МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1998

УДК 539.3

© 1998 г. ПРЯХИНА О.Д., ФРЕЙГЕЙТ М.Р.

СВЯЗАННАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА О ВОЗБУЖДЕНИИ ЭЛЕКТРОУПРУГОГО СЛОЯ МАССИВНЫМ ЭЛЕКТРОДОМ

Исследование динамических процессов в задачах электроупругости проводилось в предположении, что все характеристики изменяются во времени по гармоническому закону. Решению задач в нестационарной постановке, несмотря на их актуальность, посвящены единичные публикации, при этом масса электрода не учитывалась, а воздействие на среду осуществлялось либо механическим, либо электрическим путем.

В публикуемой работе рассматривается связанная нестационарная задача о возбуждении одиночным электродом электроупругого слоя, занимающего область $-h \leqslant z \leqslant h, -\infty < x$, $y < \infty$. Предполагается, что слой жестко сцеплен с недеформируемым основанием, а контакт электрода со средой осуществляется без трения. В качестве электроупругих материалов рассматриваются ZX-срезы пьезокристаллов класса 6mm гексагональной сингонии и пьезокерамика, поляризованная по оси Z. Главная ось симметрии кристалла Z совпадает с нормалью к поверхности z, движение происходит в плоскости xoz. Электрод моделируется массивным полосовым штампом ширины $2a$, на который действует изменяющаяся во времени t вертикальная механическая нагрузка $P(t)$. Электрическое возбуждение осуществляется током заданной величины $I(t)$. Вне области контакта электрода со средой поверхность свободна от электрических и механических нагрузок. В начальный момент времени система находится в покое.

Построено решение задачи и изучено влияние электроупругих свойств материалов, типа нестационарного электрического и механического воздействия на смещения электрода, потенциал, а также на усилия, возникающие в области контакта и полный заряд на поверхности электрода.

В плоской постановке горизонтальные и вертикальные смещения электроупругой среды u, w и потенциал ψ, вызываемые нагружением τ, q и индукцией d, заданных на поверхности среды, определяются в преобразованиях Фурье – Лапласа в виде

$$\mathbf{w}(x,z,p) = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma} \mathbf{K}(\alpha,z,p)\mathbf{Q}(\alpha,p)e^{-i\alpha x}d\alpha \tag{1}$$

$$\mathbf{Q}(\alpha,p) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{q}(x,p)e^{i\alpha x}dx, \qquad \mathbf{w} = \{u,w,\psi\}, \qquad \mathbf{q} = \{\tau,q,d\}$$

Эти представления строятся методом интегральных преобразований из дифференциальных уравнений электроупругости (в квазистатическом приближении) [1]. Подынтегральная матрица – функция $\mathbf{K}(\alpha,z,p) = \| K_{ij} \|_{i,j=1}^{3}$ определяется типом среды.

В случае трехмерной постановки матрица $\mathbf{K}$ (размера 4×4) для электроупругой среды класса 6mm гексагональной сингонии получена в [1] и имеет структуру

$$\mathbf{K}(\alpha,z,p) = \mathbf{B}_+(z) - \mathbf{B}_-(z)B_-^{-1}(-h)B_+(-h) = \begin{Vmatrix} K_{11} & i\alpha K_{12} & i\alpha K_{13} \\ -i\alpha K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ -i\alpha K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{Vmatrix}$$

Матрицы $\mathbf{B}_\pm(z)$ размера 3×3 двумерной задачи имеют вид

$$\mathbf{B}_\pm(z) = \begin{Vmatrix} \alpha^2 m_1^\pm & \pm i\alpha m_2^\pm & \pm i\alpha m_3^\pm \\ -i\alpha k_1^\pm & \pm k_2^\pm & \pm k_3^\pm \\ -i\alpha r_1^\pm & \pm r_2^\pm & \pm r_3^\pm \end{Vmatrix}$$

$$m_i^\pm = M_i^- \pm M_i^+, \quad k_i^\pm = K_i^- \pm K_i^+, \quad r_i^\pm = R_i^- \pm R_i^+$$

Вид функций $M_i^\pm, K_i^\pm, R_i^\pm$ приведен в [1].

Отметим, что функции K_{ij} представляют собой аналитические функции, за исключением одних и тех же для всех функций полюсов, действительные на вещественной оси α и четные по α.

