

УДК 539.3

© 1999 г. И.О. ОСИПОВ

К МЕТОДУ КОМПЛЕКСНЫХ РЕШЕНИЙ  
ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ  
УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

В работе [1] метод функционально-инвариантных решений В.И. Смирнова и С.Л. Соболева [2, 3] обобщен для решения динамических задач плоской теории упругости анизотропных сред. Так как в [1] допущена неточность, в данной статье продолжается изучение этой задачи для анизотропных сред с четырьмя упругими постоянными без каких-либо ограничений на упругие постоянные реальных сред, рассматриваемого класса. Получены и исследованы простейшие решения, выражающие плоские волны, и комплексные решения общего типа системы дифференциальных уравнений второго порядка, выражающей свободные упругие колебания в рассматриваемой среде. Однородные нулевого измерения решения, выражающие колебания от точечного источника типа мгновенного импульса, получены как частный случай общих решений. Решения однозначно определены на римановых поверхностях, вид которых зависит от соотношений упругих постоянных. Полученные решения отличаются от решений [1].

**1. Уравнения движения и их решение.** Метод функционально-инвариантных решений В.И. Смирнова и С.Л. Соболева [2, 3], основанный на идее приложения теории функций комплексного переменного к решению волновых уравнений, нацел широкое применение в задачах, связанных с распространением упругих колебаний в изотропных средах.

Обобщение метода комплексных решений для решения динамических задач плоской теории упругости анизотропных сред впервые рассмотрено в [1]. Так как при решении этой задачи в [1] допущена неточность, в данной статье продолжается изучение этой проблемы для анизотропных сред с четырьмя упругими постоянными без каких либо ограничений на упругие постоянные.

Рассмотрим анизотропную среду с четырьмя упругими постоянными. Координатные оси  $x, y, z$  совпадают с осями упругой симметрии среды, колебания не зависят от координаты  $z$ .

Дифференциальные уравнения свободных упругих колебаний имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + d \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Отношения упругих постоянных к плотности среды

$$a = C_{11} / \rho, \quad b = C_{22} / \rho, \quad d = C_{66} / \rho, \quad c = (C_{66} + C_{12}) / \rho \quad (1.2)$$

удовлетворяют необходимым и достаточным условиям положительной опреде-

ленности формы упругой энергии

$$a > d, b > d, d > 0, ab - (c - d)^2 > 0 \quad (1.3)$$

которые являются необходимыми и достаточными условиями распространения упругих колебаний в любых направлениях и выполняются для всех реальных сред рассматриваемого класса анизотропии.

Выражаем решение системы уравнений (1.1) функциями

$$u = U(\Omega), \quad v = V(\Omega) \quad (1.4)$$

где  $\Omega$  представляет собой функцию, определенную в неявном виде линейным уравнением относительно  $x, y$  и  $t$ :

$$\delta \equiv l(\Omega)t + m(\Omega)x + n(\Omega)y + K(\Omega) = 0 \quad (1.5)$$

Под  $U$  и  $V$  понимаются непрерывные два раза дифференцируемые функции, если в них коэффициенты при переменных величинах вещественные. Если некоторые из этих коэффициентов в какой-либо области пространства  $x, y, t$  комплексные величины, то  $U$  и  $V$  – аналитические функции в указанной области.

Определяя производные функций (1.4) по известным формулам дифференцирования сложных и неявных функций  $f(\Omega)$  [2]:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{\delta'} \frac{\partial}{\partial \Omega} \left( f'(\Omega) \frac{m^2(\Omega)}{\delta'} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{\delta'} \frac{\partial}{\partial \Omega} \left( f'(\Omega) \frac{n^2(\Omega)}{\delta'} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{1}{\delta'} \frac{\partial}{\partial \Omega} \left( f'(\Omega) \frac{l^2(\Omega)}{\delta'} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\delta'} \frac{\partial}{\partial \Omega} \left( f'(\Omega) \frac{m(\Omega)n(\Omega)}{\delta'} \right)$$

$$\delta' = l'(\Omega)t + m'(\Omega)x + n'(\Omega)y + K'(\Omega) \neq 0$$

$$l'(\Omega) = dl/d\Omega, \quad \dots, \quad f'(\Omega) = df/d\Omega$$

и подставляя их значения в систему уравнений (1.1), получим условия

$$(am^2 + dn^2 - l^2)U'(\Omega) + cmnV'(\Omega) = 0 \quad (1.6)$$

$$cmnU'(\Omega) + (dm^2 + bn^2 - l^2)V'(\Omega) = 0$$

устанавливающие зависимость между функциями (1.4). Если функции (1.4) удовлетворяют условия (1.6), то они удовлетворяют и систему уравнений (1.1).

