $p = 2m - 1$  при вычислении  $N_m^c$  или  $N_m^s$  соответственно. Отметим, что при этом параметр  $\Lambda > 0$  в (4.5) считается произвольным и независимым от  $m$ . Однако, как следует из (4.3), (4.6), асимптотика для  $\Lambda_{nm}^{c,s}$  при фиксированном  $n$  не будет одинаковой в указанном выше смысле. Это обусловлено тем, что коэффициент  $\Gamma_n^{c,s}$  различен для четных ( $c$ ) и нечетных ( $s$ ) решений. Отметим также, что главный член асимптотики  $O(\epsilon^{-2})$  для  $\lambda_{nm}^{c,s}$  определяется индексом  $n$ ; от индексов  $n, m$  зависит следующий, меньший член асимптотики  $O(\epsilon^{-1})$ . Промежуточный параметр разделения  $\chi_{nm}^{c,s}$  имеет ту же асимптотику, что и указанный второй член разложения для  $\lambda_{nm}^{c,s}$ . Интересно отметить, что главный член асимптотики  $\lambda_{nm}$  совпадает с главным членом асимптотики для случая узкой прямоугольной мембраны.

Полученные представления могут быть практически применены при  $\delta \sim 0,1$ , в том числе для приведенных выше расчетов п. 2. В результате получены высокоточные численные и численно-аналитические значения  $\lambda_{10}$  и  $\lambda_{11}^{c,s}$  для всех  $0 \leq e < 1$  (величина эксцентриситета может быть сколь угодно близкой к  $e = 1$ ), см. пп. 2–4.

**5. Применение метода ускоренной сходимости для определения собственных частот и форм колебаний эллиптической мембраны.** С целью использования высокоточного численно-аналитического метода ускоренной сходимости [10, 11] удобнее привести краевую задачу (4.1), (1.5), (1.6) к единичному интервалу изменения аргументов по обеим переменным аналогично (4.2); получим задачи на собственные значения и функции вида ( $\alpha = \alpha^*z$ ,  $\phi = \pi\theta$ ):

$$A'' + \alpha^{*2}(e)(\Lambda \operatorname{ch} 2\alpha^* z - N)A = 0, \quad A = A(z, e) \quad (5.1)$$

$$\Phi'' + \pi^2(N - \Lambda \cos 2\pi\theta)\Phi = 0, \quad \Phi = \Phi(\theta, e)$$

$$A(0) = A(1) = 0, \quad \Phi(0) = \Phi(1) = 0 \quad (5.2)$$

$$A'(0) = A'(1) = 0, \quad \Phi'(0) = \Phi'(1) = 0 \quad (5.3)$$

Требуется построить собственные значения  $\Lambda_{nm}^{c,1}(e)$  и функции  $A_{nm}^{c,s}(z, e)$ ,  $\Phi_{nm}^{c,s}(\theta, e)$ , отвечающие четным (5.3) и нечетным (5.2) решениям уравнения Матье в возможно более широком интервале  $0 < e < 1$  ( $n = 1, 2, \dots, m = 0, 1, 2, \dots$ ). Предельное решение, отвечающее  $e \rightarrow 0$  или  $e \rightarrow 1$ , построено сколь угодно точно в пп. 2–4. Отметим, что задача для  $\Phi$  (5.1) – (5.3) не зависит явно от  $e$ . Поэтому целесообразно применить прием последовательного определения параметров  $N$  и  $\Lambda$  в зависимости от  $e$  и индексов  $n, m$  для обеих краевых задач. Он заключается в использовании зависимостей  $N_m^{c,s}(\Lambda)$  из уравнения Матье, которые изучены во многих аналитических и вычислительных аспектах [1–4] (диаграммы Айнса–Стретта см. в [4]). Пусть известна с требуемой точностью аналитическая зависимость  $N_m^{c,s}(\Lambda)$ , например из конечного определителя Хилла или отрезка непрерывной дроби [2], для достаточно широкого интервала изменения  $\Lambda \geq 0$ . Подставим это выражение в модифицированное уравнение Матье для  $A$ ; согласно (5.1) – (5.3) получим два семейства краевых задач ( $e$  – параметр семейства):

$$A'' + \alpha^{*2}(e)(\Lambda \operatorname{ch} 2\alpha^* z - N_m^{c,s}(\Lambda))A = 0, \quad 0 \leq z \leq 1$$

$$A^s(0) = A^s(1) = 0, \quad A^c(0) = A^c(1) = 0 \quad (5.4)$$

Эти задачи типа Штурма – Лиувилля оказываются обобщенными (несамосопряженными), поскольку параметр  $\Lambda$ , собственные (критические) значения  $\Lambda_{nm}^{c,s}(e)$  которого требуется найти, входит нелинейным образом через  $N_m^{c,s}(\Lambda)$ . Регулярный численно-аналитический метод решения обобщенных задач типа (5.4) изложен в [10]. Он заключается в предварительной грубой оценке на основе вариационных подходов (при  $e$  фиксированном) и рекуррентной численно-аналитической процедуре ее уточнения на основе численно-аналитического метода ускоренной сходимости. Для других значений величины  $e$  используется процедура продолжения по параметру: простая или с использованием экстраполяции (линейной, квадратичной и т.д.).

