

УДК 539.3

© 1998 г. Э. М. КАРТАШОВ, М. М. ЯКУНКИН.

НОВЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ В ОБЛАСТИ С РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕЙ

Исследование проблемы термического удара в терминах соответствующих моделей динамической термоупругости получило за последние десятилетия широкое развитие [1–6]: изучены физические закономерности термонапряженного состояния в изотропных и анизотропных упругих телах на основе классических феноменологий Фурье и Максвелла–Каттанео–Лыкова о конечной скорости распространения теплоты в твердых телах; развита обобщенная теория сопряжения термомеханических полей с полями различной физической природы (электрических, магнитных); сформулированы определяющие соотношения линеаризованной теории с учетом тепловой памяти. Систематизация результатов, накопленных в этой области термомеханики, дана в [5].

Публикуемая работа продолжает исследования [6] и посвящена сравнительно новым задачам динамической термоупругости в области с движущейся границей. Изменение размера области может происходить вследствие выгорания материала на поверхности тела, плавления с непрерывным сдуванием расплавленной части, за счет поверхностного разрушения [5]. Наличие движения границы в постановке задачи динамической термоупругости приводит к определенным трудностям при нахождении аналитических решений такого рода задач, так как не удается классическими подходами совместить решение основных уравнений задачи с движением границы. Последнее указывает на необходимость разработки специального математического аппарата, который оказывается весьма эффективным для ряда конкретных законов движения границы.

1. Основные соотношения. Пусть D_t – конечная или частично ограниченная выпуклая область пространства $M(x, y, z)$, находящаяся в условиях термонапряженного состояния; S_t – кусочно-гладкая поверхность, которая ограничивает область D_t и положение которой зависит от времени t ; \mathbf{n} – внешняя нормаль к S_t ; $T(M, t)$ – распределение температуры в области D_t при $t > 0$; T_0 – начальная температура, при которой тело находится в недеформируемом и ненапряженном состоянии.

Пусть $\sigma_{ij}(M, t)$, $\varepsilon_{ij}(M, t)$, $U_i(M, t)$ ($i, j = x, y, z$) соответственно компоненты тензоров напряжения, деформации и вектора перемещения, удовлетворяющие основным уравнениям термомеханики [1]: уравнениям движения (с учетом объемных сил $F_i(M, t)$ геометрическим соотношениям, физическим уравнениям (в индексных обозначениях):

$$\sigma_{ij,j}(M, t) + F_i(M, t) = \rho \ddot{U}_i(M, t) \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_{ij}(M, t) = \frac{1}{2} [U_{i,j}(M, t) + U_{j,i}(M, t)] \quad (1.2)$$

$$\sigma_{ij}(M, t) = 2\mu\epsilon_{ij}(M, t) + [\lambda\epsilon_{ii}(M, t) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T(M, t) - T_0)]\delta_{ij} \quad (1.3)$$

$$(M \in D_p, t > 0)$$

где ρ – плотность; $\mu = G$, $\lambda = 2G\nu/(1 - 2\nu)$ – изотермические коэффициенты Ламе; G – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона; α_T – коэффициент линейного теплового расширения; δ_{ij} – символ Кронекера; E – модуль упругости; $T(M, t)$ – температурная функция, удовлетворяющая в общем случае обобщенному уравнению теплопроводности, связывающему приращение температуры со скоростью изменения объема деформируемой области [7]:

$$\partial T(M, t)/\partial t = a\Delta T(M, t) - (3\lambda + 2\mu)(\alpha_T/c\rho)T_0\dot{\epsilon}_{ii}(M, t), \quad M \in D_p, \quad t > 0 \quad (1.4)$$

Рассмотрим один из интересных в практическом отношении случаев: упругое полупространство с равномерно движущейся границей $D_r = (z \geq l + vt, t \geq 0; l, v = \text{const})$. Нагрев полупространства, первоначально находящегося при температуре T_0 , происходит температурным или тепловым путем, или нагревом средой. Пусть $T(z, t)$ – температура полупространства. Возникающие вследствие наличия температурного градиента напряжения будут зависеть только от z и t , т.е. $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(z, t)$; при этом перемещения $U_x = U_y = 0$, $U_z = U_z(z, t)$. Уравнения (1.1)–(1.3) (без учета объемных сил $F_i = 0$) дают для этого случая:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial t^2} = \frac{(1 + \nu)}{(1 - \nu)} \alpha_T \rho \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial t^2} \quad z > l + vt, \quad t > 0 \quad (1.5)$$

или в безразмерных переменных

$$\lambda_0^2 \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z'^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial Fo^2} = \frac{\partial^2 T(z', Fo)}{\partial Fo^2}, \quad z' > 1 + PeFo, \quad Fo > 0$$

$$z' = z/l, \quad Fo = at/l^2, \quad Pe = vl/a, \quad S = \alpha_T(3\lambda + 2\mu) = \alpha_T E/(1 - 2\nu), \quad (1.6)$$

$$\alpha_0 = v_p l/a, \quad T(z', Fo) = [T(z, t) - T_0]/T_0$$

$$\sigma_{zz}(z', Fo) = \sigma_{zz}(z, t)/(sT_0), \quad v_p = \sqrt{\frac{2G(1 - \nu)}{\rho(1 - 2\nu)}} = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$$

где v_p – скорость звука в материале.

Уравнение (1.5) впервые получила Даниловская [8] из соотношений (1.1)–(1.3) и независимо от нее Мура (ссылки в [5]), который, по-видимому, не знал о ранней и более общей работе [8]. Уравнение (1.5) явилось предметом многочисленных исследований в термомеханике в качестве базового для модельных представлений теплового удара в зависимости от условий нагрева границы изучаемой области, геометрической формы тела (пространство, полупространство, бесконечная пластина), особенностей физико-механических характеристик нагреваемого материала. Наиболее детально изучено упругое полупространство $z \geq 0$, что объясняется многочисленными приложениями этой области [5] и возможностью записать аналитическое решение задачи в достаточно обозримой форме. Последнее имеет немаловажное значение для целей параметрического качественного анализа динамической реакции области на тепловой удар. При этом предполагается, что в исходной постановке задачи в начальный момент область свободна от напряжений и что в процессе нагревания на границе области напряжения отсутствуют $\sigma_{zz}(z, 0) = 0, z > 0, (\partial \sigma_{zz}/\partial t)|_{t=0} = 0, z > 0, \sigma_{zz}(0, t) = \sigma_{zz}(z, t)|_{z=\infty} = 0, t > 0$.

В случае наложения температурных полей и полей иной физической природы (ссылки в [5]) краевые условия для уравнения (1.6) становятся неоднородными и могут содержать функции общего вида, интегрируемые в D_r . В сочетании с движением границы области $z \geq l + vt, t \geq 0$ нахождение аналитических решений такого рода ди-

намических задач (даже в линейной постановке) связано с большими техническими трудностями и является длительным процессом. Эти трудности можно существенно избежать на основе предлагаемого ниже метода.