Система линейных уравнений (1.6) имеет ненулевые решения, если ее определитель равен нулю

$$\Delta = (am^2 + dn^2 - l^2)(dm^2 + bn^2 - l^2) - c^2 m^2 n^2 = 0 \quad (1.7)$$

Уравнение (1.7) устанавливает зависимость между функциями  $l(\Omega), m(\Omega), n(\Omega)$ , а также между производными  $U'(\Omega)$  и  $V'(\Omega)$  согласно (1.6).

Следовательно, функции (1.4) выражают решение системы уравнений движения (1.1), если аргумент  $\Omega$  определен уравнением (1.5) с коэффициентами, подчиненными уравнению (1.7), а сами функции удовлетворяют условия (1.6).

**2. Плоские волны.** Если принять в уравнении (1.5)  $l(\Omega) = 1, m(\Omega) = -\theta, n(\Omega) = \lambda$  и  $K(\Omega) = -\Omega$ , получим простейшие решения системы уравнений (1.1) вида (1.4), представляющие собой плоские волны

$$u_k = U_k(\Omega_k), \quad v_k = V_k(\Omega_k) \quad (2.1)$$

$$\Omega_k = t - \theta x + \lambda_k y \quad (k=1,2)$$

где  $\lambda_k$  – корни уравнения (1.7), представляющие собой функции переменной  $\theta$ :

$$\lambda_k = \{H + (-1)^k [H^2 - (a/b)(1/a - \theta^2)(1/d - \theta^2)]^{1/2}\}^{1/2} \quad (2.2)$$

$$H = [(b+d) - (ab + d^2 - c^2)\theta^2] / (2bd)$$

( $U_k(\Omega_k)$  и  $V_k(\Omega_k)$  – функции, соответствующие корням  $\lambda_k$ )

Для рассматриваемого случая условия (1.6) принимают вид

$$p_k U'_k(\Omega_k) - c\theta\lambda_k V'_k(\Omega_k) = 0, \quad -c\theta\lambda_k U'_k(\Omega_k) + r_k V'_k(\Omega_k) = 0 \quad (2.3)$$

$$p_k = a\theta^2 + d\lambda_k^2 - 1, \quad r_k = d\theta^2 + b\lambda_k^2 - 1, \quad p_k r_k = c^2\theta^2\lambda_k^2$$

Решения (2.1) должны удовлетворять условиям (2.3).

В [1], хотя это и не оговаривается, изучаются упругие волны в анизотропных средах, ограниченных для упругих постоянных условием

$$N = (a-d)b - c^2 > 0 \quad (2.4)$$

В этом случае при вещественных значениях  $\theta$  функции (2.1) выражают вещественные или комплексные плоские волны, при  $k=1$  – квазипродольные, при  $k=2$  – квазипоперечные.

При переходе к изотропной среде, т.е. при значениях упругих постоянных  $c = a - d$  и  $b = a$ , первые и вторые условия (2.3) переходят при  $k=1$  в условие потенциальности вектора смещений продольных волн

$$-(1/a - \theta^2)^{1/2} U'_1(\Omega_1) = \theta V'_1(\Omega_1) \quad (2.5)$$

при  $k=2$  в условие соленоидальности вектора смещений поперечных волн

$$\theta U'_2(\Omega_2) = (1/d - \theta^2)^{1/2} V'_2(\Omega_2) \quad (2.6)$$

Поэтому на первый взгляд кажется, что для построения решений системы уравнений (1.1) достаточно воспользоваться одним из условий (2.3).

В [1], используя первые условия (2.3), решения (2.1) представлены выражениями

$$u_k = c\theta\lambda_k w_k(\Omega_k), \quad v_k = p_k w_k(\Omega_k) \quad (2.7)$$

Решения (2.7) при  $\theta = 0$  имеют значения

$$u_1 = 0, \quad v_1 = -\frac{b-d}{b} w_1(t + b^{-1/2}y), \quad u_2 = 0, \quad v_2 = 0 \quad (2.8)$$

при  $\theta = a^{-1/2}$  ( $k=1$ ) и  $\theta = d^{-1/2}$  ( $k=2$ ) – значения

$$u_1 = 0, \quad v_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad v_2 = \frac{a-d}{d} w_2(t - d^{-1/2}x) \quad (2.9)$$

Из (2.8) и (2.9) следует, что решения (2.7) не отвечают физическому смыслу задачи; в направлении оси  $x$  не распространяется квазипродольная волна, в направлении оси  $y$  – квазипоперечная.

