МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1998

УДК 539.3

© 1998 г. Л.А. ФИЛЬШТИНСКИЙ

АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ СОСТАВНОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА, ОСЛАБЛЕННОГО ТУННЕЛЬНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Рассматривается кусочно-однородное пространство, составленное из двух непрерывно скрепленных между собой разнородных пьезоэлектрических полупространств и содержащее туннельные трещины. Предполагается, что на бесконечности имеют место однородные поля механического сдвига и электрической напряженности, а поверхности трещин свободны от нагрузки. Рассматриваются ситуации когда трещина находится в одной из фаз, подходит к границе раздела материалов, а также пересекает ее. Соответствующие граничные задачи электроупругости при помощи построенного ниже фундаментального решения сводятся к сингулярным интегральным уравнениям. Исследуются порядки степенных особенностей в напряжениях в особой точке линии раздела. Приводятся результаты расчетов коэффициента интенсивности напряжений в вершинах дефекта.

Задача о плоской деформации составной пьезокерамической среды, ослабленной трещинами в одной из фаз решена в [1].

1. Рассмотрим отнесенное к декартовым прямолинейным осям $x_1x_2x_3$ составное пространство, состоящее из двух непрерывно скрепленных вдоль плоскости $x_2 = 0$ различных пьезокерамических полупространств. Пусть в одном из полупространств (например, в верхнем) имеются туннельные вдоль оси x_3 трещины, поперечные сечения которых представляют собой простые разомкнутые дуги L_j ($j = 1, 2, ..., M$). На бесконечности заданы равномерные поля вектора электрической напряженности $\langle E_1\rangle$, $\langle E_2^{(1)}\rangle$, $\langle E_2^{(2)}\rangle$ и усилий сдвига $\langle\sigma_{13}^{(1)}\rangle$, $\langle\sigma_{13}^{(2)}\rangle$, $\langle\sigma_{23}\rangle$, а поверхности трещин свободны от сил. Будем считать, что трещины в недеформируемом состоянии представляют собой математические разрезы, кривизны контуров L_j удовлетворяют условию Гельдера и дуга $L_j = \phi$.

В этих условиях составное пространство находится в состоянии антиплоской деформации в плоскости x_1Ox_2, описываемой соотношениями [2–4]:

материальные уравнения

$$\sigma_{i3} = c_{44}\partial_i u_3 - e_{15}E_i, \quad D_m = e_{15}\partial_m u_3 + \varepsilon_{11}E_m \quad (i,m = 1,2) \tag{1.1}$$

уравнения равновесия

$$\partial_1\sigma_{13} + \partial_2\sigma_{23} = 0, \quad \partial_i = \partial/\partial x_i \quad (i = 1,2) \tag{1.2}$$

уравнения электростатики

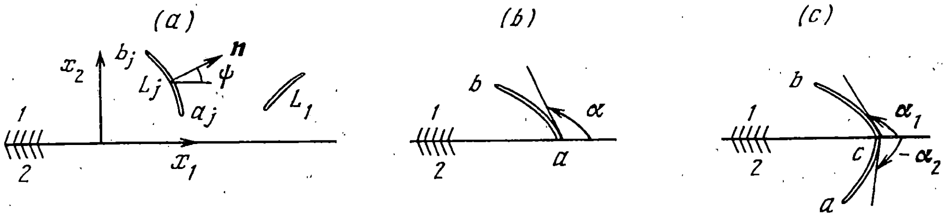
$$\partial_1 D_1 + \partial_2 D_2 = 0, \quad E_i = -\partial_i\varphi \quad (i = 1,2) \tag{1.3}$$

условия сопряжения полупространств на плоскости $x_2 = 0$:

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, \quad \sigma_{23}^{(1)} = \sigma_{23}^{(2)}, \quad E_1^{(1)} = E_1^{(2)}, \quad D_2^{(1)} = D_2^{(2)} \tag{1.4}$$

граничные условия на поверхностях трещин

$$\sigma_{n3}^{(1)} = 0, \quad E_s^+ = E_s^-, \quad D_n^+ = D_n^- \tag{1.5}$$



Фиг. 1

В (1.1)–(1.5) величины $u_3(x_1,x_2)$, $\sigma_{i3}(x_1,x_2)$, $E_m(x_1,x_2)$, $D_m(x_1,x_2)$ – упругие перемещения точек тела в направлении оси x_3, компоненты тензора механических напряжений, векторов электрической напряженности и индукции соответственно; $c_{44}=c_{44}^E$, e_{15} и $\varepsilon_{11}=\varepsilon_{11}^s$ – модуль сдвига, измеряемый при постоянном электрическом поле, пьезомодуль и диэлектрическая проницаемость керамики, измеренная при постоянной деформации; $\varphi(x_1,x_2)$ – электростатический потенциал; σ_{n3}, D_n – нормальные компоненты тензора механического напряжения и вектора электрической индукции; E_s – касательная к L_j компонента вектора электрической напряженности; индексы 1 и 2 относятся к компонентам сопряженных электроупругих полей в верхнем и нижнем полупространствах соответственно; $f^\pm$ – предельные значения функции f на левом и правом берегах L_j (фиг. 1, a).

