МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1998

УДК 539.375

© 1998 г. Е. В. ГЛУШКОВ, Н. В. ГЛУШКОВА, О. Н. ЛАПИНА

ПОКАЗАТЕЛИ СИНГУЛЯРНОСТИ УПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ В ТОЧКЕ ВЫХОДА ТРЕЩИНЫ НА ПОВЕРХНОСТЬ

Наряду с достаточно хорошо изученными к настоящему времени особенностями плоского напряженно-деформируемого состояния в угловых точках границы тел (ребра двугранных углов, фронт трещины и т.п.) в пространственном случае в вершинах многогранных углов возникают сингулярности "конического типа" [1] (или "трехмерные сингулярности"), исследование которых представляет собой существенно более сложную математическую проблему. Определение показателей особенности решения в многогранной угловой точке в зависимости от ее геометрии и свойств материала уже не сводится как в плоском случае к поиску корней некоторых трансцендентных алгебраических уравнений, а предполагает в общем случае дискретизацию либо по всему пространству, либо, после выделения фактора $r^{-\gamma}$ (r – расстояние до вершины, γ – искомый показатель особенности), по сферическим углам. В первом случае возникают системы 10–20 тысяч алгебраических уравнений (например, 11000 в работе [2]), во втором случае используются обычно от 500 и более уравнений [3, 4].

Развивается также и третий подход, состоящий в сведении задачи к граничным интегральным уравнениям (ГИУ), применении к ним преобразования Меллина по r и дискретизации преобразованных ГИУ уже только по одной угловой полярной координате, заданной на клиновидных сторонах многогранника. В отличие от первых двух подходов здесь хотя и используется достаточно сложная математическая техника, получаемые в результате системы имеют существенно меньшую размерность (5–30 уравнений), и появляется возможность получить в явном виде коэффициент интенсивности и угловые функции распределения напряжений в окрестности вершины. В рамках данного подхода уже были получены результаты для клиновидных штампов [5, 6], трещин [7] и включений [8], а также для вершины трехгранника с одной фиксированной гранью [9]. В публикуемой работе рассматривается важный частный случай сингулярности конического типа, возникающей в точке пересечения фронта трещины с поверхностью тела. Данная задача рассматривалась ранее как правило для случая фронта трещины, ортогонального к поверхности [2–4, 10, 11]; в настоящей работе получена зависимость показателя особенности от угла наклона фронта трещины к поверхности.

1. Рассматривается упругое изотропное полупространство $-\infty \le x, y \le \infty$, $z \le 0$ с выходящим на поверхность бесконечно тонким разрезом, занимающим в плоскости $y = 0$ клиновидную область Ω: $0 \le r \le \infty$, $-\theta \le \varphi \le 0$ ($x = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$); берега разреза свободны от напряжений. Требуется определить асимптотику напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины $r = 0$ при заданном внешнем поле напряжений τ_0. Суперпозиция интегральных представлений решения задач для трещины в безграничном пространстве и для полупространства с заданной поверхностной нагрузкой приводит к следующей системе интегральных уравнений относительно неизвестного скачка смещений $\mathbf{u}(x, y, z)$ на разрезе $\mathbf{v}(x, z) = \mathbf{u}|_{y=0^-} - \mathbf{u}|_{y=0^+}$, $(x, z) \in \Omega$:

$$\iint_\Omega [\mathbf{k}_1(x-\xi, z-\zeta) + \mathbf{k}_2(x-\xi, z, \zeta)]\mathbf{v}(\xi, \zeta)(d\xi)d\zeta = \mathbf{f}(x, z), \quad (x, z) \in \Omega$$

$$\mathbf{k}_1 = \frac{1}{4\pi^2}\int\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_1(\alpha_1, \alpha_2)\exp[-i(\alpha_1(x-\xi) + \alpha_2(z-\zeta))]d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$\mathbf{k}_2 = \frac{1}{4\pi^2}\int\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_2(\alpha_1, \alpha_2, z, \zeta)\exp[-i\alpha_1(x-\xi) + \alpha(z+\zeta)]d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$\mathbf{K}_1 = \frac{\mu}{2(2+\beta)\alpha}\begin{Vmatrix} 2(1+\beta)\alpha^2 - \beta\alpha_2^2 & 0 & \beta\alpha_1\alpha_2 \\ 0 & 2(1+\beta)\alpha^2 & 0 \\ \beta\alpha_1\alpha_2 & 0 & 2(1+\beta)\alpha^2 - \beta\alpha_1^2 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{K}_2 = \frac{i\mu}{2+\beta}\begin{Vmatrix} (1,1) & 0 & (1,3) \\ 0 & (2,2) & 0 \\ (3,1) & 0 & (3,3) \end{Vmatrix}$$