2. Новые интегральные представления. Рассмотрим вопрос о нахождении в области $\Omega = (x > 0, t > 0)$ интегрального представления ограниченного на бесконечности достаточно гладкого аналитического решения задачи

$$a_1 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} + 2a_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = F(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \quad (2.1)$$

$$U(x, t)|_{t=0} = \Phi_0(x), \quad x > 0 \quad (2.2)$$

$$\partial U(x, t) / \partial t|_{t=0} = \Phi_1(x), \quad x > 0 \quad (2.3)$$

$$U(x, t)|_{x=0} = \Psi(t), \quad t > 0 \quad (2.4)$$

$$|U(x, t)| < +\infty, \quad (x, t) \in \bar{\Omega} \quad (2.5)$$

К уравнению (2.1) приводится (1.6) в системе координат (x, Fo) , где $x = z' - (1 + \text{Re}Fo)$, $Fo > 0$. Используя [10], можно показать, что функция Грина $G(x, t, x', \tau)$ для гиперболического уравнения (2.1) с условием (2.2)–(2.5) по переменным (x, t) является решением следующей задачи:

$$a_1 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 2a_2 \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = 0, \quad x > 0, \quad t > \tau \quad (2.6)$$

$$G|_{t=\tau} = 0, \quad x > 0 \quad (2.7)$$

$$(\partial G / \partial t)|_{t=\tau} = -\delta(x - x'), \quad x > 0, \quad x' > 0 \quad (2.8)$$

$$G|_{x=0} = G|_{x=\infty} = 0, \quad t > \tau \quad (2.9)$$

а по переменным (x', τ) :

$$a_1 \frac{\partial^2 G}{\partial x'^2} + 2a_2 \frac{\partial^2 G}{\partial x' \partial \tau} - \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} = 0, \quad x' > 0, \quad \tau < t \quad (2.10)$$

$$G|_{\tau=t} = 0, \quad x' > 0 \quad (2.11)$$

$$(\partial G / \partial \tau)|_{\tau=t} = -\delta(x' - x), \quad x' > 0 \quad (2.12)$$

$$G|_{x'=0} = G|_{x'=\infty} = 0, \quad \tau < t \quad (2.13)$$

где $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака.

Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[U(x', \tau) \frac{\partial G(x, t, x', \tau)}{\partial \tau} - G(x, t, x', \tau) \frac{\partial U(x', \tau)}{\partial \tau} \right] &= \left(U \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} - G \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \right) = \\ &= a_1^2 \left(U \frac{\partial^2 G}{\partial x'^2} - G \frac{\partial^2 U}{\partial x'^2} \right) + 2a_2 \left(U \frac{\partial^2 G}{\partial x' \partial \tau} - G \frac{\partial^2 U}{\partial x' \partial \tau} \right) + GF(x', \tau) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Проинтегрируем (2.14) по $x' \in [0, \infty)$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left(U \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} - G \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \right) dx' &= a_1^2 \int_0^{\infty} \left(U \frac{\partial^2 G}{\partial x'^2} - G \frac{\partial^2 U}{\partial x'^2} \right) dx' + 2a_2 \int_0^{\infty} \left(U \frac{\partial^2 G}{\partial x' \partial \tau} - G \frac{\partial^2 U}{\partial x' \partial \tau} \right) dx' + \\ &+ \int_0^{\infty} F(x', \tau) G(x, t, x', \tau) dx' = -a_1^2 \left(U \frac{\partial G}{\partial x'} - G \frac{\partial U}{\partial x'} \right) \Big|_{x'=0} + 2a_2 \int_0^{\infty} \left(U \frac{\partial^2 G}{\partial x' \partial \tau} - G \frac{\partial^2 U}{\partial x' \partial \tau} \right) dx' + \\ &+ \int_0^{\infty} F(x', \tau) G(x, t, x', \tau) dx' \end{aligned} \quad (2.15)$$

Соотношение (2.15) справедливо при всех $\tau < t$ и, следовательно, его можно проинтегрировать по τ для $0 < \tau < t - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число (при $0 < \tau < t - \varepsilon$ подынтегральные функции в (2.15) достаточно регулярны, так как исключена особенность у функции G в точке $x = x'$ при $\tau = t$).

В результате получим

$$\begin{aligned} \int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_0^{\infty} \left(U \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} - G \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \right) dx' &= -a_1^2 \int_0^{t-\varepsilon} \left(U \frac{\partial G}{\partial x'} - G \frac{\partial U}{\partial x'} \right) \Big|_{x'=0} d\tau + \\ &+ 2a_2 \int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_0^{\infty} \left(U \frac{\partial^2 G}{\partial x' \partial \tau} - G \frac{\partial^2 U}{\partial x' \partial \tau} \right) dx' + \int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_0^{\infty} F(x', \tau) G(x, t, x', \tau) dx' \end{aligned} \quad (2.16)$$

Рассмотрим в (2.16) интегралы

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_0^{\infty} \left(U \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} - G \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \right) dx' = \int_0^{\infty} \left(U \frac{\partial G}{\partial \tau} - G \frac{\partial U}{\partial \tau} \right) \Big|_{\tau=t-\varepsilon} dx' - \int_0^{\infty} \left(U \frac{\partial G}{\partial \tau} - G \frac{\partial U}{\partial \tau} \right) \Big|_{\tau=0} dx' \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_1 &= - \int_0^{\infty} U(x', t) \delta(x' - x) dx' - \int_0^{\infty} \left(U \frac{\partial G}{\partial \tau} - G \frac{\partial U}{\partial \tau} \right) \Big|_{\tau=0} dx' = \\ &= -U(x, t) - \int_0^{\infty} \left(U \frac{\partial G}{\partial \tau} - G \frac{\partial U}{\partial \tau} \right) \Big|_{\tau=0} dx' \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$J_3 = 2a_2 \int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_0^{\infty} \left(U \frac{\partial^2 G}{\partial x' \partial \tau} - G \frac{\partial^2 U}{\partial x' \partial \tau} \right) dx'$$

Дважды интегрируя по частям и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ находим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_3 = a_2 \int_0^{\infty} \left(G \frac{\partial U}{\partial x'} - U \frac{\partial G}{\partial x'} \right) \Big|_{\tau=0} dx' \quad (2.18)$$

Соотношение (2.17), (2.18) и (2.16) (при $\varepsilon \rightarrow 0$ в оставшихся интегралах) дают следующее (искомое) интегральное представление аналитических решений уравнения (2.1):

$$U(x, t) = - \int_0^{\infty} \left[U(x', \tau) \frac{\partial G}{\partial \tau} - G \frac{\partial U(x', \tau)}{\partial \tau} \right] \Big|_{\tau=0} dx' +$$

$$\begin{aligned}
& + a_1^2 \int_0^t \left[U(x', \tau) \frac{\partial G}{\partial x'} - G \frac{\partial U(x', \tau)}{\partial x'} \right]_{x'=0} d\tau + a_2 \int_0^\infty \left[U(x', \tau) \frac{\partial G}{\partial x'} - G \frac{\partial U(x', \tau)}{\partial x'} \right]_{\tau=0} dx' - \\
& - \int_0^\infty \int_0^\infty F(x', \tau) G(x, t, x', \tau) d\tau dx'
\end{aligned} \quad (2.19)$$

В частном случае при $a_2 = 0$ выражение (2.19) дает интегральное представление аналитических решений для волновых уравнений вида $a_1^2 U''_{xx} - U''_{tt} = F(x, t)$ в области $x > 0, t > 0$ при общем виде краевых функций в (2.2)–(2.4). Преимущество подхода (2.19) для уравнений более общего вида (2.1) (при $a_1 \neq 0$) по сравнению с известными для уравнений гиперболического типа (метод Римана и др. [9, 10]) очевидно, если учесть, что нахождение функции Грина $G(x, t, x', \tau)$ приемами, развитыми в [7] не составляет труда.