Из соотношений (1.1)–(1.3) вытекает, что перемещение $u_3(x_1,x_2)$ и электрический потенциал $\varphi(x_1,x_2)$ – гармонические функции, поэтому имеют место следующие комплексные представления механических и электрических величин:

$$\sigma_{13}-i\sigma_{23}=\sum_{\nu=1}^{2} d_{1\nu}F_\nu(z),\quad D_1-iD_2=\sum_{\nu=1}^{2} d_{2\nu}F_\nu(z),\quad z=x_1+ix_2$$

$$E_1-iE_2=-F_2(z),\quad u_3=\operatorname{Re} f_1(z),\quad \varphi=\operatorname{Re} f_2(z),\quad F_\nu(z)=df_\nu(z)/dz$$

$$P_1=\int_{AB}\sigma_{n3}ds=\operatorname{Im}\sum_{\nu=1}^{2} d_{1\nu}f_\nu(z)\Big|_A^B,\quad P_2=\int_{AB}D_n ds=\operatorname{Im}\sum_{\nu=1}^{2} d_{2\nu}f_\nu(z)\Big|_A^B$$

$$d_{11}=c_{44},\quad d_{12}=d_{21}=e_{15},\quad d_{22}=-\varepsilon_{11} \tag{1.6}$$

Здесь P_1 и P_2 – главный вектор сдвиговых усилий на дуге AB и поток вектора электрической индукции через AB соответственно.

Таким образом, все полевые величины выражаются через две аналитические функции комплексной переменной z.

2. Рассмотрим сначала однородное пьезокерамическое пространство и пусть вдоль шнура $x_1=x_{10}$, $x_2=x_{20}$, $-\infty<x_3<\infty$ равномерно распределены сдвиговые усилия или электрические заряды интенсивностей p_1 и p_2 соответственно.

Аналитические функции, описывающие эту ситуацию, имеют вид

$$f_\nu(z)=A_\nu\ln(z-z_0),\quad z_0=x_{10}+ix_{20}\quad (\nu=1,2) \tag{2.1}$$

Постоянные A_ν определяются из условий однозначности перемещения u_3 и потенциала электрического поля φ, сохранения заряда и статического условия. С учетом соотношений (1.6) получаем

$$A_1=\frac{p_1\varepsilon_{11}+p_2e_{15}}{2\pi(1+\varkappa^2)\,c_{44}\varepsilon_{11}},\quad A_2=\frac{p_1e_{15}-p_2c_{44}}{2\pi(1+\varkappa^2)\,c_{44}\varepsilon_{11}},\quad \varkappa^2=\frac{e_{15}^2}{c_{44}\varepsilon_{11}} \tag{2.2}$$

Соотношения (2.1), (2.2) определяют фундаментальное решение для однородной пьезокерамической среды в условиях антиплоской деформации.

Пусть теперь сосредоточенные источники имеют место в составной пьезокерамической среде не содержащей трещин. Предположим для определенности, что $x_{20} > 0$. В этом случае комплексные потенциалы $F_\nu(z)$ будем разыскивать в виде

$$F_\nu^{(1)}(z) = \frac{A_\nu^{(1)}}{z - z_0} + \sum_{m=1}^{2} \frac{\overline{\alpha_{\nu,m}^{(1)} A_m^{(1)}}}{z - \overline{z_0}}, \quad \operatorname{Im} z \geqslant 0 \quad (\nu = 1,2) \tag{2.3}$$

$$F_\nu^{(2)}(z) = \sum_{m=1}^{2} \frac{\alpha_{\nu+2,m}^{(1)} A_m^{(1)}}{z - z_0}, \quad \operatorname{Im} z \leqslant 0, \quad \overline{z_0} = x_{10} - i x_{20}$$

Здесь член вне суммы определяет фундаментальное решение в однородной среде, остальные члены учитывают взаимное влияние разнородных полупространств. В соответствии с этим постоянные $A_\nu^{(1)}$ определяются формулами (2.2), в которых всем материальным константам необходимо приписать верхний индекс 1.