Пользуясь вторым условием (2.3), получим решения (2.1), представленные выражениями

$$u_k = r_k w_k(\Omega_k), \quad v_k = c\theta\lambda_k w_k(\Omega_k) \quad (2.10)$$

дающими аналогичную картину по направлению осей  $y$  и  $x$ :

$$u_1 = 0, \quad v_1 = 0, \quad u_2 = \frac{b-d}{d} w_2(t + d^{-1/2}y), \quad v_2 = 0 \quad (2.11)$$

$$u_1 = -\frac{a-d}{a} w_1(t - a^{-1/2}x), \quad v_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad v_2 = 0 \quad (2.12)$$

В направлении оси  $x$  не распространяется квазипоперечная волна, в направлении оси  $y$  – квазипродольная.

Из выражений (2.8), (2.9) и (2.11), (2.12) следует, что для построения решений (2.1), определяющих распространение волн в любых направлениях, должны использоваться оба условия (2.3) для каждого типа волн.

В отличие от изотропных сред уравнения для анизотропных сред не могут приводиться к волновым уравнениям, квазипродольные и квазипоперечные волны не могут существовать независимо друг от друга. Волновой процесс представляет собой единый сложный процесс, состоящий из квазипродольных и квазипоперечных волн, распространяющихся от источника возмущения с разными скоростями, зависящими от соотношения упругих постоянных и направлений распространения волн. Векторы смещений тех и других волн имеют нормальные и касательные составляющие к фронтам волн.

Чтобы выполнялось условие совместности для квазипродольных и квазипоперечных волн, составляем обобщенное условие, устанавливающее зависимости между функциями (2.1), просуммировав левые части условий (2.3):

$$(p_k - c\theta\lambda_k)U'_k(\Omega_k) + (r_k - c\theta\lambda_k)V'_k(\Omega_k) = 0 \quad (2.13)$$

Согласно условий (2.13) решения (2.1), выражающие квазипродольные и квазипоперечные плоские волны, принимают вид

$$u_k = (r_k - c\theta\lambda_k)w_k(\Omega_k), \quad v_k = -(p_k - c\theta\lambda_k)w_k(\Omega_k) \quad (2.14)$$

$$\Omega_k = t - \theta x + \lambda_k y \quad (k=1, 2)$$

где  $w_k$  – ветви произвольной непрерывной два раза дифференцируемой функции  $w$ , если коэффициенты при переменных величинах вещественные. Если некоторые из этих коэффициентов в какой-либо области пространства  $x, y, t$  комплексные величины, то  $w$  – аналитическая функция в этой области.

Непосредственной постановкой легко убедиться, что полученные решения (2.14) удовлетворяют каждое из условий (2.3) и систему уравнений (1.1). При  $\theta = 0$  решения (2.14) имеют значения

$$u_1 = 0, \quad v_1 = \frac{b-d}{b} w_1(t + b^{-1/2}y)$$

$$u_2 = \frac{b-d}{d} w_2(t + d^{-1/2}y), \quad v_2 = 0$$

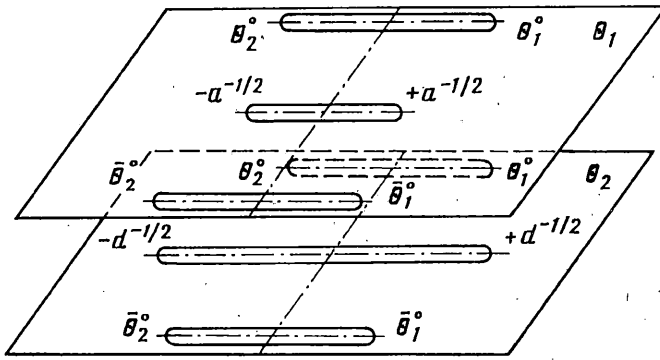
при  $\theta = a^{-1/2}$  ( $k=1$ ) и  $\theta = d^{-1/2}$  ( $k=2$ ):

$$u_1 = -\frac{a-d}{a} w_1(t - a^{-1/2}x), \quad v_1 = 0$$

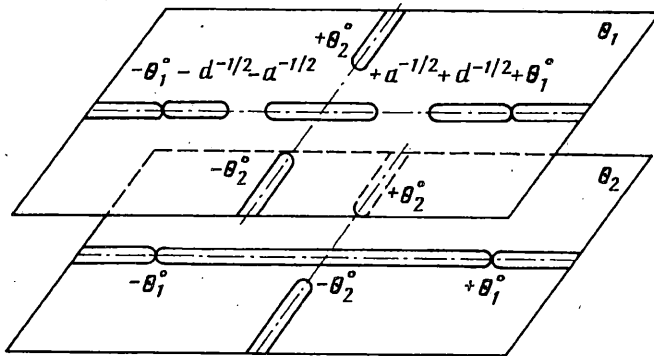
$$u_2 = 0, \quad v_2 = -\frac{a-d}{d} w_2(t - d^{-1/2}x)$$

соответствующие физическому смыслу задачи.