Теперь для задачи (2.1)–(2.5) можно записать

$$\begin{aligned}
U(x, t) = & - \int_0^\infty \left[\Phi_0(x') \frac{\partial G}{\partial \tau} - G \Phi_1(x') \right]_{\tau=0} dx' + a_1^2 \int_0^t \Psi(\tau) \frac{\partial G}{\partial x'} \Big|_{x'=0} d\tau + \\
& + a_2 \int_0^\infty \left[\Phi_0(x') \frac{\partial G}{\partial x'} - G \frac{d\Phi_0(x')}{dx'} \right]_{\tau=0} dx' - \int_0^\infty \int_0^\infty F(x', \tau) G(x, t, x', \tau) d\tau dx'
\end{aligned} \quad (2.20)$$

3. Динамическая реакция упругого полупространства с равномерно движущейся границей на тепловой удар. В качестве иллюстрации соотношения (2.19) исследуем динамическую реакцию полупространства $z \geq l + vt, t \geq 0$ начальной температуры $T_0 = \text{const}$ граница которого подвергается либо температурному нагреву $T(l + vt, t) = \varphi(t), t > 0$, либо тепловому нагреву $-\lambda_T (dT/dz)_{z=l+vt} = \varphi(t)$, либо нагреву средой $(\partial T/\partial z)_{z=l+vt} = h[T(z, t)|_{z=l+vt} - \varphi(t)], t > 0$. Имеем в безразмерных переменных (1.7) (без учета связанности в (1.4)) для температурной функции $T(z', Fo)$:

$$\frac{\partial T}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 T}{\partial z'^2}, \quad z' > 1 + \text{PeFo}, \quad Fo > 0 \quad (3.1)$$

$$\left. \begin{aligned}
T(z, Fo)|_{Fo=0} &= 0, \quad z' > 1 \\
|T(z', Fo)| &< +\infty, \quad z' \geq 1 + \text{PeFo}, \quad Fo \geq 0
\end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

в случае температурного нагрева

$$\begin{aligned}
T(z', Fo)|_{z'=1+\text{PeFo}} &= \varphi(Fo), \quad Fo > 0 \\
\varphi(Fo) &= [\varphi(t) - T_0]/T_0
\end{aligned} \quad (3.3)$$

в случае теплового нагрева

$$\begin{aligned}
-(\partial T/\partial z')|_{z'=1+\text{PeFo}} &= \varphi(Fo), \quad Fo > 0 \\
\varphi(Fo) &= [l/(\lambda_T T_0)] \varphi(t)
\end{aligned} \quad (3.4)$$

в случае нагрева средой

$$\begin{aligned}
(\partial T/\partial z')|_{z'=1+\text{PeFo}} &= \text{Bi}[T(z', Fo)|_{z'=1+\text{PeFo}} - \varphi(Fo)], \quad Fo > 0 \\
\text{Bi} &= hl, \quad \varphi(Fo) = [\varphi(t) - T_0]/T_0
\end{aligned} \quad (3.5)$$

Используя подход, развитый в [7], запишем вначале операционное решение задач в (3.1)–(3.5) в виде

$$\bar{T}(z', p) = \bar{\Theta}(p) \left(1 - \frac{Pe}{2\sqrt{p}} \right) \exp[-(z' - 1)\sqrt{p}] \bar{\varphi}(p - Pe\sqrt{p})$$

$$\bar{T}(z', p) = \int_0^{\infty} \exp(-pFo) T(z', Fo) dFo$$
(3.6)

где $\bar{\Theta}(p) = 1$ в случае (3.3); $\bar{\Theta}(p) = 1/\sqrt{p}$ в случае (3.4); $\bar{\Theta}(p) = Bi/(Bi + \sqrt{p})$ в случае (3.5).

Выражение (3.6) играет роль базового решения для данного класса задач и позволяет выписать большое число частных решений в зависимости от вида граничной функции $\varphi(Fo)$ (постоянная, линейная, импульсная, пульсирующая и т.д.). Переход к оригиналу осуществляется по правилам операционного исчисления с применением теоремы Эфроса [7]. Преимущество подхода (3.6) перед другими для области $z' > 1 + PeFo$, $Fo > 0$ с движущимися границами состоит в том, что оригинал (3.6) дает решение в наиболее компактном (и наименее громоздком) виде. Так, для функций общего вида в (3.3)–(3.5) переход к оригиналу дает в случае (3.3):

$$T(z', Fo) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{Fo} \frac{z' - 1 - PeFo}{(Fo - \tau)^{\frac{3}{2}}} \varphi(\tau) \exp\left[-\frac{(z' - 1 - Pe\tau)^2}{4(Fo - \tau)}\right] d\tau$$
(3.7)

в случае (3.4):

$$T(z', Fo) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{Fo} \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{Fo - \tau}} \exp\left[-\frac{(z' - 1 - Pe\tau)^2}{4(Fo - \tau)}\right] d\tau - \left(\frac{Pe}{2}\right) \int_0^{Fo} \varphi(\tau) \Phi^*\left(\frac{z' - 1 - Pe\tau}{2\sqrt{Fo - \tau}}\right) d\tau$$
(3.8)

в случае (3.5):

$$T(z', Fo) = \frac{Bi}{\sqrt{\pi}} \int_0^{Fo} \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{Fo - \tau}} \exp\left[-\frac{(z' - 1 - Pe\tau)^2}{4(Fo - \tau)}\right] d\tau -$$

$$- Bi \left(Bi + \frac{Pe}{2} \right) \int_0^{Fo} \varphi(\tau) \exp[(z' - 1 - Pe\tau)Bi + Bi^2(Fo - \tau)] \times$$

$$\times \Phi^*\left[\frac{z' - 1 - Pe\tau + 2Bi(Fo - \tau)}{2\sqrt{Fo - \tau}}\right] d\tau$$
(3.9)