Константы $\alpha_{\nu,m}^{(1)}$ определяются из условий сопряжения (1.4), которые в комплексных переменных записываются так

$$\operatorname{Re}[F_\nu(x)] = 0, \quad \operatorname{Im} \sum_{\nu=1}^{2} [d_{k\nu} F_\nu(x)] = 0, \quad x = x_1 \quad (k, \nu = 1, 2)$$

$$[f(x)] = f^{(1)}(x) - f^{(2)}(x) \tag{2.4}$$

Подставляя сюда функции (2.3) при $z = x$, находим

$$\alpha_{1,1}^{(1)} = \frac{1}{\Delta_1}[(1 - c_1)(1 + \varepsilon_1) + \varkappa_1^2(1 - e_1^2)], \quad \alpha_{2,1}^{(1)} = \frac{e_{15}^{(1)}}{\varepsilon_{11}^{(1)}} \beta_{2,1}^{(1)}$$

$$\alpha_{1,2}^{(1)} = \frac{e_{15}^{(1)}}{c_{44}^{(1)}} \beta_{1,2}^{(1)} \tag{2.5}$$

$$\alpha_{2,2}^{(1)} = \frac{1}{\Delta_1}[(1 + c_1)(1 - \varepsilon_1) + \varkappa_1^2(1 - e_1^2)], \quad \alpha_{3,1}^{(1)} = 1 + \alpha_{1,1}^{(1)}, \quad \alpha_{4,1}^{(1)} = \alpha_{2,1}^{(1)}$$

$$\alpha_{3,2}^{(1)} = \alpha_{1,2}^{(1)}, \quad \alpha_{4,2}^{(1)} = 1 + \alpha_{2,2}^{(1)}, \quad \Delta_1 \beta_{2,1}^{(1)} = 2(e_1 - c_1)$$

$$\Delta_1 \beta_{1,2}^{(1)} = 2(\varepsilon_1 - e_1), \quad \Delta_1 = (1 + c_1)(1 + \varepsilon_1) + \varkappa_1^2 (1 + e_1)^2$$

$$c_1 = c_{44}^{(2)} / c_{44}^{(1)}, \quad e_1 = e_{15}^{(2)} / e_{15}^{(1)}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_{11}^{(2)} / \varepsilon_{11}^{(1)}, \quad \varkappa_1^2 = \frac{(e_{15}^{(1)})^2}{\varepsilon_{11}^{(1)} c_{44}^{(1)}}$$

Формулами (2.3), (2.5) фундаментальное решение для составной среды определяется вполне. Мерой связанности механических и электрических полей здесь является коэффициент электромеханической связи $\varkappa_1^2$.

Если сосредоточенные источники имеются в точках $z_r = x_1^{(r)} + i x_2^{(r)}$ $(r = 1, 2)$ верхней $(r = 1)$ и нижней $(r = 2)$ полуплоскостей, то фундаментальное решение очевидно определяется функциями

$$F_\nu^{(r)}(z) = \frac{A_\nu^{(r)}}{z - z_r} + \sum_{m=1}^{2} \left\{ \frac{\overline{\alpha_{\nu,m}^{(r)} A_m^{(r)}}}{z - \overline{z_r}} + \frac{\alpha_{\nu+2,m}^{(3-r)} A_m^{(3-r)}}{z - z_{3-r}} \right\} \quad (\nu, r = 1, 2) \tag{2.6}$$

где постоянные $A_\nu^{(n)}$, $\alpha_{\nu,m}^{(n)}$ вычисляются по формулам (2.2), (2.5), в которых материальным константам следует приписать верхний индекс n, а параметрам c, ε, e, $\varkappa$ – нижний индекс n. При этом

$$c_2 = \frac{c_{44}^{(1)}}{c_{44}^{(2)}}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_{11}^{(1)}}{\varepsilon_{11}^{(2)}}, \quad e_2 = \frac{e_{15}^{(1)}}{e_{15}^{(2)}}, \quad \varkappa_2^2 = \frac{(e_{15}^{(2)})^2}{\varepsilon_{11}^{(2)} c_{44}^{(2)}} \tag{2.7}$$

3. Возвращаясь к исходной задаче построим интегральные представления ее решений. Для этого заменим постоянные $A_\nu^{(1)}$ некоторыми распределениями $-\omega_\nu(\zeta)/2\pi i$ на $L = \cup L_j$. Используя фундаментальное решение (2.3), получим

$$F_\nu^{(r)}(z) = B_\nu^{(r)} + \Phi_\nu^{(r)}(z) \quad (\nu, r = 1,2) \tag{3.1}$$

$$\Phi_\nu^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_\nu(\zeta)}{\zeta - z}\,ds - \sum_{m=1}^{2}\frac{\alpha_{\nu,m}^{(1)}}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_m(\zeta)}{\bar\zeta - z}\,ds, \quad \operatorname{Im} z \geqslant 0$$

$$\Phi_\nu^{(2)}(z) = \sum_{m=1}^{2}\frac{\alpha_{\nu+2,m}^{(1)}}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_m(\zeta)}{\zeta - z}\,ds, \quad \operatorname{Im} z \leqslant 0, \quad \operatorname{Im}\omega_\nu(\zeta) = 0$$

где постоянные $B_\nu^{(r)}$ определяются однородными электроупругими полями на бесконечности, а также условиями сопряжения сред; $\omega_\nu(\zeta) = \{\omega_{\nu j}(\zeta), \zeta \in L_j\}$.