$$(1, 1) = \frac{i}{\alpha^2}\left\{\frac{2+\beta}{2\alpha}(\alpha_1^4 + \alpha_2^4) + \alpha_1^2\alpha_2^2\left[(3+\beta)(z+\zeta) + 2(1+\beta)\alpha\zeta z + \frac{3+\beta}{1+\beta}\frac{1}{\alpha}\right]\right\}$$

$$(1, 3) = \alpha_1\left\{\frac{2+\beta}{2} + (1+\beta)\frac{\alpha_2^2}{\alpha}\left(z + \frac{3+\beta}{1+\beta}\zeta + 2\alpha\zeta z\right)\right\} \tag{1.1}$$

$$(3, 1) = -\alpha_1\left\{\frac{2+\beta}{2} + \frac{\alpha_2^2}{\alpha}[(3+\beta)z + (1+\beta)\zeta + 2(1+\beta)\alpha\zeta z]\right\}$$

$$(3, 3) = i\left\{(1+\beta)\alpha_2^2(z + \zeta + 2\alpha\zeta z) + \frac{1}{2\alpha}(\beta\alpha_2^2 + (2+\beta)\alpha^2)\right\}$$

$$(2, 2) = \frac{i}{\alpha}\left\{\alpha_2^2\alpha\left(2\beta + (3+\beta)\frac{\alpha_2^2}{\alpha^2}\right)(z+\zeta) + 2(1+\beta)\alpha_2^4 z\zeta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1+\beta}\left(4(\beta^2 + 3\beta + 1)\alpha_2^2 - (\beta^2 + 2\beta - 1)\frac{\alpha_2^4}{\alpha^2} + 2\beta^2\alpha^2\right)\right\}$$

$$\mathbf{f}(x, z) = -\boldsymbol{\tau}_0(x, y, z)|_{y=0}$$

$$\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad \beta = \lambda/\mu$$

где λ, μ – константы Ляме.

Составляющая ядра k_1 совпадает с ядром системы интегральных уравнений для трещины в безграничной среде [7], а часть k_2 обусловлена наличием поверхности полупространства $z = 0$. Несмотря на появление k_2, заполненность матрицы-ядра остается прежней, т.е. система ГИУ (1.1) фактически распадается на независимые уравнения относительно нормальной и касательных компонент скачка $\mathbf{v}$. Уравнения (1.1) получаются из условия равенства нулю суммарного поля напряжений $\tau = \tau_0 + \tau_1$ на берегах трещины. Дополнительное поле напряжений τ_1, обусловленное разрывом поля смещений $\mathbf{u}$ на разрезе $y = 0$, $(x, y) \in \Omega$, вне его выражается через скачок $\mathbf{v}$ с помощью интегрального оператора, совпадающего, в частности, в плоскости разреза $y = 0$ с левой частью уравнения (1.1).

Преобразование Меллина по $r = \sqrt{x^2 + z^2}$:

$$M_s[f] = \int_0^{\infty} f(r) r^{s-1} dr = F(s), \quad M_s^{-1}[F] = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) r^{-s} ds = f(r)$$

приводит интегральные уравнения (1.1) к одномерным уравнениям

$$\int_{-\theta}^{0} [\mathbf{K}_1(s, \varphi - \psi) + \mathbf{K}_2(s, \varphi, \psi)]\mathbf{V}(s-1, \psi) d\psi = \mathbf{F}(s, \varphi), \quad -\theta \le \varphi \le 0 \tag{1.2}$$

относительно преобразования Меллина неизвестного скачка смещений $\mathbf{V}(s-1, \psi) = M_{s-1}[\mathbf{v}]$.