Нормальные скорости волн (2.14) и углы, образованные нормальными к фронтам волн



Фиг. 1



Фиг. 2

с осью  $y$ , определяются выражениями [4]:

$$b_k = (\theta^2 + \lambda_k^2)^{-1/2}, \quad \text{tg } \alpha_k = \theta / \lambda_k \quad (2.15)$$

Функции  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , определяемые выражениями (2.2), есть ветви алгебраической функции  $\lambda$ , однозначно определенной на римановой поверхности, вид которой зависит от соотношений упругих постоянных.

При выполнении условия (2.4), т.е. при  $N > 0$ , для внешних радикалов (2.2) точки  $\theta_1 = \pm a^{-1/2}$  при  $k=1$  и  $\theta_2 = \pm d^{-1/2}$  при  $k=2$  являются точками разветвления. Риманова поверхность состоит из плоскостей  $\theta_1$  и  $\theta_2$  с разрезами  $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$  и  $(-d^{-1/2}, +d^{-1/2})$ , склеенных крест-накрест вдоль разрезов, соединяющих точки разветвления  $\theta_i^{\circ}$  для внутренних радикалов функций (2.2). В зависимости от соотношений упругих постоянных точки разветвления  $\theta_i^{\circ}$  могут быть комплексными, мнимыми и вещественными [4, 5]. На фиг. 1 в качестве примера изображена риманова поверхность, когда точки разветвления  $\theta_i^{\circ}$  — комплексные попарно сопряженные.

На берегах разрезов  $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$  плоскости  $\theta_1$  и  $(-d^{-1/2}, +d^{-1/2})$  плоскости  $\theta_2$  функции  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  имеют вещественные значения, функции (2.14) выражают вещественные плоские волны: квазипродольные при  $k=1$ , квазипоперечные при  $k=2$ , распространяющиеся в любых направлениях с нормальными скоростями и направлениями движения, определенными формулами (2.15), в зависимости от значений  $\theta$ . Характер изменения скоростей от направления движения волн и от соотношений упругих постоянных изучен в [4, 6].

Фиксируем функции  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  на плоскостях  $\theta_1$  и  $\theta_2$  римановой поверхности так, чтобы они были положительными при  $\theta = i\beta$ , где  $\beta$  – достаточно малая положительная величина. Так как анизотропная среда симметрична относительно осей  $x$  и  $y$ , то достаточно изучить решения (2.14), определенные на верхних берегах разрезов  $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$  плоскости  $\theta_1$  и  $(-d^{-1/2}, +d^{-1/2})$  плоскости  $\theta_2$  при положительных значениях  $\theta$ .

На участках

$$0 \leq \theta \leq a^{-1/2}, \quad 0 \leq \theta \leq d^{-1/2} \quad (2.16)$$

верхних берегов разрезов плоскостей  $\theta_1$  и  $\theta_2$  в соответствие с формулами (2.15) функции (2.14) выражают квазипродольные ( $k=1$ ) и квазипоперечные ( $k=2$ ) волны, распространяющиеся с непрерывно возрастающими углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в интервалах

$$0 \leq \alpha_1 \leq \pi/2, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq \pi/2 \quad (2.17)$$

и с непрерывными изменяющимися нормальными скоростями со значениями на границах участков

$$b_1(0) = b^{1/2}, \quad b_1(a^{-1/2}) = a^{1/2}, \quad b_2(0) = b_2(d^{-1/2}) = d^{1/2} \quad (2.18)$$

Риманова поверхность имеет иной вид, если упругие постоянные удовлетворяют условию

$$N = (a-d)b - c^2 < 0 \quad (2.19)$$

В этом случае, не рассмотренном в [1], внешний радикал функции  $\lambda_1$  имеет четыре точки разветвления  $-\theta_1 = \pm a^{-1/2}$  и  $\theta_2 = \pm d^{-1/2}$ , внешний радикал функции  $\lambda_2$  не имеет точек разветвления [4]. Из четырех точек разветвления для внутреннего радикала функции  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  имеем: две вещественные –  $\pm \theta_1^\circ$ , две мнимые –  $\pm \theta_2^\circ$ , причем  $\theta_1^\circ > d^{-1/2}$ . Функция  $\lambda_1$  однозначна на плоскости  $\theta_1$  с разрезами  $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$ ,  $(\pm d^{-1/2}, \pm \theta_1^\circ)$  и  $(\pm \theta_1^\circ, \pm \infty)$  вдоль вещественной оси и с разрезами  $(\pm \theta_2^\circ, \pm i\infty)$  вдоль мнимой оси. Функция  $\lambda_2$  однозначна на плоскости  $\theta_2$  с разрезами  $(-\theta_1^\circ, +\theta_1^\circ)$  и  $(\pm \theta_1^\circ, \pm \infty)$  вдоль вещественной оси и с разрезами  $(\pm \theta_1^\circ, \pm i\infty)$  вдоль мнимой оси. Риманова поверхность (фиг. 2) состоит из плоскостей  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , склеенных крест-накрест вдоль берегов разрезов  $(\pm \theta_1^\circ, \pm \infty)$  и  $(\pm \theta_2^\circ, \pm i\infty)$ .