Используя соотношения (1.4), (1.6), находим

$$c_{44}^{(r)}B_1^{(r)} = \langle\sigma_{13}^{(r)}\rangle - i\langle\sigma_{23}\rangle - e_{15}^{(r)}B_2^{(r)}, \quad B_2^{(r)} = i\langle E_2^{(r)}\rangle - \langle E_1\rangle \quad (r = 1,2)$$

$$\langle\sigma_{13}^{(2)}\rangle = c_1\langle\sigma_{13}^{(1)}\rangle + (c_1 - e_1)\, e_{15}^{(1)}\langle E_1\rangle \tag{3.2}$$

$$(1+\varkappa_2^2)\langle E_2^{(2)}\rangle = \varepsilon_2(1+\varkappa_1^2)\langle E_2^{(1)}\rangle + \frac{e_{15}^{(1)}(c_1 - e_1)}{c_{44}^{(2)}\varepsilon_{11}^{(2)}}\langle\sigma_{23}\rangle$$

Таким образом, однородные механические и электрические поля на бесконечности не совсем произвольны, между ними имеют место соотношения связи (3.2). Комплексные потенциалы (3.1) удовлетворяют условиям сопряжения на оси независимо от выбора плотностей $\omega_\nu(\zeta)$.

Из граничных условий (1.5) следует, что функция $\Phi_2^{(1)}(z)$ непрерывно продолжима через разрезы, что влечет за собой равенство $\omega_2(\zeta) = 0$. Функции (3.1) при этом принимают вид

$$\Phi_1^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_1(\zeta)}{\bar\zeta - z}\,ds - \frac{\alpha_{1,1}^{(1)}}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_1(\zeta)}{\bar\zeta - z}\,ds, \quad \Phi_2^{(1)}(z) = -\frac{\alpha_{2,1}^{(1)}}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_1(\zeta)}{\bar\zeta - z}\,ds, \quad \operatorname{Im} z \geqslant 0$$

$$\Phi_\nu^{(2)}(z) = \frac{\alpha_{\nu+2,1}^{(1)}}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_1(\zeta)}{\zeta - z}\,ds, \quad \operatorname{Im} z \leqslant 0 \tag{3.3}$$

Единственную плотность $\omega_1(\zeta)$ необходимо определить из оставшегося невыполненным первого граничного условия в (1.5). Подставляя туда предельные значения функций $\Phi_\nu^{(1)}(z)$ при $z \to \zeta_0 \in L$, приходим к сингулярному интегральному уравнению первого рода

$$\int_L \omega_1(\zeta)\, G(\zeta,\zeta_0)\, ds = N(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in L = \cup L_j \tag{3.4}$$

$$G(\zeta,\zeta_0) = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\left\{e^{i\psi_0}\left(\frac{1}{\zeta - \zeta_0} - \frac{\delta}{\bar\zeta - \zeta_0}\right)\right\}$$

$$c_{44}^{(1)}N(\zeta_0) = -\langle\sigma_{13}^{(1)}\rangle\cos\psi_0 - \langle\sigma_{23}\rangle\sin\psi_0$$

$$\Delta_1\delta = (1 - c_1)(1+\varepsilon_1) + \varkappa_1^2(1 + 2e_1 - 2c_1 - e_1^2)$$

Решение этого уравнения в классе функций, неограниченных на концах дуг L_j, фиксируется дополнительными условиями (однозначности перемещения)

$$\int_{L_j} \omega_{1j}(\zeta)\, ds = 0 \quad (j = 1,2,\ldots,M) \tag{3.5}$$

В соответствии со сказанным произведем параметризацию контуров L_j (ниже индекс j опускаем) и положим

$$\omega_1(\zeta)=\frac{\Omega(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}\,s'(\beta)},\quad s'(\beta)=\frac{ds}{d\beta}>0$$

$$\zeta=\zeta(\beta),\ \ -1\leqslant\beta\leqslant 1,\quad \operatorname{Im}\Omega(\beta)=0 \tag{3.6}$$

Тогда интегральное представление (3.3) функции $\Phi_1^{(1)}(z)$ с учетом соотношений (1.6) и поведения интеграла типа Коши на концах линии интегрирования [5] дает следующие асимптотические формулы в вершинах трещины:

$$\sigma=(\sigma_{13}-i\sigma_{23})\,ie^{i\psi_c}=\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi\rho}}\left(\sin\frac{\theta}{2}\pm i\cos\frac{\theta}{2}\right)+O(1)$$

$$K_{III}=\frac{\sqrt{\pi}\,c_{44}^{(1)}\Omega(\pm1)}{2\sqrt{s'(\pm1)}},\quad \rho=|z-c|$$

$$(D_1-iD_2)\,ie^{i\psi_c}=\frac{e_{15}^{(1)}}{c_{44}^{(1)}}\sigma,\quad E_1=O(1),\quad E_2=O(1) \tag{3.7}$$

Здесь ψ_c – угол между нормалью к L_j в вершине c и осью ox_1; θ – угол, отсчитываемый от касательной к вершине трещины на ее продолжении до вектора $z-c$, верхний знак соответствует вершине $c=b$, нижний – $c=a$ (фиг. 1, *а*).