Матрица $\mathbf{K}(\alpha, z, p)$ имеет следующее асимптотическое поведение $\mathbf{K}(\alpha, z, p)_{|\alpha|\to\infty} \sim$ $\sim \mathbf{B}_+(z)$ при $|\alpha| \to \infty$. Последнее следует из свойств матриц $\mathbf{B}_\pm(\mp h)$. В частности при $z = h$:

$$\mathbf{B}_+(h) \sim \begin{Vmatrix} \dfrac{a_{11}}{|\alpha|} & i\dfrac{a_{12}}{\alpha} & i\dfrac{a_{13}}{\alpha} \\ -i\dfrac{a_{12}}{\alpha} & \dfrac{a_{22}}{|\alpha|} & \dfrac{a_{23}}{|\alpha|} \\ -i\dfrac{a_{13}}{\alpha} & \dfrac{a_{23}}{|\alpha|} & \dfrac{a_{33}}{|\alpha|} \end{Vmatrix} \tag{2}$$

где элементы a_{ij} получены в [1].

Пусть на поверхности среды заданы смешанные граничные условия

$$\begin{aligned} z = h:\ & w = u_0(p),\ \psi = \psi_0(p),\ |x| \leqslant a \\ & q(x, p) = 0,\ d(x,p) = 0,\ |x| > a \\ & \tau(x, p) = 0,\ -\infty < x < \infty \\ z = -h:\ & u = w = \psi = 0,\ -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

В этом случае из (1) получим систему интегральных уравнений контактной задачи

$$K\mathbf{q} = \int_{-a}^{a} \mathbf{k}(x-\xi, p)\mathbf{q}(\xi, p)d\xi = \mathbf{w}(p), \qquad \mathbf{k}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \mathbf{K}(\alpha, p)e^{-i\alpha x}d\alpha \tag{3}$$

относительно неизвестного вектора $q = \{q, d\}$:

$$w = \{u_0, \psi_0\}, \quad \mathbf{K} = \| K_{ij} \|_{i,j=2}^3, \quad K_{23} = K_{32}, \quad K(\alpha, h, p) \equiv K(\alpha, p) \equiv K(\alpha)$$

В случае введения в среду вязкости контур интегрирования σ совпадает с вещественной осью, в противном случае выбор контура диктуется условиями излучения на бесконечности [2].

Рассмотрим различные случаи электромеханического нагружения электрода:

(a) пусть на электрод массы m действует вертикальная механическая нагрузка $P(t)$. Тогда смещения электрода определяются из уравнения

$$mp^2u_0 = P(p) - Q(p), \quad Q = \int_{-a}^{a} q(x)dx \tag{4}$$

где Q – реакция основания.

Если электрод запитывается током известной величины $I(t)$, то неизвестное значение потенциала ψ_0 определяется из условия [3]:

$$-pD = I(p), \quad D = -\int_{-a}^{a} d(x)dx \tag{5}$$

где D – полный заряд на поверхности электрода.

Если к электроду не подводится и с него не снимается электрическая энергия, то значение ψ_0 определяется из условия сохранения заряда $I = -pD = 0$.

Обозначим через $\mathbf{q}^k\{q^k, d^k\}$ $(k = 1, 2)$ решения системы интегральных уравнений вида (3):

$$\mathbf{Kq}^1 = \begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}, \quad \mathbf{Kq}^2 = \begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}$$

Тогда в силу линейной постановки задачи

$$Q = u_0 Q^1 + \psi_0 Q^2, \qquad D = u_0 D_1 + \psi_0 D^2, \qquad Q^k = \int_{-a}^{a} \mathbf{q}^k(x)dx \quad (k = 1,2) \tag{6}$$

и уравнения (4), (5) запишутся в виде

$$mp^2 u_0 = P - u_0 Q^1 - \psi_0 Q^2, \quad -p(u_0 D^1 + \psi_0 D^2) = I$$

Отсюда

$$u_0 = \frac{1}{\Delta}(-pD^2 P - Q^2 I), \qquad \psi_0 = \frac{1}{\Delta}[I(Q^1 + mp^2) + pD^1 P]$$

$$\Delta = -p[D^2(Q^1 + mp^2) - D^1 Q^2] \tag{7}$$

(b) пусть задана механическая нагрузка $P(t)$ и электрод возбуждается электрическим полем. Тогда потенциал считается известной величиной $\psi = \psi_0(t)$ и решение задачи запишется

$$u_0 = (P - \psi_0 Q^2)/(Q^1 + mp^2)$$

(c) пусть заданы ток $I(t)$ и смещения электрода $u = u_0(t)$, тогда имеем

$$\psi_0 = (I + u_0 D^1 p)/(-pD^2)$$

Решение системы (3) с символом ядра $\mathbf{K}$, имеющим на бесконечности представление вида (2) строится методом фиктивного поглощения в [4] для правой части вида $\mathbf{A}e^{-i\eta x}$, $\mathbf{A} = \{A_1, A_2\}$. Решение системы интегральных уравнений (3) для правой части $\mathbf{A}\cos(\eta x)$ в преобразованиях Фурье – Лапласа имеет вид