На берегах разрезов  $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$ , и  $(\pm d^{-1/2}, \pm \theta_1^\circ)$  плоскости  $\theta_1$  и  $(-\theta_1^\circ, +\theta_1^\circ)$  плоскости  $\theta_2$  функции  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  принимают вещественные значения, функции (2.14) выражают вещественные волны. На участках  $(\pm a^{-1/2}, \pm d^{-1/2})$  плоскости  $\theta_1$  функция  $\lambda_1$  имеет мнимые значения, на берегах разрезов  $(\pm \theta_1^\circ, \pm \infty)$  плоскостей  $\theta_1$  и  $\theta_2$  функции  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  имеют комплексные значения; функции (2.14) на соответствующих участках выражают комплексные волны.

На участках

$$0 \leq \theta \leq a^{-1/2}, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_1^\circ \quad (2.20)$$

верхних берегов разрезов плоскостей  $\theta_1$  и  $\theta_2$  в соответствие с формулами (2.15) функции (2.14) выражают квазипродольные при  $k=1$  и квазипоперечные при  $k=2$  волны, распространяющиеся с непрерывно возрастающими углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в интервалах

$$0 \leq \alpha_1 \leq \pi/2, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_2^\circ \quad (\alpha_2^\circ < \pi/2) \quad (2.21)$$

и с непрерывно изменяющимися нормальными скоростями со значениями на границе участков

$$b_1(0) = b^{1/2}, \quad b_1(a^{-1/2}) = a^{1/2}, \quad b_2(0) = d^{1/2}, \quad b_2(\theta_1^\circ) < d^{1/2} \quad (2.22)$$

На участке  $(+a^{-1/2}, +d^{-1/2})$  плоскости  $\theta_1$  (фиг. 2) функция  $\lambda_1$  принимает мнимые значения  $\lambda_1 = -i\lambda_1^*$ , функции (2.14) при  $k = 1$  выражают комплексные квазипродольные волны

$$u_1 = (r_1 + c\theta \cdot i\lambda_1^*)w_1(\Omega_1^*), \quad v_1 = -(p_1 + c\theta \cdot i\lambda_1^*)w_1(\Omega_1^*)$$

$$\Omega_1^* = t - \theta x - i\lambda_1^* y$$

На верхнем берегу разреза  $(+d^{-1/2}, +\theta_1^\circ)$  плоскости  $\theta_1$  функция  $\lambda_1$  принимает вещественные значения  $(-\lambda_1)$ . На участках  $(+d^{-1/2}, +\theta_1^\circ)$  верхних берегов разрезов  $(+d^{-1/2}, +\theta_1^\circ)$  плоскости  $\theta_1$  и  $(-\theta_1^\circ, +\theta_1^\circ)$  плоскости  $\theta_2$  функции (2.14) имеют вид

$$u_1 = (r_1 + c\theta\lambda_1)w_1(\Omega_1^-), \quad v_1 = -(p_1 + c\theta\lambda_1)w_1(\Omega_1^-) \quad (2.23)$$

$$u_2 = (r_2 - c\theta\lambda_2)w_2(\Omega_2^+), \quad v_2 = -(p_2 - c\theta\lambda_2)w_2(\Omega_2^+)$$

$$\Omega_k^\pm = t - \theta x \pm \lambda_k y$$

и выражают вещественные волны.

При обходе точки разветвления  $\theta_1^\circ$  по ходу часовой стрелки с верхних берегов разрезов  $(-\theta_1^\circ, +\theta_1^\circ)$  плоскости  $\theta_2$  и  $(+d^{-1/2}, +\theta_1^\circ)$  плоскости  $\theta_1$  на нижние берега разрезов  $(+d^{-1/2}, +\theta_1^\circ)$  плоскости  $\theta_1$  и  $(-\theta_1^\circ, +\theta_1^\circ)$  плоскости  $\theta_2$  функции  $\lambda_2$  и  $\lambda_1$  принимают соответственно значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . На нижних берегах разрезов  $(+d^{-1/2}, +\theta_1^\circ)$  и  $(-\theta_1^\circ, +\theta_1^\circ)$  функции (2.23) принимают выражения

$$u_1 = (r_1 - c\theta\lambda_1)w_1(\Omega_1^+), \quad v_1 = -(p_1 - c\theta\lambda_1)w_1(\Omega_1^+) \quad (2.24)$$

$$u_2 = (r_2 + c\theta\lambda_2)w_2(\Omega_2^-), \quad v_2 = -(p_2 + c\theta\lambda_2)w_2(\Omega_2^-)$$