Остановимся на наиболее интересном случае, когда трещина концом a выходит на границу раздела сред (фиг. 1, *в*). Будем предполагать, что в этой точке плотность в интегральном уравнении (3.4) имеет степенную особенность и может быть представлена в виде

$$\omega_1(\zeta)=\frac{\omega(\zeta)}{(\zeta-a)^\gamma},\quad \zeta-a=\rho e^{i\alpha^*},\quad \operatorname{Im}\gamma=0,\quad 0\leqslant\gamma<1 \tag{3.8}$$

где $\omega(\zeta)$ удовлетворяет условию Гельдера в окрестности точки a и угол α^* стремится к углу наклона α касательной к L в точке a при $\zeta\to a$.

Воспользовавшись асимптотическим представлением интеграла типа Коши вблизи конца линии интегрирования, выпишем интегральное уравнение (3.4) в окрестности вершины a:

$$\operatorname{ctg}(\pi\gamma)\operatorname{Re}\frac{\omega(a)}{(\zeta-a)^\gamma}+\frac{\delta}{\sin\pi\gamma}\operatorname{Re}\frac{\overline{\omega(a)}\,e^{i[2\alpha-\pi(1+\gamma)]}}{(\zeta-a)^\gamma}+\ldots=2N(\zeta_0) \tag{3.9}$$

Здесь точками обозначены члены, обладающие быть может степенной особенностью, но более низкого порядка чем $(\zeta-a)^{-\gamma}$.

Умножив левую и правую части равенства (3.9) на $|\zeta-a|^\gamma$ и учитывая тот факт, что $\omega_1(\zeta)$ – действительная функция, получим в пределе при $\zeta\to a$ следующее уравнение относительно γ:

$$\cos\pi\gamma-\delta\cos[\pi\gamma+2(1-\gamma)\alpha]=0 \tag{3.10}$$

Фигурирующая здесь величина δ определена в (3.4) и содержит в себе информацию о физико-механических параметрах системы.

В частном случае, когда трещина подходит к оси x_1 под прямым углом ($\alpha=\pi/2$), находим

$$\cos\pi\gamma=-\delta,\quad 0\leqslant\gamma<1 \tag{3.11}$$

4. Рассмотрим теперь ситуацию, когда в составной пьезоэлектрической среде имеется трещина пересекающая границу раздела сред. В этом случае при построении интегральных представлений решений исходим из фундаментального решения (2.6). Учитывая непрерывную продолжимость функции $F_2^{(r)}$ через L_r ($r = 1, 2$), приходим к следующим формулам:

$$F_\nu^{(r)}(z) = B_\nu^{(r)} + \Phi_\nu^{(r)}(z), \quad (\nu, r = 1,2) \tag{4.1}$$

$$\Phi_1^{(r)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_r}\frac{\omega_1^{(r)}(\zeta)}{\zeta - z}ds - \frac{\alpha_{1,1}^{(r)}}{2\pi i}\int_{L_r}\frac{\omega_1^{(r)}(\zeta)}{\bar\zeta - z}ds + \frac{\alpha_{3,1}^{(3-r)}}{2\pi i}\int_{L_{3-r}}\frac{\omega_1^{(3-r)}(\zeta)}{\zeta - z}ds$$

$$\Phi_2^{(r)}(z) = -\frac{\alpha_{2,1}^{(r)}}{2\pi i}\int_{L_r}\frac{\omega_1^{(r)}(\zeta)}{\bar\zeta - z}ds + \frac{\alpha_{2,1}^{(3-r)}}{2\pi i}\int_{L_{3-r}}\frac{\omega_1^{(3-r)}(\zeta)}{\zeta - z}ds, \quad \operatorname{Im}\omega_1^{(r)}(\zeta) = 0$$

Здесь $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ при $r = 1$ и $\operatorname{Im} z \leqslant 0$ при $r = 2$; L_r – часть контура L, лежащая в r-й полуплоскости.

Электрические граничные условия (1.5) на трещине сводятся к равносильным равенствам

$$[F_2(z)]_L = 0, \quad \left[\frac{\partial u_3}{\partial n}\right]_L = 0, \quad L = L_1 \cup L_2 \tag{4.2}$$

где символ $[\cdot]_L$ обозначает скачок соответствующей функции при переходе через L.