Элементы матрицы $\mathbf{K}_1$ представимы рядами того же вида, что и в задачах о трещине в безграничной среде или о клиновидном штампе [5, 7] (подробнее описание техники вывода см. [6]), а для получения $\mathbf{K}_2$ ключевую роль играет преобразование Меллина от интегральных операторов вида

$$I_{p_1 p_2 p} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \sin^{p_1}\beta \cos^{p_2}\beta \alpha^p e^{-i\alpha_1(x-\xi)} e^{\alpha(z+\zeta)} \alpha d\beta d\alpha$$

которые в силу соотношения [12]:

$$\int_0^{\infty} t^{\mu} J_{\nu}(at) e^{-pt} dt = \Gamma(\mu + \nu + 1)(p^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}(\mu+1)} P_{\mu}^{-\nu}(p/\sqrt{p^2 + a^2})$$

также сводятся к рядам, но уже с функциями Лежандра $P_{\mu_1}^{-m}(-\sin\varphi)$, $P_{\mu_2}^{-m}(-\sin\psi)$ вместо осциллирующих экспонент $e^{-im(\varphi-\psi)}$.

Исходя из интегрального представления компонент тензора напряжений вне разреза через скачок $\mathbf{v}$, несложно убедиться, что полюса их преобразования Меллина по r, дающие искомый показатель особенности при $r \longrightarrow 0$ [6], совпадают с полюсами $\mathbf{V}(s-1, \psi)$, а коэффициенты интенсивности и угловое распределение напряжений определяются вычетами в этих полюсах. В частности, для напряжений $\boldsymbol{\tau}_1(r, \varphi) = \{\tau_{xy}, \sigma_y, \tau_{yz}\}$, возникающих в плоскости разреза $y = 0$, имеем

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\tau}_1(r, \varphi) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{T}_k(\varphi) r^{-\gamma_k}, \quad r \longrightarrow 0 \\ -\infty \ldots < \operatorname{Re}\gamma_k < \operatorname{Re}\gamma_{k-1} < \ldots < \operatorname{Re}\gamma_1 \le 1,5 \\ \mathbf{T}_k(\varphi) = \int_{-\theta}^{0} [\mathbf{K}_1(s_k, \varphi - \psi) + \mathbf{K}_2(s_k, \varphi, \psi)] \operatorname{res} \mathbf{V}(s-1, \psi)|_{s=s_k} d\psi \end{gathered} \tag{1.3}$$

где $\gamma_k = s_k$ – полюса $\mathbf{V}(s-1, \psi)$ по параметру s.

Допустимыми с точки зрения конечности потенциальной энергии деформации для пространственных полей напряжений являются значения показателей γ, лежащие в полуплоскости $\mathrm{Re}\gamma \le 1.5$ ($\gamma < 1.5$ при $\mathrm{Im}\gamma = 0$) комплексной плоскости γ (для плоских задач $\mathrm{Re}\gamma < 1$).

Для определения приближенных значений полюсов s_k проводится дискретизация уравнений (1.2). Используется разложение $\mathbf{V}(s-1, \psi)$ по ортогональным полиномам Якоби с весом, учитывающим поведение скачка на границе области Ω:

$$\mathbf{V}(s-1, \psi) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{c}_k p_k(\bar{\psi}), \quad p_k(\bar{\psi}) = (1-\bar{\psi})^{\delta_1}(1+\bar{\psi})^{\delta_2} P_k^{(\delta_1, \delta_2)}(\bar{\psi}), \quad \psi = \frac{\theta}{2}(\bar{\psi}-1)$$

и затем невязка уравнения (1.2), являющаяся непрерывной функцией на интервале $-\theta \le \varphi \le 0$, проектируется на полную на данном отрезке систему полиномов Лежандра $P_l(\bar{\varphi})$, $\varphi = \dfrac{1}{2}\theta(\bar{\varphi} - 1)$. На нижней границе области Ω ($\psi = -\theta$, $\bar{\psi} = -1$, фронт трещины), поведение $\mathbf{v}(r, \varphi)$ хорошо известно, что дает $\delta_2 = 1/2$. На другом краю ($\psi = 0$, $\bar{\psi} = 1$, поверхность полупространства $z = 0$), относительное смещение берегов трещины может быть произвольным, что делает естественным выбор $\delta_1 = 0$ ($\mathbf{v}(r, \varphi) \sim O(1)$ при $\varphi \longrightarrow 0$). Однако при таком выборе δ_1 устойчивые численные результаты были получены только для касательных компонент τ_{xy}, τ_{yz}, в то время как для нормальной компоненты σ_y их удалось получить только при $\delta_1 = 1$ (это следующее после $\delta_1 = 0$ допустимое с точки зрения сходимости возникающих здесь рядов значение показателя δ_1). По-видимому, при нормальном растяжении-сжатии разреза допустимыми для возникновения сингулярности в вершине являются только такие собственные формы, при которых происходит смыкание верхних кромок берегов разреза.