$$\mathbf{Q}_\eta(\alpha, p) = \frac{\mathbf{K}^{-1}(\alpha)}{2\sqrt{\alpha^2 + B^2}}\left\{\mathbf{A}f_3(\alpha,\eta) - \mathbf{S}_0 \sum_{k=1}^{n} [\mathbf{f}_1(\alpha, x_k) + \mathbf{f}_1(\alpha, -x_k)]\mathbf{C}_k\right\} \tag{8}$$

Неизвестные компоненты вектора $\mathbf{C}_k = \{C_k^1, C_k^2\}$ находятся из системы n алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} [\mathbf{f}_1(\alpha, x_k) + \mathbf{f}_1(\alpha, -x_k)]\mathbf{C}_k = \mathbf{S}_0^{-1}\mathbf{A}f_3(\alpha,\eta), \qquad \alpha = +\zeta_l \quad (l = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\mathbf{f}_1(\alpha, x) = \sqrt{B + i\alpha}\; e^{i\alpha a}\mathbf{F}(\alpha, x) + \sqrt{B - i\alpha}\; e^{-i\alpha a}\mathbf{F}(-\alpha, -x)$$

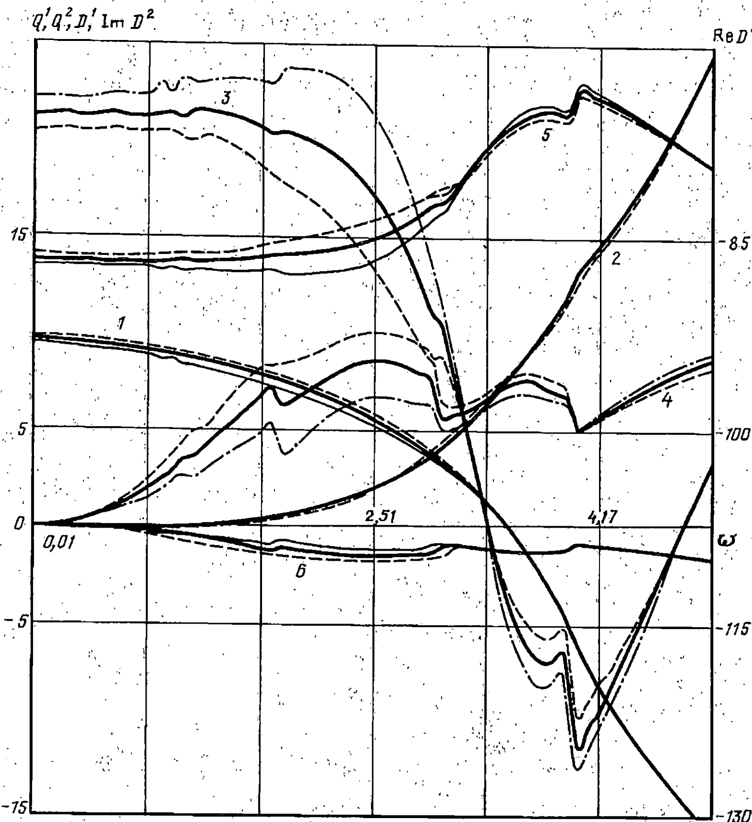
$$f_2(\alpha,\eta) = \frac{e^{i(\alpha-\eta)a}}{i(\alpha - \eta)}[\sqrt{(B + i\alpha)(B - i\eta)}\,\mathrm{erf}\sqrt{2a(B + i\alpha)} + \sqrt{B^2 + \eta^2}\,(\mathrm{erf}\sqrt{2a(B - i\eta)} - 1)]$$

$$f_3(\alpha,\eta) = f_2(\alpha,\eta) + f_2(-\alpha,-\eta) + f_2(\alpha,-\eta) + f_2(-\alpha,\eta)$$

$$\mathbf{F}(a, x) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{a=p_j} \mathbf{\Pi}(\alpha)\frac{e^{ip_j(a-x)}}{(p_j + \alpha)\sqrt{B - ip_j}}$$

$$\mathbf{\Pi}(\alpha) = \mathbf{S}_0^{-1}\mathbf{K}(\alpha)\sqrt{\alpha^2 + B^2}, \qquad \mathbf{S}_0(\alpha) = \begin{Vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33}\end{Vmatrix}$$

где p_j – полюса прямой матрицы $\mathbf{\Pi}(\alpha)$, ζ_l – полюса обратной матрицы $\mathbf{\Pi}^{-1}(\alpha)$,



Фиг. 1

расположенные выше контура σ, x_k – точки, делящие интервал $(0, a)$ на равные отрезки $(j, l, k = 1, 2, \ldots, n)$.