Переходя к уравнению (1.6), исследуем динамическую реакцию упругого полупространства $z' \geq 1 + PeFo$, $Fo \geq 0$ на тепловой удар без механических нагрузок, что означает для (1.6) выполнение условий

$$\sigma_{z'z'}(z', Fo)|_{Fo=0} = 0, \quad z' > 1$$

$$(\partial\sigma_{z'z'}/\partial Fo)|_{Fo=0} = 0, \quad z' > 1$$
(3.10)

$$\sigma_{z'z'}(z', Fo)|_{z'=1+PeFo} = \sigma_{z'z'}(z', Fo)|_{z'=\infty} = 0, \quad Fo > 0$$
(3.11)

В подвижной системе координат $\xi = z' - (1 + PeFo)$ уравнение (1.6) с условиями (3.10)–(3.11) приводится к виду (2.1)–(2.5) относительно функций

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, Fo) \equiv \sigma_{z'z'}(z', Fo), \quad A(\xi, Fo) \equiv T(z', Fo)$$
(3.12)

$$(\lambda_0^2 - \text{Pe}^2) \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \xi^2} + 2\text{Pe} \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \xi \partial \text{Fo}} - \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \text{Fo}^2} = F(\xi, \text{Fo}) \quad \xi > 0, \quad \text{Fo} > 0 \quad (3.13)$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \text{Fo})|_{\text{Fo}=0} = (\partial \sigma_{\xi\xi} / \partial \text{Fo})|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad \xi > 0 \quad (3.14)$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \text{Fo})|_{\xi=0} = \sigma_{\xi\xi}(\xi, \text{Fo})|_{\xi=\infty} = 0, \quad \text{Fo} > 0 \quad (3.15)$$

$$F(\xi, \text{Fo}) = \frac{\partial}{\partial \text{Fo}} \left(\frac{\partial A}{\partial \text{Fo}} + \text{Pe}^2 A \right) - 2\text{Pe} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial A}{\partial \text{Fo}} + \left(\frac{\text{Pe}^2}{2} \right) A \right] \quad (3.16)$$

В (3.16) было использовано равенство $A''_{\xi\xi} = A'_{\text{Fo}} - \text{Pe} A'_{\xi}$, вытекающее из (3.1) в системе координат (ξ, Fo) . Функция Грина $G(\xi, \text{Fo}, \xi', \tau)$ для уравнения (3.13) с условиями (3.14)–(3.15) согласно (2.6)–(2.9), является решением задачи

$$(\alpha_0^2 - \text{Pe}^2) \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} + 2\text{Pe} \frac{\partial^2 G}{\partial \xi \partial \text{Fo}} - \frac{\partial^2 G}{\partial \text{Fo}^2} = 0, \quad \xi > 0, \quad \text{Fo} > \tau \quad (3.17)$$

$$G|_{\text{Fo}=\tau} = 0, \quad \xi > 0$$

$$(\partial G / \partial \text{Fo})|_{\text{Fo}=\tau} = \delta(\xi - \xi'), \quad \xi > 0 \quad (3.18)$$

$$G|_{\xi=0} = G|_{\xi=\infty} = 0, \quad \text{Fo} > \tau \quad (3.19)$$

Отсюда следует, что

$$G(\xi, \text{Fo}, \xi', \tau) = G(\xi, \text{Fo} - \tau, \xi') \quad (3.20)$$

Находим в пространстве изображений по Лапласу для

$$\bar{G}(\xi, p, \xi') = \int_0^{\infty} \exp(-p\text{Fo}^*) G(\xi, \text{Fo}^*, \xi') d\text{Fo}^* (\text{Fo}^* = \text{Fo} - \tau) \quad (3.21)$$

$$\bar{G} = \frac{1}{2\alpha_0 p} \{ \exp[k_2(\xi - \xi')] - \exp(k_2\xi - k_1\xi') \} \quad (0 < \xi' < \xi)$$

$$\bar{G} = \frac{1}{2\alpha_0 p} \{ \exp[-k_1(\xi' - \xi)] - \exp(k_2\xi - k_1\xi') \} \quad (0 < \xi < \xi') \quad (3.22)$$

$$k_1 = \frac{p}{\alpha_0 + \text{Pe}}, \quad k_2 = \frac{p}{\alpha_0 - \text{Pe}} \quad (\alpha_0 > \text{Pe})$$

Температурная функция $A(\xi, \text{Fo})$ может быть найдена как решение задачи (3.1)–(3.5), но в системе координат (ξ, Fo) , учитывая (3.12). Однако приведенные в (3.7)–(3.9) выражения позволяют получить $A(\xi, \text{Fo})$ более быстрым путем непосредственно из (3.7)–(3.9). Действительно, преобразуем, например (3.7) следующим образом, введя указанную выше подвижную систему координат:

$$A(\xi, \text{Fo}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\text{Fo}} \frac{\xi \varphi(\tau)}{(\text{Fo} - \tau)^{3/2}} \exp \left[-\frac{\xi^2}{4(\text{Fo} - \tau)} - \frac{\text{Pe}^2}{4} (\text{Fo} - \tau) - \frac{\text{Pe}\xi}{2} \right] d\tau$$

где Fo берется уже при фиксированном $\xi > 0$. В пространстве изображений по Лапласу находим

$$\bar{A}(\xi, p) = \bar{\varphi}(p) \exp \left[-(\text{Pe}/2 + \sqrt{p + \text{Pe}^2/4}) \xi \right]$$

Аналогично могут быть рассмотрены (3.8), (3.9). Для всех трех случаев находим следующее базовое соотношение:

$$\bar{A}(\xi, p) = (\bar{\varphi}(p)/\bar{\Theta}(p)) \exp[-(Pe/2 + \sqrt{p + Pe^2/4})\xi] \quad (3.23)$$

где $\bar{\Theta}(p) = 1$ в случае (3.3)

$$\bar{\Theta}(p) = 1/\left(\frac{Pe}{2} + \sqrt{p + \frac{Pe^2}{4}}\right) \text{ в случае (3.4)}$$

$$\bar{\Theta}(p) = [Bi + \left(\frac{Pe}{2} + \sqrt{p + \frac{Pe^2}{4}}\right)]/Bi \text{ в случае (3.5)}$$

Интегральное соотношение (2.19) приводит к следующему выражению для решения задачи (3.13)–(3.15):

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, Fo) = -\int_0^{Fo} \int_0^{\infty} F(\xi', \tau) G(\xi, Fo - \tau, \xi') d\tau d\xi' \quad (3.24)$$

или в пространстве изображений по Лапласу с учетом (3.16):

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\zeta, p) = -\int_0^{\infty} \left[p(p + Pe^2) \bar{A}(\zeta', p) - 2Pe \left(p + \frac{Pe^2}{2} \right) \frac{d\bar{A}(\zeta, p)}{d\zeta} \right] \bar{G}(\zeta, p, \zeta') d\zeta' \quad (3.25)$$

где $\bar{A}(\zeta, p)$ и $\bar{G}(\zeta, p, \zeta')$ имеют соответственно вид (3.23) и (3.21)–(3.22). Это дает следующее базовое операционное решение задачи (3.13)–(3.15):