Искомые полюса s_k совпадают с нулями определителей матриц $\mathbf{A}(s) = \|a_{lk}\|$ (для нормальной компоненты) и $\mathbf{B}(s) = \|b_{lk}\|$ (для касательных) бесконечных алгебраических систем относительно $\mathbf{c}_k$, к которым в результате дискретизации сводятся уравнения (1.2). Элементы данных матриц в рассматриваемом случае имеют вид

$$a_{lk} = a_{lk}^{(1)} + a_{lk}^{(2)}$$

$$a_{lk}^{(1)} = 2(\beta + 1)I_0$$

$$a_{lk}^{(2)} = -\Big\{2\beta(J_{20}^{(2)} + J_{20}^{(3)}) + (3+\beta)(J_{40}^{(2)} + J_{40}^{(3)}) + 2(1+\beta)J_{40}^{(4)} + \tag{1.4}$$

$$+ \frac{1}{1+\beta}(2\beta^2 J_{00}^{(1)} - (\beta^2 + 2\beta - 1)J_{40}^{(1)} + 4(\beta^2 + 3\beta + 1)J_{20}^{(1)})\Big\}$$

$$b_{lk} = b_{lk}^{(1)} + b_{lk}^{(2)}$$

$$b_{lk}^{(1)} = \left\| \begin{matrix} \left(2 + \frac{3}{2}\beta\right)I_0 + \frac{\beta}{4}I_+ & \frac{\beta}{4}I_- \\ \frac{\beta}{4}I_- & \left(2 + \frac{3}{2}\beta\right)I_0 - \frac{\beta}{4}I_+ \end{matrix} \right\|, \quad b_{lk}^{(2)} = \left\| \begin{matrix} (1,1) & (1,2) \\ (2,1) & (2,2) \end{matrix} \right\|$$

$$(1,1) = -\left\{\frac{2+\beta}{2}(J_{04}^{(1)} + J_{40}^{(1)}) + (3+\beta)(J_{22}^{(2)} + J_{22}^{(3)}) + 2(1+\beta)J_{22}^{(4)} + \frac{3+\beta}{1+\beta}J_{22}^{(1)}\right\}$$

$$(1,2) = -\left\{\frac{2+\beta}{2}\left(J_{01}^{(1)} + (1+\beta)\left(J_{21}^{(2)} + \frac{3+\beta}{1+\beta}J_{21}^{(3)} + 2J_{21}^{(4)}\right)\right\}$$

$$(2,1) = \left\{\frac{2+\beta}{2}\left(J_{01}^{(1)} + (1+\beta)\left(\frac{3+\beta}{1+\beta}J_{21}^{(2)} + J_{21}^{(3)} + 2J_{21}^{(4)}\right)\right\}$$

$$(2,2) = -\left\{(1+\beta)(J_{20}^{(2)} + J_{20}^{(3)} + 2J_{20}^{(4)}) + \frac{\beta}{2}J_{20}^{(1)} + \frac{2+\beta}{2}J_{00}^{(1)}\right\}$$

$$I_0 = \sum_{m=0}^{\infty}{}' g_m(s)\mathrm{Re}\, d_m \tag{1.5}$$

$$I_+ = \sum_{m=0}^{\infty}{}' \{g_m^+(s)\mathrm{Re}\, d_m^+ + sg(2)g_m^-(s)\mathrm{Re}\, d_m^-\}$$

$$I_- = \sum_{m=0}^{\infty}{}' \{g_m^+(s)\mathrm{Im}\, d_m^+ + sg(2)g_m^-(s)\mathrm{Im}\, d_m^-\}$$

$$g_m(s) = G_1(m,s)G_2(m,s), \quad g_m^{\pm}(s) = G_1(m,s)G_2(m\pm 2, s)$$

$$G_1(m,s) = \Gamma\left(\frac{s+|m|}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{|m|-s+2}{2}\right)$$

$$G_2(m,s) = \Gamma\left(\frac{|m|-s+3}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{|m|+s-1}{2}\right)$$