Функции  $u_2$  и  $v_2$  в выражениях (2.23), представляющие квазипоперечные волны, и функции  $u_1$  и  $v_1$  в выражениях (2.24) в точке разветвления  $\theta_1^\circ$  имеют одинаковые значения. Следовательно, функции  $u_1$  и  $v_1$  в выражениях (2.24), определенные на нижнем берегу разреза  $(+d^{-1/2}, +\theta_1^\circ)$  плоскости  $\theta_1$ , являются продолжением функции  $u_2$  и  $v_2$  в выражениях (2.23), определенных на верхнем берегу разреза  $(-\theta_1^\circ, +\theta_1^\circ)$  плоскости  $\theta_2$ , и выражают квазипоперечные волны.

Аналогично, функции  $u_1$  и  $v_1$  в выражениях (2.23), определенные на верхнем берегу разреза  $(+d^{-1/2}, +\theta_1^\circ)$  плоскости  $\theta_1$ , являются продолжением функции  $u_2$  и  $v_2$  в выра-

жениях (2.24), определенных на нижнем берегу разреза  $(-\theta_1^\circ, +\theta_1^\circ)$  плоскости  $\theta_2$ , и выражают квазипоперечные волны.

Таким образом на участках  $(+d^{-1/2}, +\theta_1^\circ)$  римановой поверхности (фиг. 2) функции (2.23) и (2.24) выражают квазипоперечные волны, существование квазипродольных волн в этом случае исключается. Эта особенность имеет прямую связь с существованием остроугольных кромок на фронтах квазипоперечных волн от точечного источника [5] при выполнении условия (2.19).

На участке

$$+d^{-1/2} \leq \theta \leq +\theta_1^\circ \quad (2.25)$$

нижнего берега разреза плоскости  $\theta_1$  функции (2.24) при  $k = 1$  выражают квазипоперечные волны, распространяющиеся с непрерывно убывающими углами  $\alpha_1$  и нормальными скоростями  $b_1$ , определяемыми формулами (2.15). На границах участка (2.25) углы  $\alpha_1$  и скорости  $b_1$  имеют значения

$$\pi/2 \geq \alpha_1 \geq \alpha_1(\theta_1^\circ) = \alpha_2(\theta_1^\circ) \quad (2.26)$$

$$d^{1/2} \geq b_1 \geq b_1(\theta_1^\circ) = b_2(\theta_1^\circ)$$

При выполнении условия (2.19) для упругих постоянных нормальные скорости квазипродольных и квазипоперечных волн выражаются первыми формулами (2.15), определенными на участках (2.20) и (2.25). Скорость квазипродольной волны на первом участке (2.20) при условии  $b - d - c > 0$  непрерывно убывает, при условии  $b - d - c < 0$  внутри этого участка имеет максимум [4, 6]. Скорость квазипоперечной волны внутри второго участка (2.20) имеет минимум, на участке (2.25) – непрерывно убывает.

Графики изменения нормальных скоростей в зависимости от направления распространения волн изображены на фиг. 3. На графике для квазипоперечных волн точками отмечены значения скоростей этих волн, соответствующие границам участков  $(d^{-1/2}, \theta_1^\circ)$  на плоскостях  $\theta_1$  и  $\theta_2$  римановой поверхности (фиг. 2): 1 – скорость  $b_2(d^{-1/2})$ , 2 – скорость  $b_2(\theta_1^\circ) = b_1(\theta_1^\circ)$ , 3 – скорость  $b_1(d^{-1/2}) = d^{1/2}$ .

Графики изменения скоростей  $b_1$  и  $b_2$  квазипоперечных волн (2.23) и (2.24), определенных на участках  $(+d^{-1/2}, +\theta_1^\circ)$  плоскостей  $\theta_1$  и  $\theta_2$  римановой поверхности (фиг. 2), в зависимости от значений  $\theta_1$  и  $\theta_2$  изображены на фиг. 4.