Непосредственно видно, что эти условия удовлетворяются независимо от выбора плотностей $\omega_1^{(n)}(\zeta)$. Последние определяются из механического граничного условия (1.5). Подстановка в него предельных значений $\sigma_{n3}^{\pm}$ с учетом (4.1), дает

$$\sum_{n=1}^{2}\int_{L_n}\omega_1^{(n)}(\zeta)\, G_{mn}(\zeta,\zeta_0)\, ds = N_m(\zeta_0) \quad (m = 1,2) \tag{4.3}$$

$$G_{nn}(\zeta,\zeta_0) = \operatorname{Im}\left\{e^{i\psi_0}\left(\frac{1}{\zeta-\zeta_0} - \frac{\delta_{nn}}{\bar\zeta-\zeta_0}\right)\right\}; \quad \zeta,\zeta_0 \in L_n \quad (n = 1,2)$$

$$G_{12}(\zeta,\zeta_0) = \delta_2 \operatorname{Im}\frac{e^{i\psi_0}}{\zeta-\zeta_0}, \quad \zeta \in L_2, \quad \zeta_0 \in L_1$$

$$G_{21}(\zeta,\zeta_0) = \delta_1 \operatorname{Im}\frac{e^{i\psi_0}}{\zeta-\zeta_0}, \quad \zeta \in L_1, \quad \zeta_0 \in L_2$$

$$N_m(\zeta_0) = -\frac{2\pi}{c_{44}^{(m)}}\{\langle\sigma_{13}^{(m)}\rangle\cos\psi_0 + \langle\sigma_{23}\rangle\sin\psi_0\}, \quad \zeta_0 \in L_m \quad (m = 1,2)$$

$$\Delta_n\delta_{nn} = (1-c_n)(1+2\varepsilon_n) + \varkappa_n^2(1+2e_n-2c_n-e_n^2) \quad (n = 1,2)$$

$$\delta_n = 1 + \alpha_{1,1}^{(n)} + 2\frac{e_{15}^{(1)}e_{15}^{(2)}(e_n - c_n)}{C_{44}^{(3-n)}\varepsilon_{11}^{(n)}\Delta_n}, \quad \Delta_2 = c_2\varepsilon_2\Delta_1$$

Система сингулярных интегральных уравнений (4.3) помимо подвижной особенности типа Коши в ядрах имеет неподвижные особенности в точке пересечения контура трещины с осью x_1.

Из соотношений (1.6) и (4.1) находим скачок перемещения u_3 на линии трещины

$$[u_3^{(1)}(\zeta_0)] = \int_{\zeta_0}^{b}\omega_1^{(1)}(\zeta)\,ds, \quad \zeta_0 \in L_1, \quad [u_3^{(2)}(\zeta_0)] = -\int_{a}^{\zeta_0}\omega_1^{(2)}(\zeta)\,ds, \quad \zeta_0 \in L_2$$

№	M	C_{44} [Н/м^2]	$\varepsilon_{11}/\varepsilon_0$	e_{15} [Кл/м^2]
1	PZT-4	$2{,}56\cdot10^{10}$	730	12,7
2	ЦТС-19	2,40	840	10,6
3	ПП-1	5,12	800	0
4	ПП-2	10,00	500	0

№	PZT-4 / ЦТС-19	PZT-4 / ПП-1	ПП-2 / PZT-4	Бор / Эпоксид (c_1 = 1/129)	Эпоксид / Бор (c_1 = 129)
1 2 3 4	$\delta = 3{,}08\cdot10^{-2}$	–0,6878	0,4253	0,9846	–0,9846

где b и a – вершины трещины, лежащие соответственно в верхней и нижней полуплоскостях.

Условие равенства скачков перемещений $u_3^{(1)}$ и $u_3^{(2)}$ в точке пересечения контура L с осью x_1 приводит к равенству

$$\int\limits_L \omega_1(\zeta)\,ds = 0, \quad \omega_1(\zeta) = \{\omega_1^{(r)}(\zeta), \zeta\in L_r \ \ (r=1,2)\} \tag{4.4}$$

Таким образом, систему (4.3) необходимо рассматривать совместно с дополнительным условием (4.4).

Для определения порядка степенной особенности γ в точке пересечения контура трещины с осью x_1 (точка c на фиг. 1, c) введем представления

$$\omega_1^{(r)}(\zeta) = \frac{\omega^{(r)}(\zeta)}{(\zeta-c)^\gamma}, \quad \zeta\in L_r, \quad \operatorname{Im}\gamma = 0 \ \ (r=1,2) \tag{4.5}$$

$$\zeta_0 - c = \rho_r e^{i\alpha_r^*}, \quad \zeta_0\in L_r, \quad \lim\alpha_r^* = (-1)^{r-1}\alpha_r \quad (\zeta_0\to c)$$

$$0\leqslant\alpha_1\leqslant\pi, \quad 0\leqslant\alpha_2\leqslant\pi$$

где $(-1)^{r-1}\alpha_r$ $(r = 1,2)$ – угол, составленный касательной к контуру L_r в точке c и осью ox_1, функции $\omega^{(r)}(\zeta)$ ограничены в окрестности точки c.