$$d_m = d1(m,k)d2(m,l), \quad d_m^{\pm} = d1(m\pm 2,k)d2(m,l)$$

$$d1(m,k) = \int_{-1}^{1}(1-\overline{\psi})^{\delta_1}(1+\overline{\psi})^{\frac{1}{2}}P_k^{\left(\delta_1,\frac{1}{2}\right)}(\overline{\psi})e^{im\psi}d\overline{\psi}, \quad d2(m,l) = \int_{-1}^{1}P_l(\overline{\varphi})e^{-im\varphi}d\overline{\varphi}$$

$$J_{00}^{(n)} = E_0^{(n)}, \quad J_{01}^{(n)} = E_1^{(n)}, \quad J_{20}^{(n)} = (E_0^{(n)} + E_2^{(n)})/2$$

$$J_{21}^{(n)} = (E_1^{(n)} + E_3^{(n)})/4, \quad J_{40}^{(n)} = (E_4^{(n)} + 4E_2^{(n)} + 3E_0^{(n)})/8$$

$$J_{04}^{(n)} = (E_4^{(n)} - 4E_2^{(n)} + 3E_0^{(n)})/8, \quad J_{22}^{(n)} = (E_0^{(n)} - E_4^{(n)})/8 \quad (n = 1,2,3,4)$$

$$E_p^{(1)} = \sum_{m=0}^{\infty}{}' T1_m T33_m, \quad E_p^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty}{}' T2_m T33_m \tag{1.6}$$

$$E_p^{(3)} = \sum_{m=0}^{\infty}{}' T1_m T44_m, \quad E_p^{(4)} = \sum_{m=0}^{\infty}{}' T2_m T44_m$$

$$T33 = T3_{m+p} + sg(p)T3_{m-p}, \quad T44_m = T4_{m+p} + sg(p)T4_{m-p}$$

$$sg(p) = \begin{cases}(-1)^m, & m < p \\ 1, & m \ge p \quad (p = 1,2,3,4)\end{cases}$$

Таблица

ν \ θ/π	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0.09	0.25	0.36	0.44	0.50	0.56	0.61	0.69	0.83
0.1	0.08	0.22	0.34	0.43	0.49	0.55	0.61	0.69	0.84
0.2	0.06	0.19	0.31	0.40	0.48	0.54	0.61	0.70	0.86
0.3	0.04	0.15	0.27	0.37	0.46	0.53	0.62	0.72	0.90
0.4	0.02	0.09	0.19	0.31	0.42	0.52	0.62	0.75	0.97
0.5	–0.99	–0.73	–0.20	0.13	0.34	0.50	0.64	0.80	1.08

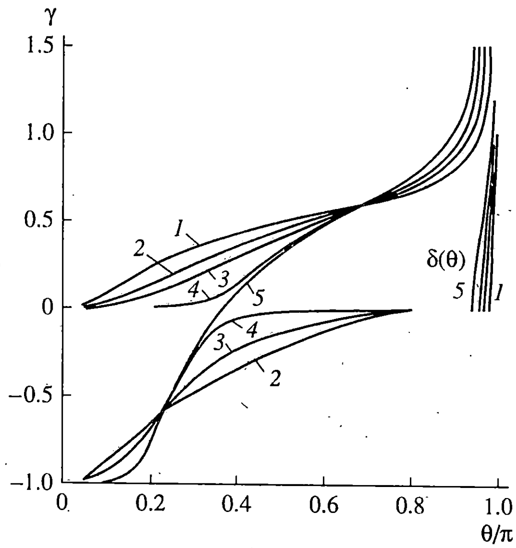
$$
\begin{aligned}
T1_m(l) &= \frac{\Gamma(s+m)}{\Gamma(1+m)}\int_{-1}^{1} P_{s-1}^{-m}(-\sin\varphi)P_l(\overline{\varphi})d\overline{\varphi} \\
T2_m(l) &= \frac{\Gamma(s+m+1)}{\Gamma(1+m)}\int_{-1}^{1} P_{s}^{-m}(-\sin\varphi)P_l(\overline{\varphi})\sin\varphi d\overline{\varphi} \\
T3_m(k) &= \frac{\Gamma(3-s+m)}{\Gamma(1+m)}\int_{-1}^{1} P_{2-s}^{-m}(-\sin\psi)p_k(\overline{\psi})d\overline{\psi} \\
T4_m(k) &= \frac{\Gamma(4-s+m)}{\Gamma(1+m)}\int_{-1}^{1} P_{3-s}^{-m}(-\sin\psi)p_k(\overline{\psi})\sin\psi d\overline{\psi}
\end{aligned}
\qquad (1.7)
$$

Штрих в Σ' означает, что первое слагаемое при $m = 0$ берется с множителем 1/2.

