МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1999

УДК 534.1:624.07

© 1999 г. А.Ф. СТАРИКОВ

ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ И КОРРЕКЦИЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ ЧАСТОТНЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА ДЛЯ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ И БАЛОК

Показано, что в результате плохой сходимости функционального ряда функции Грина для стержней и балок в укороченные ряды этой функции необходимо вводить элементы статистической или динамической коррекции решения, что позволяет корректно определить рабочий диапазон частот (РДЧ) приближенной функции Грина, в котором ее погрешность не превосходит заданной величины.

1. Приближенные функции Грина. Рассмотрим функцию Грина для балки или стержня в виде

$$W(x,\zeta,\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\zeta)}{\omega_k^2-\omega^2}$$

где $\{\varphi_k(x), \omega_k\}$ – полный ортонормированный набор собственных функций и частот рассматриваемых объектов.

Обозначим

$$W_1^N(x,\zeta,\omega)=\sum_{k=1}^{N}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\zeta)}{\omega_k^2-\omega^2}$$

где $\{\varphi_k(x), \omega_k\}$ – набор первых N собственных функций и частот, $\Delta W_1^N = W - W_1^N$.

Тогда, как показано в [1], справедлива оценка

$$\left|\Delta W_1^N\right| \leqslant \max_x\left(K(x,x)-\sum_{k=1}^{N}\frac{\varphi_k^2(x)}{\omega_k^2}\right)\frac{\omega_{N+1}}{\omega_{N+1}-\omega}=\Delta_1^N W$$

Обозначим

$$K_N(x,\zeta)=K(x,\zeta)-\sum_{k=1}^{N}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\zeta)}{\omega_k^2}$$

где $K(x, \zeta)$ – статическая функция Грина. Для рассматриваемых задач она может быть вычислена аналитически из статической части дифференциальной задачи. Тогда из последней оценки следует оценка для определения РДЧ приближения W_1^N, т.е., используя неравенство $\Delta_1^N W \leqslant \varepsilon$, получим

$$\omega \leqslant \frac{\varepsilon - \max\limits_x K_N(x,x)}{\varepsilon}\,\omega_{N+1}$$

Из последнего неравенства видно, что точность ε не может быть сколь угодно малой величиной и ограничена неравенством $\varepsilon \geqslant \max K_N(x, x)$, так что в случае равенства РДЧ для этой точности вырождается в единственную точку $\omega = 0$ и уменьшение допустимой точности возрастает с возрастанием точности $K_N(x, x) \to 0$ при $N \to \infty$. Таким образом, непосредственное применение аппроксимации W_1^N может оказаться некорректным.

Рассмотрим другое представление функции Грина, следующее из тождества

$$W = K + \omega^2 KW = K + \omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\zeta)}{(\omega_k^2 - \omega^2)\omega_k^2}.$$

Для этого представления приближение W_2^N имеет вид

$$W_2^N = K + \omega^2 \sum_{k=1}^{N} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\zeta)}{(\omega_k^2 - \omega^2)\omega_k^2}$$

Обозначим $\Delta W_2^N = W - W_2^N$. В [1] показано, что для такого приближения справедлива оценка

$$\left|\Delta W_2^N\right| \leqslant \max_x K_N(x,x) \frac{\omega^2}{\omega_{N+1}^2 - \omega^2} = \Delta_2^N W$$

Вводя неравенство $\Delta_2^N W \leqslant \varepsilon$, получим оценку для РДЧ этого приближения, т.е.

$$\omega \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon}{\max\limits_x K_N(x,x) + \varepsilon}}\omega_{N+1} \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon}{\max\limits_x K_N(x,x) + \varepsilon}}\omega_{N+1}$$

В полученной оценке точность ε может быть сколь угодно малой величиной. Используя тождество

$$\frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \equiv \frac{1}{\omega_k^2} + \frac{\omega^2}{\omega_k^2}\frac{1}{\omega_k^2 - \omega^2}$$

для функции W_2^N получим: $W_2^N = W_1^N + K_N(x, \zeta)$, т.е. неполное разложение по собственным функциям W_1^N требует для корректности оценки погрешности и определения РДЧ статической коррекции функцией $K_N(x, \zeta)$.