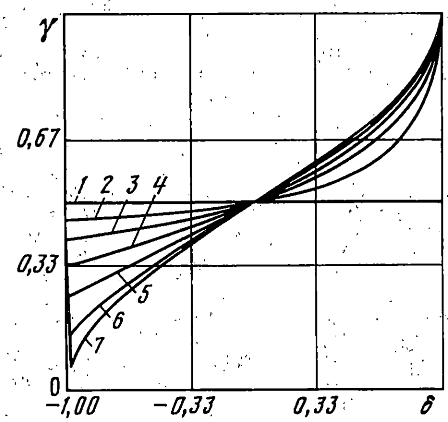
Используя асимптотические представления интегралов типа Коши в окрестности узла c [5], получаем при помощи той же процедуры, что и выше, однородную систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\Omega_1\{\delta_{11}\cos[\pi\gamma+2\alpha_1(1-\gamma)]-\cos\pi\gamma\}-\Omega_2\delta_{12}\cos[\pi\gamma+(\alpha_1+\alpha_2)(1-\gamma)]=0 \tag{4.6}$$

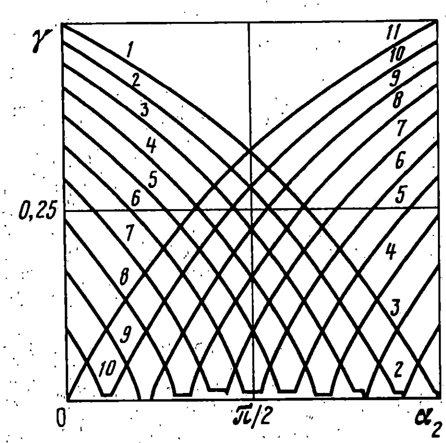
$$-\Omega_1\delta_{21}\cos[\pi\gamma+(\alpha_1+\alpha_2)(1-\gamma)]+\Omega_2\{\delta_{22}\cos[\pi\gamma+2\alpha_2(1-\gamma)]-\cos\pi\gamma\}=0$$

$$\Omega_r = \omega^{(r)}(c)\exp\{(-1)^{r-1}i\gamma(2\pi-\alpha_r)\}, \quad \operatorname{Im}\Omega_r = 0$$

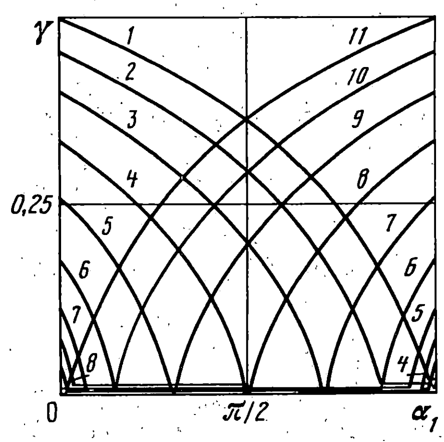
Поскольку, по предположению, плотности имеют в узле степенную особенность порядка γ, то следует считать, что $\omega^{(r)}(c)\neq 0$. Тогда условие нетривиальной разреши-



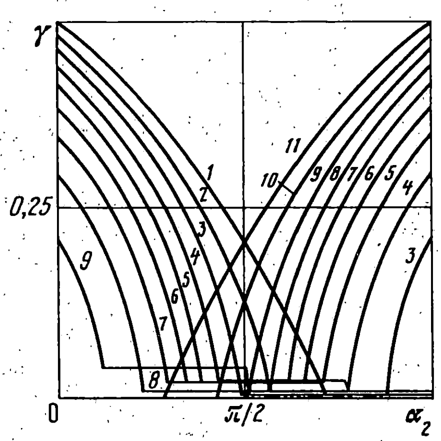
Фиг. 2



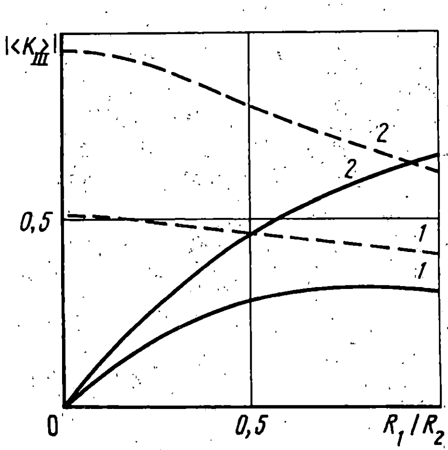
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

мости системы (4.6) приводит к уравнению относительно γ:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}\cos[\pi\gamma+2\alpha_1(1-\gamma)]-\cos\pi\gamma & -\delta_{12}\cos[\pi\gamma+(\alpha_1+\alpha_2)(1-\gamma)] \\ -\delta_{21}\cos[\pi\gamma+(\alpha_1+\alpha_2)(1-\gamma)] & \delta_{22}\cos[\pi\gamma+2\alpha_2(1-\gamma)]-\cos\pi\gamma \end{vmatrix}=0 \qquad (4.7)$$

Отметим, что в узле c допускается излом трещины, поэтому возникает множество частных случаев, выписать которые не представляет труда. Отсюда также следуют результаты для составного пьезокерамического клина.