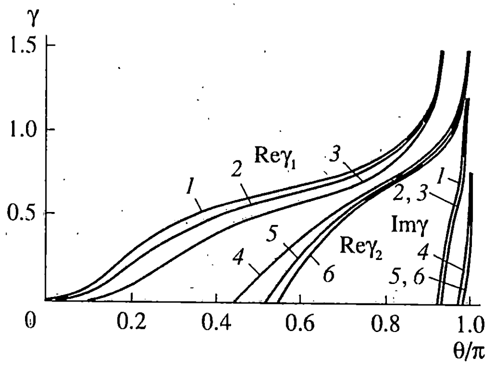
2. Основную сложность при проведении расчетов по формулам (1.4)–(1.7) представляет медленная сходимость рядов I_0, $I_\pm$ и трудности, связанные с вычислением интегралов (1.6), (1.7) при больших m. Для их преодоления были использованы асимптотические разложения интегралов по $\lambda = \frac{1}{2}m\theta \longrightarrow \infty$ (вклад граничных точек осциллирующих интегралов для (1.6) и вклад граничной точки максимума для (1.7)), которые вместе с асимптотикой $g_m \sim \frac{1}{2}m + O(m^{-1})$, $m \longrightarrow \infty$ позволили выделить и просуммировать медленно сходящиеся составляющие рядов в явном виде. Тем не менее при $\theta \longrightarrow 0$ параметр λ перестает быть большим, что ограничивает применимость метода снизу некоторой величиной угла наклона фронта трещины θ_0: $0 < \theta_0 < \theta < \pi$, зависящей только от мощности используемого компьютера (чем меньше θ, тем длиннее приходится суммировать ряды по m до выхода на требуемую точность)[1].

На фиг. 1 приведены зависимости от θ сингулярного показателя γ_1 и следующего несингулярного показателя γ_2 нормальной компоненты напряжений σ_y для коэффициентов Пуассона $\nu = 0$; 0.3; 0.4; 0.49; 0.5 (линии *1–5* соответственно), полученные при размерности системы $N = 5$. В отличие от клиновидной трещины или штампа, для которых сингулярные показатели лежат в полосе $0 < \mathrm{Re}\gamma < 1$, здесь с ростом θ кривые $\gamma_1(\theta)$, оставаясь вещественными, пересекают линию $\mathrm{Re}\gamma = 1$. Достигнув при некотором значении угла $\theta = \theta^*$ величины 1.5, корень s_1 сливается с другим, приходящим из верхней полуплоскости $\mathrm{Re}\gamma > 1.5$ корнем s_1^*. При $\theta = \theta^*$ корень s_1 становится двукрат-

[1] Авторы признательны С.А. Назарову, указавшему на неточность полученных ранее результатов [7] при малом растворе клиновидной трещины. При достаточном удлинении рядов кривые на правом краю фиг. 2 [7] не загибаются вверх, а идут к значению $\gamma = 0$, совпадая в определенном диапазоне малых углов θ со значениями, которые дает асимптотика работы [13].



Фиг. 1



Фиг. 2

ным, т.е. в разложении (1.3) появляется логарифмический множитель $r^{-\gamma_1}\ln r$. При $\theta > \theta^*$ появляется два комплексно-сопряженных значения $1.5 \pm i\delta$, которым в (1.3) соответствует особенность с осцилляцией вида $r^{-1.5}\cos(\delta \ln r + \kappa)$. Зависимости $\delta(\theta)$ приведены в правой части фиг. 1. Интересно отметить, что все кривые $\gamma_1(\theta)$ для различных ν пересекаются в одной точке, т.е. при $\theta = \pi/6$ значение показателя сингулярности $\gamma_1 = 0.59$ не зависит от упругих свойств материала.