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\zeta, p) = \frac{\bar{\varphi}(p)}{\alpha_0^2 - Pe^2} \left\{ \exp\left[-\left(\frac{Pe}{2} + \sqrt{p + \frac{Pe^2}{4}}\right)\zeta\right] - \exp\left[-\frac{\zeta}{(\alpha_0 - Pe)p}\right] \frac{\bar{\Theta}_1(p)}{\bar{\Theta}_2(p)} \right\} \quad (3.26)$$

$$\bar{\Theta}_1(p) = \frac{p(p + Pe^2) + 2Pe(p + Pe^2/2)(Pe/2 + \sqrt{p + Pe^2/4})}{[Pe/2 + p/(\alpha_0 - Pe) + \sqrt{p + Pe^2/4}][Pe/2 + p/(\alpha_0 + Pe) + \sqrt{p + Pe^2/4}]}$$

где $\bar{\Theta}_2(p) = 1$ в случае (3.3); $\bar{\Theta}(p) = Pe/2 + \sqrt{p + Pe^2/4}$ в случае (3.4); $\bar{\Theta}(p) = [Bi + (Pe/2 + \sqrt{p + Pe^2/4})]/Bi$ в случае (3.5).

Выражение (3.26) содержит многочисленные частные случаи, изученные в работах, указанных в [5]. Температурные напряжения $\sigma_{zz}(z', Fo)$ в исходной системе координат (z', Fo) , согласно функциональной конструкции (3.26), имеют вид

$$\sigma_{zz}(z', Fo) = \sigma_{zz}^{(1)}(z', Fo) + \begin{cases} 0, & Fo < (z' - 1)/\alpha_0 \\ \sigma_{zz}^{(2)}(z', Fo), & Fo > (z' - 1)/\alpha_0 \end{cases} \quad (3.27)$$

где составляющая напряжения $\sigma_{zz}^{(1)}(z', Fo)$ представляет собой диффузионную волну, возникающую сразу в каждой внутренней точке области; составляющая напряжения $\sigma_{zz}^{(2)}(z', Fo)$ представляет собой продольную упругую волну, фронт которой движется со скоростью α_0 внутрь упругого полупространства. Конкретный вид функции $\sigma_{zz}^{(i)}(z', Fo)$ ($i = 1, 2$) зависит от режима теплового воздействия (3.3)–(3.5) на поверх-

ность полупространства $z' \geq 1 + \text{PeFo}$, $\text{Fo} \geq 0$ и вида граничной функции $\varphi(\text{Fo})$. Остальные компоненты тензора напряжения и деформации определяются по формулам

$$\sigma_{xx}(z', \text{Fo}) = \sigma_{yy}(z', \text{Fo}) = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{zz}(z', \text{Fo}) - \frac{E\alpha_T}{(1-\nu)S} T(z', \text{Fo})$$

$$\varepsilon_{zz}(z', \text{Fo}) = \frac{1+\nu}{1-\nu} [\sigma_{zz}(z', \text{Fo}) + T(z', \text{Fo})]$$

В теории теплового удара важным элементом исследования является расчет скачков напряжений на фронте термоупругой волны через внешние граничные функции теплового воздействия. Согласно теореме запаздывания, члены типа $\bar{\Theta}(p) \exp[-\zeta(\alpha_0 - \text{Pe})^{-1}p]$ в (3.26) дают скачки напряжений на фронте термоупругой волны. Величина скачка $|\Delta|$ находится следующим образом [5]:

$$|\Delta| = \lim_{\text{Fo} \rightarrow \zeta(\alpha_0 - \text{Pe})^{-1}} \Theta[\text{Fo} - \zeta(\alpha_0 - \text{Pe})^{-1}] = \lim_{\text{Fo} \rightarrow 0} \Theta(\text{Fo}) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \bar{\Theta}(p)$$

Из (3.26) находим для $\sigma_{zz}(z', \text{Fo})$ (и $\sigma_{zz}(z, t)$): в случае температурного нагружения (3.3):

$$|\Delta| = ST_0 \lim_{p \rightarrow 0} p \bar{\varphi}(p) = ST_0 \lim_{\text{Fo} \rightarrow 0} \varphi(\text{Fo}) = S \lim_{t \rightarrow 0} [\varphi(t) - T_0] \quad (S = \alpha_T(3\lambda + 2\mu)) \quad (3.28)$$

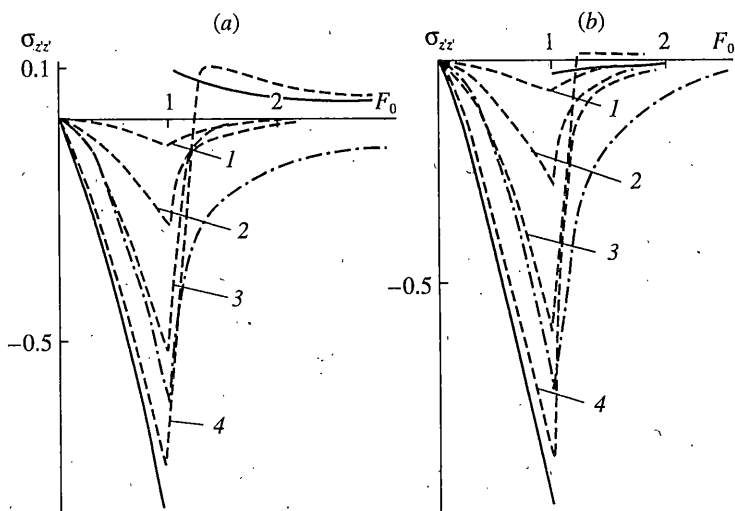
в случае теплового нагружения (3.4):

$$|\Delta| = ST_0 \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt{p} \bar{\varphi}(p) = \frac{2ST_0}{\sqrt{\pi}} \lim_{\text{Fo} \rightarrow 0} \sqrt{\text{Fo}} \varphi(\text{Fo}) = \frac{2S\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}\lambda_T} \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \varphi(t) \quad (3.29)$$

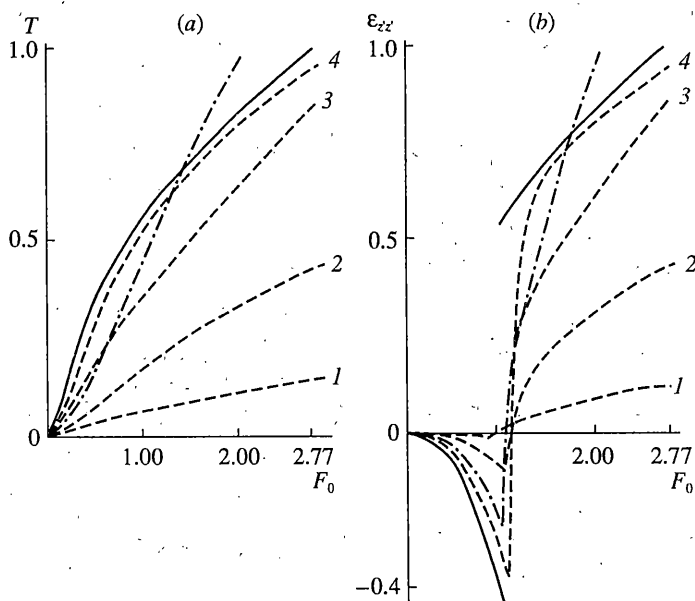
в случае нагружения средой (3.5)

$$|\Delta| = ST_0 \text{Bi} \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt{p} \bar{\varphi}(p) = \frac{2ST_0 \text{Bi}}{\sqrt{\pi}} \lim_{\text{Fo} \rightarrow 0} \sqrt{\text{Fo}} \varphi(\text{Fo}) = \frac{2Sh\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \varphi(t) \quad (3.30)$$