Рассмотрим остаточную часть разложения

$$\Delta W_1^N = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\zeta)}{\omega_k^2 - \omega^2}$$

Тогда будем иметь

$$\frac{\omega_{N+1}^2 - \omega^2}{\omega_{N+1}^2}\Delta W_1^N = -\frac{\omega^2}{\omega_{N+1}^2}\Delta W_1^N + K_N + \omega^2 K_N \Delta W_1^N$$

Записывая ΔW_1^N в виде функционального ряда, после преобразования получим

$$\Delta W_1^N = \frac{\omega_{N+1}^2}{\omega_{N+1}^2 - \omega^2} K_N + \Delta W_3^N$$

$$\Delta W_3^N = -\frac{\omega^2}{\omega_{N+1}^2 - \omega^2} \sum_{k=N+2}^{\infty} \frac{\omega_k^2 - \omega_{N+1}^2}{\omega_k^2 - \omega^2}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\xi)}{\omega_k^2}$$

В результате найдем

$$W_3^N = W_1^N + \frac{\omega_{N+1}^2}{\omega_{N+1}^2 - \omega^2} K_N(x,\zeta)$$

$$\left|\Delta W_3^N\right| \le \frac{\omega^2}{\omega_{N+1}^2-\omega^2} K_{N+1} = \Delta_3^N W$$

В последнем неравенстве были использованы неравенство Коши – Буняковского и неравенство

$$\left|\frac{\omega_k^2-\omega_{N+1}^2}{\omega_k^2-\omega^2}\right| < 1 \text{ при } \omega^2 \leqslant \omega_{N+1}^2$$

Таким образом, РДЧ последней аппроксимации W_3^N для неравенства $\Delta W_3^N \leqslant \varepsilon$ имеет вид

$$\omega \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon}{\max\limits_x K_{N+1}(x,x)+\varepsilon}}\omega_{N+1} \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon}{\max\limits_x K_{N+1}(x,x)+\varepsilon}}\omega_{N+1}$$

Из сравнения оценок погрешности и РДЧ следует, что при равной точности ε со случаем статической коррекции вследствие использования в оценках для W_3^N величины $\max K_{N+1}(x, x)$, а не $\max K_N(x, x)$ аппроксимация имеет более широкий РДЧ. Такую коррекцию функции W_1^N можно назвать динамической.

2. Применение методики коррекции функционального разложения частотной функции Грина для задач колебаний свободных балок. Для расчета свободных балок и стержней обычной статической функции Грина не существует вследствие наличия у объекта перемещений как твердого тела, поэтому в рассмотрение вводят обобщенную статическую функцию Грина. Подробно теория построения этой функции изложена в [2]. Для определенности будем рассматривать свободную упругую балку; тогда обобщенная статическая функция Грина определяется из уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} EJ(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x,\zeta) = \delta(x-\zeta) + \frac{J_0-(x+\zeta)S_0+x\zeta M}{S_0^2-MJ_0}$$

$$M=\int_0^L m(x)dx,\ S_0=\int_0^L xm(x)dx,\ J_0=\int_0^L x^2m(x)dx$$

где M – полная масса балки, S_0 – статический момент инерции балки, J_0 – момент инерции балки относительно точки $x = 0$, E – модуль упругости, $J(x)$ – квадратичный момент инерции поперечного сечения балки в точке x относительно нейтральной оси изгиба. Концепция обобщенной статической функции Грина свободного стержня и балки использовалась в [3].

Исходя из спектральных свойств поставленной дифференциальной задачи, следует, что справедливы разложения

$$K(x,\zeta)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\zeta)}{\omega_k^2}$$

$$W(x,\zeta,\omega) = -\frac{J_0-(x+\zeta)S_0+x\zeta M}{(MJ_0-S_0^2)\omega^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\zeta)}{\omega_k^2-\omega^2}$$

где $\{\varphi_k(x), \omega_k\}$ – полный ортонормированный набор собственных функций и частот. Тогда, обозначив

$$W_* = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\zeta)}{\omega_k^2-\omega^2}$$

получим, что для этой функции справедливы все предыдущие рассуждения и оценки.