Для сравнительно небольших значений  $\Lambda$  зависимость  $N_m^{c,s}(\Lambda)$  слабая [1–4]. Поэтому успешно, как в п. 2, может быть применен модифицированный метод на основе решения классической задачи. Этот метод использует значение  $\Lambda$  при вычислении  $N_m^{c,s}$ , полученное на предыдущем шаге итерации. Такой подход, как указывалось, предполагает не очень большие значения  $\Lambda$ , т.е. величины  $e$ . Он был применен в п. 2 для  $0 < e \leq 0,9$  и привел к относительной погрешности вычислений  $10^{-4}$ – $10^{-5}$  без значительных вычислительных затрат.

Если значения  $\Lambda$  велики и использование зависимостей  $N_m^{c,s}(\Lambda)$  проблематично, то для построения высокоточного решения задач (5.1) – (5.3) можно использовать метод ускоренной сходимости для совместного уточнения искомых значений  $\Lambda_{nm}^{c,s}(e)$ ,  $N_{nm}^{c,s}(e)$ . Он заключается в построении зависимостей  $N_m^{c,s}(\Lambda)$ ,  $\Lambda_n^{c,s}(N, e)$  с последующим определением общей точки путем численно-графического с помощью линейной или квадратичной интерполяции решения уравнения

$$\Lambda = \Lambda_n^{c,s}(N_m^{c,s}(\Lambda), e), \quad \Lambda = \Lambda_{nm}^{c,s}(e), \quad N = N_{nm}^{c,s}(e) = N_m^{c,s}(\Lambda_{nm}^{c,s}(e)) \quad (5.5)$$

Использование соотношений (5.5) для решения задач (5.1) – (5.3) требует разработки соответствующего программного обеспечения и использования современных ЭВМ.

**6. Выводы.** Изучение фундаментальных трудов, посвященных вычислениям собственных частот колебаний эллиптических мембран и пластин [2, 4], свидетельствует, что при расчетах часто не учитывается (полагается равной нулю) промежуточная постоянная разделения переменных, в том числе при сравнительно больших значениях эксцентриситета (например,  $e = 0,8$  [2]). Это приводит к довольно грубым ошибкам в вычислении собственных значений эллиптической мембраны (полученное согласно [2] значение  $\lambda_{11}^c$  соответствует кружку на фигуре). Аналогичное допущение делается при вычислениях частот колебаний эллиптической пластины [4], что также приводит к весьма грубому значению искомой величины. Заметим, что такие допущения возможны, но только как первый шаг итерационной процедуры, заключающейся в дальнейшем уточнении указанной промежуточной постоянной разделения из уравнения типа Матье с помощью полученной грубой оценки собственного значения с последующим его уточнением из модифицированного уравнения Матье. Авторы классических результатов отмечали это обстоятельство, но их последователи переписывали и использовали эти результаты без должного критического анализа. На наш взгляд имеется настоятельная необходимость построения и опубликования высокоточных расчетов собственных значений эллиптической мембраны и пластины как функций эксцентриситета, аналогичных диаграммам Айнса – Стретта [4].

Авторы благодарны Ф.Л. Черноусько и И.А. Шишмареву за конструктивное обсуждение результатов работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00222, 99-01-00276).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mathieu E.* Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique // *J. de Math. Pures et Appliquées* 1868. V. 13. № 2. P. 137–203.
2. *Мак-Лахлан Н.В.* Теория и приложения функций Матье. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 475 с.
3. *Морс Ф.М., Феибах Г.* Методы теоретической физики. М.: Изд-во иностр. лит. Т. 1. 1958. 930 с.; Т. 2. 1960. 896 с.
4. *Стретт М.Д.О.* Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике. Харьков, Киев: Гостехиздат Украины, 1935. 238 с.
5. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 476 с.
6. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.
7. *Mises R.V., Pollaczek-Geiringer H.* Praktische Verfahren der Gleichungsauflosung // *ZAMM*. 1929. В. 9. Н. 2. S. 152–164.
8. *Полюа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.
9. *Стрэтт Дж.В. (Лорд Рэлей).* Теория звука. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1940. 500 с.
10. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Эффективное решение обобщенной задачи Штурма – Лиувилля // *Докл. РАН*. 1998. Т. 363. № 3. С. 323–326.
11. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Определение частот и форм колебаний неоднородных распределенных систем с граничными условиями третьего рода // *ПММ*. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 547–555.
12. *Акуленко Л.Д., Шамаев А.С.* Приближенное решение некоторых возмущенных краевых задач // *ПММ*. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 200–209.

Москва

Поступила в редакцию  
30.03.1999