Прежде всего из (3.28)–(3.30) следует, что величина скачка напряжений не зависит от скорости движения границы и определяется условиями внешнего нагрева, тепловыми и упругими свойствами материала. Наиболее интересный в практическом отношении вывод состоит в том, что для тех режимов $\varphi(\text{Fo})$, когда $|\Delta| \neq 0$, соотношения (3.28)–(3.30) дают верхнюю оценку максимума для $|\sigma_{zz}(z', \text{Fo})|$ (и соответственно для $|\sigma_{zz}(z, t)|$) [5], который можно оценить без необходимости полного решения динамической задачи только по граничным функциям исходной тепловой задачи в (3.3)–(3.5). Например, в случае резкого температурного нагрева границы полупространства до температуры $T_c = T(l + \nu t, t) > T_0 = T(z, 0)$, согласно (3.27), (3.28), во внутреннем сечении $z' = \text{const}$ для времен, близких к $\text{Fo} = (z' - 1)/\alpha_0$, имеет место скачок напряжения, равный $|\Delta| = (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T_c - T_0)$, абсолютная величина которого может служить верхней оценкой $\max|\sigma_{zz}|$ как для случая нагревания, так и для случая охлаждения. В то же время при воздействии на поверхность области средой температуры $\varphi(t) = T_c$ (режим (3.5) при $(1/\text{Bi}) > 0$ соотношение (3.30) дает $|\Delta| = (2Sh\sqrt{a}/\sqrt{\pi}) \lim(\sqrt{t} T_c)$ при $t \rightarrow 0$, т.е. для режима $(1/h) > 0$ $(1/\text{Bi}) > 0$ скачок напряжения отсутствует: при $T_c > T_0$ напряжение $\sigma_{zz}(z', \text{Fo})$ в сечении $z' = \text{const}$ растет от нуля при $\text{Fo} = 0$ до некоторого отрицательного значения, в момент времени, близкий к $\text{Fo} = (z' - 1)/\alpha_0$, достигает максимального значения, затем плавно без скачка переходит в область положительных значений, достигает максимального положительного значения и затем быстро убывает до нуля (квазистатического значения) [5]. Последнее отражено на фиг. 1а ($\text{Pe} = 0$) и фиг. 1, б ($\text{Pe} = 0.3613$), где приведены кривые изменения $\sigma_{zz}(z', \text{Fo})$ в сечении $z' = 2$ при $\alpha_0 = 1$, $\varphi(\text{Fo}) = 1$, позволяющие провести сравнительный анализ различных режимов



Фиг. 1



Фиг. 2

нагружения: температурного (3.3) (сплошная кривая), теплового (3.4) (штрих-пунктирная кривая) и средой (3.5). Оригиналы $\sigma_{zz}(z', Fo)$ найдены из (3.26) и не приводятся в силу ограниченности объема публикации.

На фиг. 2 аналогичные кривые ($Pe = 0.3613$) приведены для температурной функции $T(z', Fo)$ и деформации $\epsilon_{zz}(z', Fo)$. Видно, что наиболее опасен по величине возникающих в области $z' > 1 + PeFo$, $Fo > 0$ напряжений и деформаций случай температурного нагрева. Движение границы для указанных режимов не играет существенной роли, хотя и сдвигает напряжения в область отрицательных (сжимающих) значений.

Рассмотрим практически важные для теории лазерного разрушения случае импульсного и пульсирующего нагрева. Импульсное воздействие в (3.4):

$$\varphi(t) = \begin{cases} q_0 t, & 0 \leq t \leq t_1 \\ q_0 t_1, & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0, & t > t_2 \end{cases}$$

в соответствии с (1.7) и (3.12) запишем в виде

$$\left. \frac{\partial T(z', Fo)}{\partial z'} \right|_{z'=1+PeFo} = \varphi(Fo) = \begin{cases} N Fo, & 0 \leq Fo \leq Fo^{(1)} \\ N Fo^{(1)}, & Fo^{(1)} \leq Fo \leq Fo^{(2)} \\ 0, & Fo > Fo^{(2)} \end{cases} \quad (3.31)$$

$$N = q_0 l^3 / (a T_0 \lambda_T), \quad Fo^{(1)} = a t_1 / l^2, \quad Fo^{(2)} = a t_2 / l^2$$

В пространстве изображений по Лапласу

$$\bar{\varphi}(p) = \frac{N}{p^2} [1 - \exp(-Fo^{(1)} p)] - \frac{N Fo^{(1)}}{p} \exp(-Fo^{(2)} p) \quad (3.32)$$

Температурная функция имеет вид (3.6), (3.32), температурные напряжения — (3.26), (3.32). Выражение (3.26) дает в пространстве оригиналов

$$\sigma_{zz}(z', Fo) = \sigma_{zz}^{(1)} \Big|_{Fo > 0} + \sigma_{zz}^{(2)} \Big|_{Fo > (z'-1)/\alpha_0} + \sigma_{zz}^{(3)} \Big|_{Fo > Fo^{(1)}} + \sigma_{zz}^{(4)} \Big|_{Fo > Fo^{(1)} + (z'-1 - PeFo^{(1)})/\alpha_0} + \sigma_{zz}^{(5)} \Big|_{Fo > Fo^{(2)}} + \sigma_{zz}^{(6)} \Big|_{Fo > Fo^{(2)} + (z'-1 - PeFo^{(2)})/\alpha_0} \quad (3.33)$$

где оригиналы для $\sigma_{zz}^{(i)}(z', Fo)$ не приводятся в силу громоздкости выражений.