**3. Комплексные решения общего типа.** Рассмотрим общий случай построения комплексных решений. Если принять в уравнении (1.5)  $l(\Omega) = 1$ , а за новую переменную принять величину  $\theta$ , определенную выражением  $m(\Omega) = -\theta$ , то уравнение (1.5) принимает вид

$$\delta_k = t - \theta_k x + \lambda_k y + K_k(\theta_k) = 0 \quad (3.1)$$

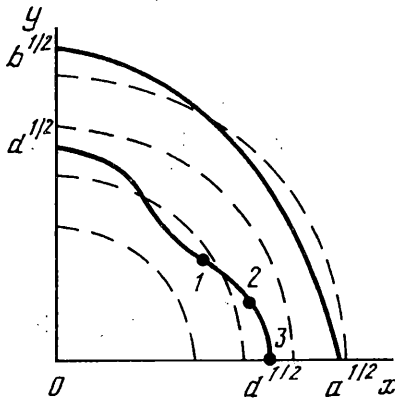
где  $\lambda_k$  – ветви (2.2) алгебраической функции  $\lambda$ ,  $K(\theta)$  – любая аналитическая функция  $\theta$ .

В данном случае решения (2.1) системы уравнений (1.1) принимают вид

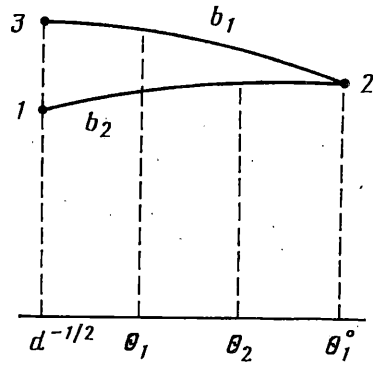
$$u_k = U_k(\theta_k), v_k = V_k(\theta_k) \quad (3.2)$$

где  $\theta_k$  ( $k = 1, 2$ ) – точки плоскостей  $\theta_1$  и  $\theta_2$  римановой поверхности (фиг. 1, 2), соответствие которых с точками плоскости  $xu$  выражается уравнениями (3.1).





Фиг. 3



Фиг. 4

Для рассматриваемого случая условия (2.13) можно представить выражениями

$$U'_k(\theta_k)/(r_k - c\theta_k\lambda_k) = -V'_k(\theta_k)/(p_k - c\theta_k\lambda_k) = w_k(\theta_k) \quad (3.3)$$

Общее вещественное решение системы уравнений (1.1) согласно условий (3.3) выражается функциями

$$u = \sum_{k=1}^2 \operatorname{Re} \int_{\theta_k}^{\theta_k} (r_k - c\zeta\lambda_k) \omega_k(\zeta) d\zeta \quad (3.4)$$

$$v = \sum_{k=1}^2 \operatorname{Re} \int_{\theta_k}^{\theta_k} -(p_k - c\zeta\lambda_k) \omega_k(\zeta) d\zeta$$

$$p_k = a\zeta^2 + d\lambda_k^2 - 1, \quad r_k = d\zeta^2 + b\lambda_k^2 - 1$$

$$\lambda_k = \left\{ H + (-1)^k \left[ H^2 - (a/b)(1/a - \zeta^2)(1/d - \zeta^2) \right]^{1/2} \right\}^{1/2}$$

$$H = \left[ (b+d) - (ab + d^2 - c^2)\zeta^2 \right] / (2bd)$$

Однородные нулевого порядка измерения решения системы уравнений (1.1), выражающие распространение упругих колебаний в анизотропной среде от точечного источника типа мгновенного импульса в начале координат, могут быть получены как частный случай полученных общих решений, приняв в уравнениях (3.1) значение  $K_k(\theta_k) = 0$ .

В этом случае уравнения (3.1), устанавливающие соответствие между точками римановой поверхности и точками плоскости  $xu$  принимают вид

$$1 - \theta_k \xi + \lambda_k \eta = 0, \quad (\xi = x/t, \eta = y/t) \quad (3.5)$$

Однородные нулевого измерения решения системы уравнений (1.1) выражаются функциями (3.4).

Функции  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  имеют вещественные значения на берегах разрезов  $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$  плоскости  $\theta_1$  и  $(-d^{-1/2}, +d^{-1/2})$  плоскости  $\theta_2$  при выполнении условия (2.4) (фиг. 1) и

на берегах разрезов  $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$ ,  $(\pm d^{-1/2}, \pm \theta_1^\circ)$  плоскости  $\theta_1$  и  $(-\theta_1^\circ, +\theta_1^\circ)$  плоскости  $\theta_2$  при условии (2.19) (фиг. 2).

Фронты квазипродольных и квазипоперечных волн (3.4) могут быть получены как огибающие прямых (3.5) при вещественных значениях  $\theta_k$  и  $\lambda_k$  и имеют выражения [3, 4]:

$$\xi = -\lambda'_1 / (\lambda_k - \theta_k \lambda'_k), \quad \eta_k = -1 / (\lambda'_k - \theta_k \lambda'_k) \quad (3.6)$$

определенные на соответствующих берегах разрезов плоскостей  $\theta_1$  и  $\theta_2$  вещественного определения функций  $\lambda_k$  (фиг. 1, 2).