3. Пример. Построим низкочастотные приближения функции Грина для изгибных колебаний упругих однородных свободных балок: $EJ = \text{const}$, $m = \text{const}$. После вычислений получим $M = mL$, $S_0 = mL^2/2$, $J_0 = mL^3/3$, где m – погонная масса, L – длина балки.

Для определения обобщенной статической функции Грина $K(x, \zeta)$ обозначим

$$K(x, \zeta) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

$$I_1 = \frac{h(x-\zeta)}{EJ}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{\zeta^3}{6} - \frac{x^2\zeta}{2} + \frac{x\zeta^2}{2}\right)$$

$$I_2 = \frac{m}{EJ}\frac{1}{S_0^2 - MJ_0}\left(\left(J_0 - \zeta S_0\right)\frac{x^4}{24} - \left(S_0 - \zeta M\right)\frac{x^5}{120}\right)$$

$$I_3 = \frac{m}{EJ}\left[\frac{J_0 - xS_0}{S_0^2 - MJ_0}\left(\frac{\zeta^4}{24} + \frac{L^4}{24} - \frac{L\zeta^3}{6} - \frac{L^3\zeta}{6} + \frac{L^3\zeta^2}{4}\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{S_0 - xM}{S_0^2 - MJ_0}\left(\frac{\zeta^5}{120} + \frac{L^5}{30} - \frac{L^2\zeta^3}{12} - \frac{L^4\zeta}{8} + \frac{L^3\zeta^2}{6}\right)\right]$$

$$I_4 = \frac{m^2}{EJ}\frac{1}{(S_0^2 - MJ_0)^2}\left[(J_0 - \zeta S_0)(J_0 - xS_0)/120 - (J_0 - xS_0)(S_0 - \zeta M)/720 -\right.$$

$$\left. -(J_0 - \zeta S_0)(S_0 - xM)/144 + (S_0 - \zeta M)(S_0 - xM)/840\right]$$

где $h(x - \zeta)$ – функция Хевисайда.

Собственные функции для уравнения $(-\omega_k^2\varphi_k(x) + d^4\varphi(x)/dx^4) = 0$ со свободными концами имеют вид

$$\varphi_k(x) = \phi_k(\sin\sqrt{\omega_k}x\,\mathrm{sh}\sqrt{\omega_k}L + \mathrm{sh}\sqrt{\omega_k}x\sin\sqrt{\omega_k}L)$$

где коэффициенты ϕ_k ищутся из условий нормировки собственной функции. Характеристическое уравнение для определения собственных частот имеет вид

$$x(\omega) = \mathrm{sh}\sqrt{\omega}L\cos\sqrt{\omega}L - \mathrm{ch}\sqrt{\omega}L\sin\sqrt{\omega}L = 0$$

Откуда следует, что $\omega_1 = 22{,}373$, $\omega_2 = 61{,}67$.

В этом случае низкочастотные приближения функции Грина имеют вид

$$W_2^0 = -\frac{J_0 - (x+\zeta)S_0 + x\zeta M}{(MJ_0 - S_0^2)\omega^2} + K(x,\zeta)$$

$$W_3^0 = -\frac{J_0 - (x+\zeta)S_0 + x\zeta M}{(MJ_0 - S_0^2)\omega^2} + \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega^2}K(x,\zeta)$$

Полученные функции были численно апробированы при расчете колебаний свободной балки, несущей подрессоренный в двух точках тяжелый стержень, и в рабочих диапазонах частот давали хорошие приближения к точному решению задачи. Низкочастотные приближения хорошо описывали влияние жесткости балки при малых изгибах на собственные частоты рассматриваемой задачи по сравнению с колебаниями абсолютно жестких стержней.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стариков А.Ф.* Структурные методы исследования линейных систем в приложении к сложным динамическим упругим континуальным системам с дискретным взаимодействием // Нелинейные эффекты в открытых системах. Вып. 8. М.: ГосИФТП, 1997. С. 53–79.
2. *Азаров В.Л., Лупичев Л.Н., Тавризов Г.А.* Математические методы исследования сложных физических систем. М.: Наука, 1975. 342 с.
3. *Алгазин С.Д.* Численные исследования резонансов в некоторых сложных колебательных системах // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 3. С. 155–159.

Москва

Поступила в редакцию
4.06.1997