В соотношении (3.33) каждая из составных частей теплового потока (3.31) порождает диффузионную волну и упругую волну расширения, время подхода которой к сечению $z' = \text{const}$ определяется упругими и теплофизическими свойствами материала, параметрами $Fo^{(1)}$ и $Fo^{(2)}$ и скоростью Pe движения границы области. Из (3.29) и (3.32) следует, что $|\Delta| = ST_0 \lim \sqrt{p} \bar{\varphi}(p) (p \rightarrow \infty)$ т.е. скачок напряжений на фронте термоупругой волны отсутствует и напряжения изменяются непрерывно. Последнее отражено на фиг. 3, где приведены кривые изменения $\sigma_{zz}(z', Fo)$ при различной вариации параметров, входящих в (3.33) ($Fo^{(1)} = 1, N = 1$). Кривые на фиг. 3, *a* соответствуют параметрам $Fo^{(2)} = 2, \alpha_0 = 1, z' = 2$ (1–5), $z' = 3$ (6; 7), $Pe = 0$ (1; 7), $Pe = 0.3613$ (2; 6), $Pe = 0.51$ (3), $Pe = 0.71$ (4), $Pe = 0.91$ (5), а на фиг. 3, *b* — $Fo^{(2)} = 1.6, z' = 2, \alpha_0 = 1$ (1; 2), $\alpha_0 = 1.5$ (3; 4), $Pe = 0$ (1; 3), $Pe = 0.3613$ (2; 4). Видно, что в заданном сечении $z' = \text{const}$ в начале растут сжимающие напряжения. С приходом первой составляющей волны расширения в момент, близкий к $Fo = (z' - 1)/\alpha_0$, напряжения постепенно переходят в положительную область, где достигают максимума к моменту прихода третьей составляющей волны расширения $Fo = Fo^{(2)} + (z' - 1 - PeFo^{(2)})/\alpha_0$ далее стремясь к квазистатическому значению. При этом с удалением сечения $z' = \text{const}$ от граничной поверхности максимальное значение растягивающих напряжений возрастает. Увеличение скорости Pe движения границы полупространства сдвигает σ_{zz} в область сжимающих напряжений; с увеличением параметра α_0 (что связано с уменьшением скорости изменения температуры во внутренних точках или с увеличением скорости распространения продольных колебаний) экстремальные значения σ_{zz} уменьшаются.

Переходя к пульсирующему режиму нагружения

$$\varphi(t) = \begin{cases} q_0, & 2mt_0 \leq t \leq (2m+1)t_0 \\ 0, & (2m+1)t_0 < t \leq (2m+2)t_0 \end{cases} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

запишем указанный режим в (3.4) в виде

$$\left. \frac{\partial T(z', Fo)}{\partial z'} \right|_{z'=1+PeFo} = \varphi(Fo) = \begin{cases} q_0^*, & 2mFo^{(3)} \leq Fo \leq (2m+1)Fo^{(3)} \\ 0, & (2m+1)Fo^{(3)} < Fo \leq (2m+2)Fo^{(3)} \end{cases}$$

или в пространстве изображений по Лапласу

$$\bar{\varphi}(p) = \left(\frac{q_0^*}{p} \right) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp(-npFo^{(3)}) \quad (3.34)$$

$$q_0^* = (q_0 l) / (\lambda_T T_0), \quad Fo^{(3)} = at_0 / l^2$$

Выражение (3.26) с учетом (3.34) дает для напряжений в пространстве оригиналов

$$\begin{aligned} \sigma_{zz'}(z', Fo) = & \sum_{n=0}^{N_1} \sigma_{zz'}^{(1)}(z', Fo, M_n) \Big|_{Fo > 0} + \sum_{n=0}^{N_2} \sigma_{zz'}^{(2)}(z', Fo, M_n) \Big|_{Fo > (z'-1)/\alpha_0} + \\ & + \sum_{n=0}^{N_3} \sigma_{zz'}^{(3)}(z', Fo, M_n) \Big|_{Fo > Fo^{(3)}} + \sum_{n=0}^{N_4} \sigma_{zz'}^{(4)}(z', Fo, M_n) \Big|_{Fo > Fo^{(3)} + (z'-1 - PeFo^{(3)})/\alpha_0} \\ M_n = & Fo - 2nFo^{(3)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$N_1 = \left[\frac{Fo}{2Fo^{(3)}} \right], \quad N_2 = \left[\frac{Fo - \delta Fo}{2Fo^{(3)}} \right], \quad N_3 = \left[\frac{Fo - Fo^{(3)}}{2Fo^{(3)}} \right]$$

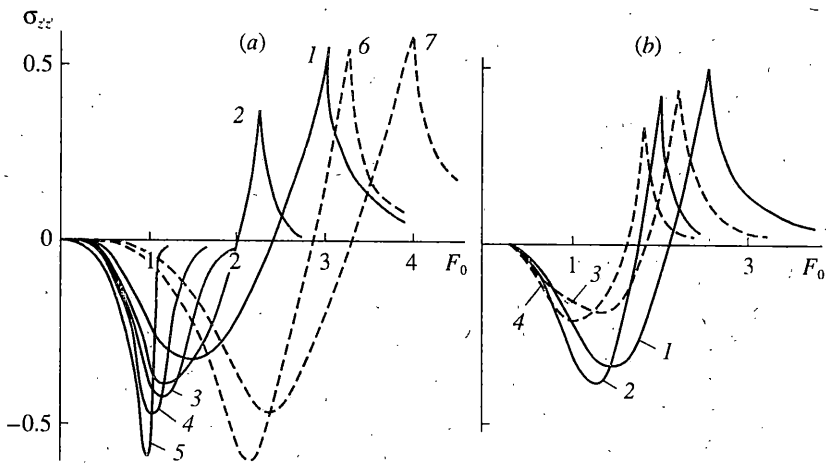
$$N_4 = \left[\frac{Fo - Fo^{(3)} - \delta Fo}{2Fo^{(3)}} \right] \quad \delta Fo = (z' - 1 - PeFo) / (\alpha_0 - Pe)$$

где оригиналы для $\sigma_{zz'}^{(i)}(z', Fo, Mn)$ также не приводятся в силу их громоздкости. Согласно (3.29) и (3.34), имеем

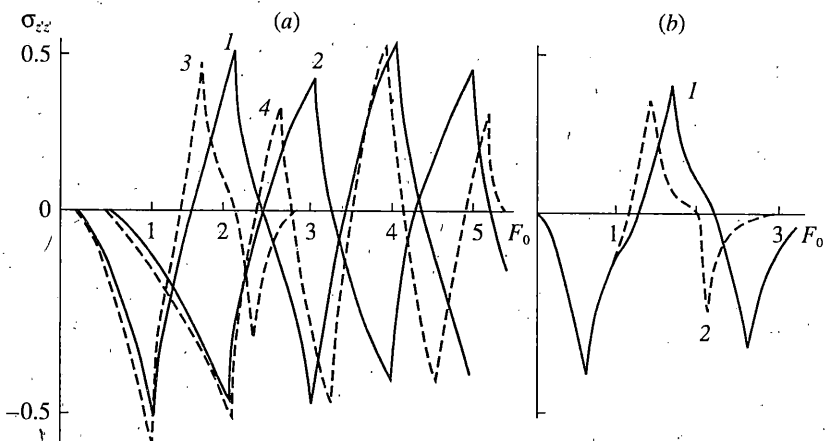
$$|\Delta| = ST_0 \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt{p} \bar{\varphi}(p) = 0$$

т.е. скачок напряжений на фронте термоупругой волны отсутствует и напряжение $\sigma_{zz'}(z', Fo)$ изменяется непрерывно при всех $z' > 1 + PeFo$, $Fo > 0$. На фиг. 4 показаны периодичность напряжения в сечениях $z' = \text{const}$ и влияние на $\sigma_{zz'}(z', Fo)$ различных параметров, входящих в (3.35) ($Fo^{(3)} = 1$, $q_0^* = 1$). Кривые на фиг. 4, а соответствуют параметрам $\alpha_0 = 1$, $z' = 2$ (1; 3), $z' = 3$ (2; 4), $Pe = 0$ (1; 2), $Pe = 0.3613$ (3; 4), а на фиг. 4, б — $\alpha_0 = 1.5$, $z' = 2$, $Pe = 0$ (1), $Pe = 0.3613$ (2).