Нормальные скорости распространения волн и углы, образованные нормальными к фронтам с осью  $\eta$ , определяются формулами

$$b_k = (\theta_k^2 + \lambda_k^2)^{-1/2}, \quad \text{tg} \alpha_k = \theta_k / \lambda_k \quad (3.7)$$

Функции  $\omega_1$  и  $\omega_2$  есть ветви произвольной аналитической функций  $\omega$ , однозначно определенной на римановой поверхности, вид которой зависит от соотношений упругих постоянных среды (фиг. 1, 2). Чтобы решение (3.4) выражало упругие колебания в безграничной среде от точечного источника типа мгновенного импульса, необходимо функцию  $\omega$  выбрать так, чтобы вещественные части функций  $\omega_1$  и  $\omega_2$  обращались в нуль на берегах разрезов плоскостей  $\theta_1$  и  $\theta_2$  вещественного определения функций  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответственно.

Особенности волновых закономерностей упругих колебаний в безграничной анизотропной среде от точечного источника типа мгновенного импульса при различных соотношениях упругих постоянных детально изучены в [4, 5]. Установлено соответствие между точками римановых поверхностей и волновых полей, изучены геометрические формы волновых фронтов, получены условия существования остроугольных кромок на фронтах квазипоперечных волн. Полученные результаты справедливы для упругих волн, представленных функциями (3, 4), так как все исследования в [4, 5] выполнены на основе анализа зависимостей (2.2) и (3.5) – (3.7). Решения уравнений движения (1.1), представленные согласно [1] функциями (1.2) в [4] и (1.1) в [5], подлежат замене решениями (3.4).

В заключение отметим, что полученные решения (2.14), (2.23), (2.24) и (3.4) как и в [1, 4, 5] однозначно определены и изучены на двулистных римановых поверхностях, вид которых зависит от соотношений упругих постоянных и детально изучен в [4, 5]. Однако уравнение (1.7) имеет четыре корня  $\pm \lambda_1$  и  $\pm \lambda_2$ , определяемых выражениями (2.2), следовательно, риманова поверхность состоит из четырех плоскостей. При упругих постоянных, удовлетворяющих условию (2.4), плоскости  $\theta_3$  и  $\theta_4$  имеют такой же вид и аналогичную склейку как и плоскости  $\theta_1$  и  $\theta_2$  на фиг. 1. На

противоположных берегах разрезов  $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$  плоскостей  $\theta_1$  и  $\theta_3$  и

$(-d^{-1/2}, +d^{-1/2})$  плоскостей  $\theta_2$  и  $\theta_4$  функции  $\pm \lambda_1$  и  $\pm \lambda_2$  имеют одинаковые значения.

Четырехлистная риманова поверхность состоит из комплектов плоскостей  $\theta_1, \theta_2$  и  $\theta_3,$

$\theta_4$ , склеенных крест-накрест вдоль разрезов  $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$  плоскостей  $\theta_1$  и  $\theta_3$  и

$(-d^{-1/2}, +d^{-1/2})$  плоскостей  $\theta_2$  и  $\theta_4$ . Комплексные решения общего типа и однородные

нулевого порядка измерения решения, определенные на плоскостях  $\theta_1$  и  $\theta_2$  и на плоскостях  $\theta_3$  и  $\theta_4$  представляют собой сопряженные функции комплексных переменных относительно вещественных осей и могут быть выражены вещественными частями решений, определенных на плоскостях  $\theta_1$  и  $\theta_2$  двулистной римановой поверх-

ности (фиг. 1). Аналогично для случая (2.19) полученные решения определяются на двулистной римановой поверхности, изображенной на фиг. 2.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Свекло В.А.* Упругие колебания анизотропного тела // Учен. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук. 1949. Вып. 17. № 114. С. 28–71.
2. *Франк Ф., Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Ч. 2. Л.; М.: ОНТИ, 1937. 998 с.
3. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. Л.; М.: Гостехиздат, 1956. 676 с.
4. *Осипов И.О.* К плоской задаче распространения упругих колебаний в анизотропной среде от точечного источника // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 3. С. 548–555.
5. *Осипов И.О.* О волновых полях и остроугольных кромках на волновых фронтах в анизотропной среде от точечного источника // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 5. С. 927–934.
6. *Осипов И.О.* Характер изменения скоростей распространения упругих волн в анизотропных средах // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1962. № 1. С. 3–10.

Петрозаводск

Поступила в редакцию  
4.04.1997