При $\theta = \pi/2$ полученные значения γ_1 совпадают с известными результатами [3, 4]. При неортогональном к поверхности фронте трещины ($\theta \neq \pi/2$) значения γ_1 также совпадают со значениями $\gamma_1 = 0.329$; 0.498; 0.592, полученными для $\theta/\pi = 0.37$; 0.56; 0.69, $\nu = 0.32$ методом конечных элементов с выделением фактора $r^{-\gamma}$ [3].

При уменьшении θ значения γ_1 как и в случае клиновидной трещины стремятся к нулю, причем с увеличением ν кривые $\gamma_1(\theta)$ прижимаются при $\theta \longrightarrow 0$ (как и кривые $\gamma_2(\theta)$ при $\theta \longrightarrow \pi$) к линии $\gamma = 0$ вплоть до слияния с ней при $\nu = 0.5$. При этом кривая $\gamma_2(\theta)$ непрерывно продолжается при $\theta > 0.366\pi$ кривой $\gamma_1(\theta)$, а значения вдоль $\gamma = 0$ перестают находиться как корни $\det \mathbf{A}(s)$, т.е. при $\nu = 0.5$ показатель $\gamma \equiv 0$ по-видимому становится устранимым. В таблице приводятся значения γ_1 для некоторых фиксированных θ и ν, полученные с двумя верными знаками при $N = 10$ на PC 386.

О скорости сходимости значений γ_1 к точному можно судить по тестовым результатам для $\theta = \pi/2$, $\nu = 0$ (точное значение $\gamma_1 = 0.5$), приведенным ниже для различных N:

N	5	7	10	15	20
γ_1	0.4935	0.4967	0.5021	0.4987	0.5006

Три точных знака здесь достигается при $N > 20$.

Для касательных компонент напряжений τ_{xy}, τ_{yz} наряду с γ_1 сингулярным показателем при θ больших примерно $\pi/2$ становится и γ_2 (фиг. 2). Линии *1–3* здесь – $\gamma_1(\theta)$, *4–6* – $\gamma_2(\theta)$ для $\nu = 0$; 0.3; 0.5 соответственно. Результаты получены при $N = 10$; в качестве контроля, как и для нормальной компоненты, использовались значения γ_1 при $\theta = \pi/2$ [3, 4].

Авторы благодарят В.А. Бабешко, В.М. Александрова, С.А. Назарова, D. Leguillon, Е.И. Шифрина за полезное обсуждение различных аспектов решения задачи.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 95-01-00266а) и Международного научного фонда (грант № J5P100).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
2. *Becker I., Schnack E.* Numerical calculation of singularities at reentrant edges and corners for three dimensional crack problems // ZAMM. 1990. Bd. 70. № 11. P. 529–530.
3. *Leguillon D.* Computation of 3D-singularities in elasticity // Boundary Value Problems and Integral Equations in Nonsmooth Domains / Eds. M. Costabel, et all. New-York: M. Dekker, 1995. P. 161–170.
4. *Ghahremani F., Shih C.F.* Corner Singularities of three-dimensional planar interface cracks // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1992. V. 59. № 1. P. 61–68.
5. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В.* Об особенностях в угловых точках пространственных штампов в контактных задачах // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257. № 2. С. 289–294.
6. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
7. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В.* Об особенностях поля упругих напряжений в окрестности вершины клиновидной пространственной трещины // Изв. АН СССР. МТТ. 1992. № 4. С. 82–86.
8. Morari G.A., Popov G.Ya. Behaviour of the stresses near plane wedgeshaped defects // Fracture Mechanics: Successes and Problems: Collect. Abstracts 8th Intern. conf. Fract., Kiev, 1993. Lviv: Karpenko Phys.-Mech. Inst. 1993. P. 71.
9. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Лапина О.Н.* Особенность напряжений в окрестности вершины упругого трехгранника // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 15. С. 1113–1116.
10. *Benthem J.P.* State of stress at the vertex of a quarter-infinite crack in a half-space // Intern. J. Solids and Structures. 1977. V. 13. № 5. P. 479–492.
11. *Bazant Z.P., Estenssoro L.F.* Surface singularity and crack propagation // Intern. J. Solids and Structures. 1979. V. 15. № 9. P. 405–426.
12. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука, 1974. 542 с.
13. *Мовчан Н.В., Назаров С.А.* Асимптотика показателей сингулярностей для угловых в плане трещин // Вест. ЛГУ. Сер. 1. 1990. Вып. 3. С. 34–38.

Краснодар

Поступила в редакцию 9.IV.1996