Дальнейшим развитием проблемы теплового удара является обобщение уравнения (1.5) на вязкоупругие материалы. Реологические свойства ряда материалов позволяют разделить их на упруговязкие и вязкоупругие. Например, каучуки относят к упруговязким материалам, так как они характеризуются вязким течением, а шитые эластомеры — к вязкоупругим, поскольку у них вязкое течение практически не наблюдается. Простейшая реологическая модель упруговязкого материала предложе-



Фиг. 3



Фиг. 4

на Максвеллом; поведение вязкоупругого материала передает модель Кельвина-Фогта; модель обобщенного линейного тела включает в себя оба случая [11]. Связь между напряжением и деформацией, вытекающая из этих моделей, может быть представлена в девиаторной форме. Для этого введем девиатор напряжений $S_{ij}(M, t)$ и девиатор деформаций $e_{ij}(M, t)$ с помощью соотношений [12]:

$$S_{ij}(M, t) = \sigma_{ij}(M, t) - \sigma \delta_{ij}, \quad e_{ij}(M, t) = \epsilon_{ij}(M, t) - \epsilon \delta_{ij} \quad (3.36)$$

где $\sigma(M, t) = \frac{1}{3} \sigma_{nn}(M, t)$ – среднее нормальное напряжение, $\epsilon(M, t) = \frac{1}{3} \epsilon_{nn}(M, t)$ – среднее удлинение, связанные между собой соотношением

$$\epsilon = [(1 - 2\nu)/E]\sigma + \alpha_T(T - T_0) \quad (3.37)$$

вытекающим из (1.3). Это соотношение остается справедливым и для вязкоупругих тел [1], что означает, что при гидростатическом сжатии или растяжении тело ведет себя как вполне упругое. Запишем для указанных выше случаев

для среды Максвелла

$$\dot{S}_{ij}(M, t) + \frac{1}{\tau_p} S_{ij}(M, t) = 2G \dot{e}_{ij}(M, t) \quad (3.38)$$

$$(\dot{S}_{ij} = \partial S_{ij} / \partial t)$$

для среды Кельвина-Фогта

$$\dot{e}_{ij}(M, t) + \frac{1}{\tau_p} e_{ij}(M, t) = \frac{1}{2\eta} S_{ij}(M, t) \quad (3.39)$$

для обобщенного линейного

$$\dot{S}_{ij}(M, t) + \frac{1}{\tau_p} S_{ij}(M, t) = 2G[\dot{e}_{ij}(M, t) + \gamma e_{ij}(M, t)] \quad (3.40)$$

Здесь $\tau_p = \eta/G$ – время релаксации, η – коэффициент вязкости материала, γ – постоянная материала. Для упруговязкого полупространства температуры $T(z, t)$ в рамках среды Максвелла (3.38) (остальные случаи могут быть рассмотрены аналогично) соотношения (1.1), (1.2), (3.37), (3.38) приводят к следующему уравнению динамической термовязкоупругости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial t^2} &= \frac{1+v}{1-v} \alpha_T \rho \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\alpha_1 \int_0^t \exp(-\beta(t-\tau)) \sigma_{zz}(z, \tau) d\tau + \alpha_2 \int_0^t \exp(-\beta(t-\tau)) (T(z, \tau) - T_0) d\tau \right] \quad (3.41) \\ \alpha_1 &= \frac{4\mu\rho}{3\tau_p(\lambda+2\mu)^2}, \quad \alpha_2 = \frac{4\mu\rho\alpha_T(3\lambda+2\mu)}{3(\lambda+2\mu)^2\tau_p}, \quad \beta = \frac{3\lambda+2\mu}{3\tau_p(\lambda+2\mu)} \end{aligned}$$

В случае упругой среды время релаксации $\tau_p = \infty$ ($\eta = \infty$), при этом $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ и уравнение (3.41) переходит в уравнение (1.5), обобщая, таким образом, (1.5) на упруговязкие тела. Уравнение (3.41) представляет интерес для развития теории термического удара твердых тел канонической формы, температура которых $T(z, t)$ (массивные тела $z \geq l$; бесконечная пластина $0 \leq z \leq l$ и т.д.), включая рассмотрение одновременно упругой и упруговязкой сред. Круг вопросов, возникающих при изучении моделей на основе уравнения (3.41), наряду с описанием динамической реакции тела на тепловой удар включает такие проблемы, как расчет скачков напряжений на фронте термовязкоупругой волны через внешние функции нагрева (аналогично (3.28)–(3.30), эффект влияния возможного перемещения граничной поверхности тела $z \geq l + vt$, $t > 0$ ($v = \text{const}$) на величину термических напряжений, эффект конечной скорости распространения теплоты, эффект связанности полей деформации и температуры в (1.4), оценка времени действия инерционных эффектов и т.д. Можно ожидать интересных результатов и в качественной теории для уравнения (3.41) (принцип максимума, априорные оценки, теоремы существования, асимптотическое поведение решений и т.д.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 517 с.
2. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.

3. *Подстригач Я.С., Коляно Ю.М.* Обобщенная термомеханика. Киев: Наук. думка, 1976. 310 с.
4. *Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю.* Волновые явления теплопроводности. Системно-структурный подход. Минск: Навука і тэхніка, 1993. 279 с.
5. *Карташов Э.М., Партон В.З.* Динамическая термоупругость и проблемы термического удара // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ, 1991. Т. 22. С. 55–127.
6. *Карташов Э.М., Хани А.М.* Динамическая термоупругая реакция твердых тел при конечной скорости изменения тепловых воздействий // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 83–88.
7. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высш. шк., 1985. 480 с.
8. *Даниловская В.И.* Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы // ПММ. 1950. Т. 14. Вып. 3. С. 316–318.
9. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
10. *Положий Г.Н.* Уравнения математической физики. М.: Высш. шк., 1964. 559 с.
11. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
12. *Карташов Э.М.* Термическая реакция вязкоупругих тел на тепловой удар на основе нового уравнения динамической термовязкоупругости // ДАН. 1997. Т. 355. № 4. С. 479–483.

Москва

Поступила в редакцию 23.III.1995