Нетрудно убедиться в том, что функционалы $\mathbf{Q}^k$, участвующие в решении (7) связаны с решением (8) соотношениями $\mathbf{Q}^1 = \mathbf{Q}_\eta$ при $\alpha = \eta = A_2 = 0, A_1 = 1$; $\mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}_\eta$ при $\alpha = \eta = A_1 = 0, A_2 = 1$.

Для определения смещений точек среды и потенциала вне области контакта и на глубине следует воспользоваться интегральным представлением (1).

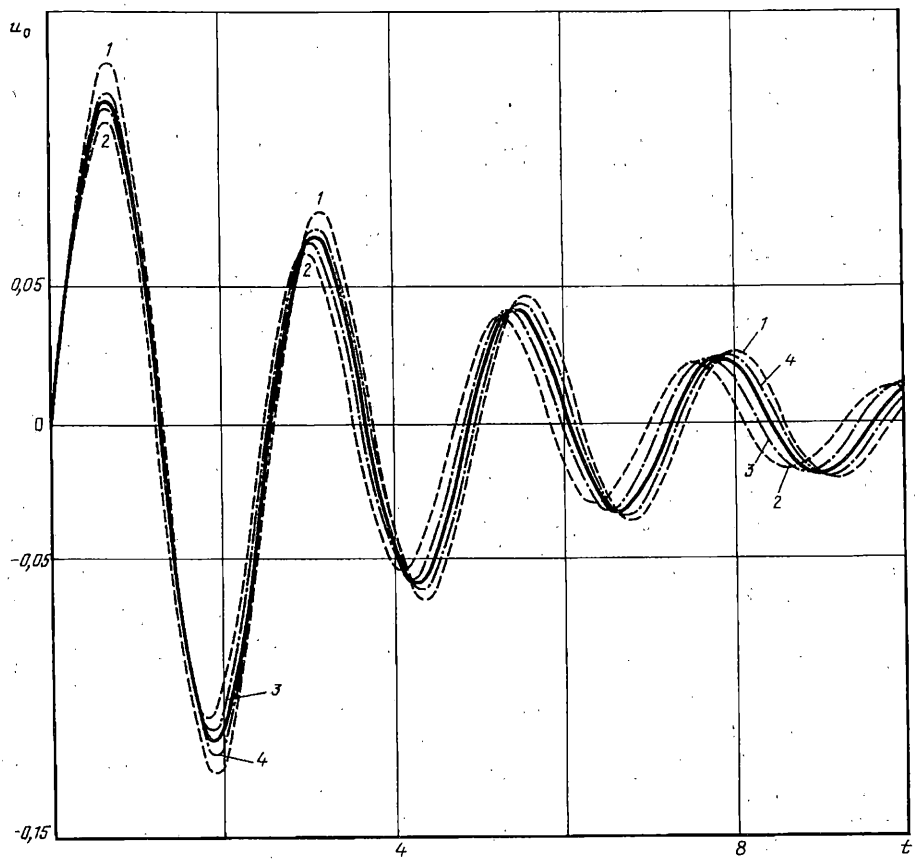
Согласно методу фиктивного поглощения [5] из (1) имеем

$$\mathbf{w}(x,z,p) = -i\sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{\alpha=-p_j} \mathbf{K}(\alpha,z,p)\sum_{k=1}^{n} \mathbf{C}_k[e^{ip_j(x-x_k)} + e^{ip_j(x+x_k)}], \quad x > a \tag{9}$$

Окончательное решение получим, применив обратное преобразование Лапласа к (6), (7), (9). Заменой $p = -i\omega$ интеграл Лапласа [1] сводится к интегралу Фурье

$$\mathbf{F}(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{Re}\mathbf{f}(i\omega)\cos\omega t d\omega = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{Im}\mathbf{f}(i\omega)\sin\omega t d\omega, \quad \mathbf{F}(t) = \{u_0, \psi_0, Q, D, u, w, \psi\} \tag{10}$$

Численный анализ проводился для электроупругих материалов, представляющих собой ZX-срезы пьезокристаллов класса 6mm гексагональной сингонии и пьезокерамику, поляризованную по оси z. Исследовано влияние упругих c_{ij}, пьезоэлектрических e_{ij} и диэлектрических ε_{ij} параметров слоя единичной толщины на функции Q^1, D^1, Q^2, D^2, определяющие реакцию основания $\mathbf{Q}$ и полный заряд $\mathbf{D}$ (6), а также на