5. Пусть трещина подходит из верхней полуплоскости к линии раздела материалов (фиг. 1, *в*). Согласно уравнению (3.10) величина γ зависит от параметра δ, содержащего в себе информацию о модулях сдвига, диэлектрических проницаемостях и пьезомодулях сопрягающихся материалов. Результаты расчета величины δ для различных композиций представлены в таблице (данные для пьезокерамики взяты из [2]). Как видно из таблицы, достаточно разыскивать корни уравнения (3.10) на интервале $-1 < \delta < 1$ (M – марка материала).

Графики изменения величины $\gamma = \gamma(\delta)$ для различных значений угла наклона трещины α показаны на фиг. 2. Здесь кривые *1*, *2*, ..., *7* построены для значений $\alpha = \pi n/12$ ($n = 0, 1, ..., 6$) соответственно. При $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi/2$ имеем межфазную трещину. Так же как и в композиции из пьезопассивных материалов в этом случае имеет место корневая особенность в ее вершинах.

Пусть теперь трещина пересекает границу раздела материалов, причем в точке пересечения имеет место излом (фиг. 1, *c*). Порядок степенной особенности γ подсчитывается по уравнению (4.7). На фиг. 3–5 приведены кривые, иллюстрирующие изменение параметра γ в зависимости от углов α_1 и α_2 для композиции PZT-4/ЦТС-19, PZT-4/ПП-1 и ПП-2/PZT-4 соответственно. Кривые *1*, *2*, ..., *11* построены для значений угла $\alpha_1 = \pi n/10$ ($n = 0, 1, ..., 10$). Отметим, что в отличие от композиций из пьезопассивных материалов (ПП) здесь $\gamma \neq 0$ при $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$.

При расчете коэффициента интенсивности напряжений (КИН) в вершинах трещины рассматривался "хороший" случай, когда параболический разрез $x_1 = R_1\beta^2$, $x_2 = R_2\beta$, $-1 \leqslant \beta \leqslant 1$ под прямым углом пересекает ось x_1. Искомое решение системы интегральных уравнений (4.3) представлялось в виде (3.6), причем $\Omega(\beta) = \Omega_1(\beta)$ при $0 < \beta < 1$ и $\Omega(\beta) = \Omega_2(\beta)$ при $-1 < \beta < 0$, где функции $\Omega_1(\beta)$, $\Omega_2(\beta)$ удовлетворяют условию Гельдера в соответствующих промежутках за исключением точки $\beta = 0$. Порядок степенной особенности γ в этой точке весьма мал, поэтому система (4.3) приближенно решалась обычным методом механических квадратур [6]. После вычисления функции $\Omega(\beta)$ КИН в вершинах трещины a, b определялся по формулам

$$K_{III}^a = \frac{\sqrt{\pi}\, c_{44}^{(2)}\Omega_2(-1)}{2\sqrt{s'(-1)}}, \quad K_{III}^b = -\frac{\sqrt{\pi}\, c_{44}^{(1)}\Omega_1(1)}{2\sqrt{s'(1)}}$$

На фиг. 6 представлены результаты расчета модулей относительных КИН $\langle K_{III}^a\rangle = K_{III}^a/(\sigma_2\sqrt{\pi l})$ и $\langle K_{III}^b\rangle = K_{III}^b/(\sigma_1\sqrt{\pi l})$, где $\sigma_{1,2}$ – параметры нагружения, $2l$ – длина трещины, для композиции ПП-2/PZT-4. Кривые *1* и *2* построены для вершин a и b; сплошные линии соответствуют значениям $\langle\sigma_{13}^{(1)}\rangle = 0$, $\langle\sigma_{23}\rangle = 1$ ($\sigma_1 = \sigma_2 = \langle\sigma_{23}\rangle$), штриховые – $\langle\sigma_{13}^{(1)}\rangle = 1$, $\langle\sigma_{23}\rangle = 0$ ($\sigma_1 = \langle\sigma_{13}^{(1)}\rangle$, $\sigma_2 = c_1\langle\sigma_{13}^{(1)}\rangle$), при этом $\langle E_1\rangle = 0$, $\langle E_2^{(1)}\rangle = 0$. Отметим, что нечувствительность поля электрической напряженности к трещине является следствием граничных условий (1.5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фильштинский Л.А., Фильштинский М.Л.* Функция Грина для составной пьезокерамической плоскости с межфазной трещиной // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 2. С. 159–166.
2. *Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика. Т. 1. Методы и приборы ультразвуковых исследований. Ч.А. М.: Мир, 1966. С. 204–326.
3. *Партон В.З., Кудрявцев Б.А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 474 с.
4. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга А.Н.* Электроупругость. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Киев: Наук. думка, 1989. 279 с.
5. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
6. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.

Сумы

Поступила в редакцию
15.IX.1996