Фиг. 2

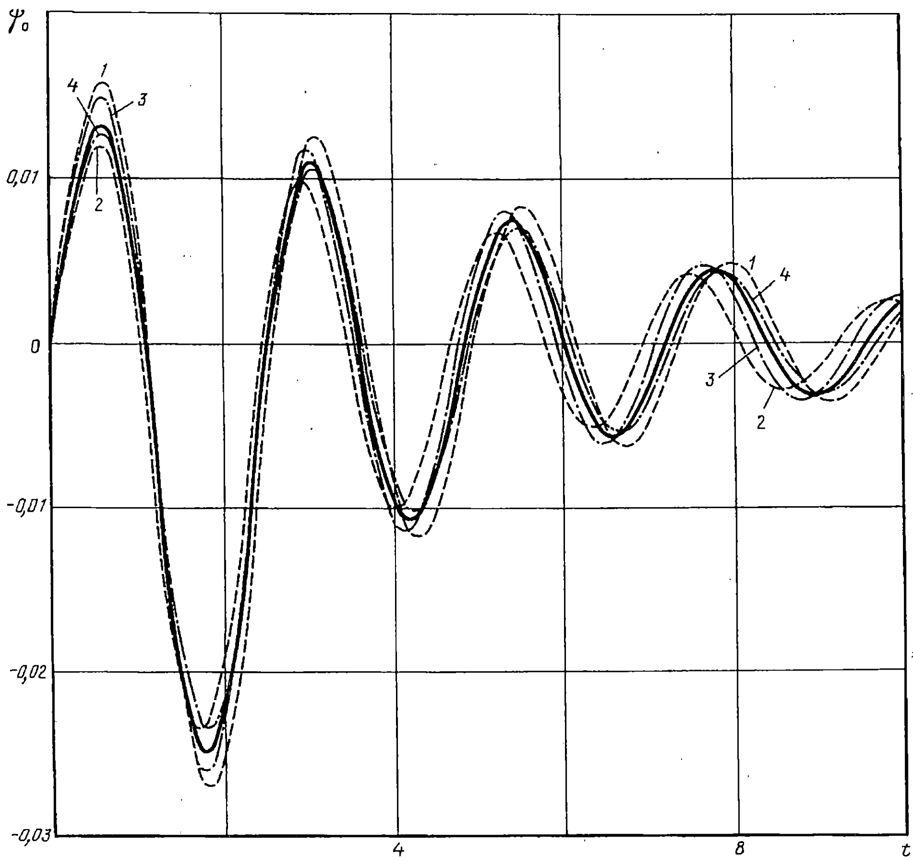
смещения электрода единичной массы u_0 и потенциал ψ_0 (7). Изучено поведение конкретных материалов под воздействием различных типов нестационарного электрического и механического возбуждения системы.

На фиг. 1 представлены графики функций Q^1, D^1, Q^2, D^2 в зависимости от частоты $\omega = ip$. В качестве материала выбрана пьезокерамика ЦТС19 – сплошные линии. Кривые *1–6* соответствуют: $\mathrm{Re}\, Q^1$, $-\mathrm{Im}\, Q^1$, $\mathrm{Re}\, D^2$, $-\mathrm{Im}\, D^2$, $\mathrm{Re}\, D^1 = \mathrm{Re}\, Q^2$, $-\mathrm{Im}\, D^1 = -\mathrm{Im}\, Q^2$. Штриховые линии соответствуют уменьшенному значению коэффициента c_{13} на 10%, штрихпунктирные – увеличенному на 10%. Из представленных графиков хорошо видно влияние коэффициента c_{13} на различные характеристики системы.

Проведенные расчеты показали, что изменение коэффициента c_{33} на ±10% наибольшее влияние оказывает на $\mathrm{Re}\, Q^1$ (кривые *1*), e_{33} – на $\mathrm{Im}\, D^2$ (кривые *4*), ε_{33} – на $\mathrm{Re}\, D^2$ (кривые *3*). Изменения остальных параметров c_{11}, e_{15}, ε_{11}, e_{31} на ±10% практически не сказываются на характере поведения функций Q^1, D^1, Q^2, D^2.

Численный анализ позволил установить следующую взаимосвязь между функциями Q^1, D^1, Q^2, D^2 : $\mathrm{Re}\, D^2 = -c_1\, \mathrm{Re} D^1 - c_2$, $\mathrm{Im}\, D^2 = -c_1\, \mathrm{Im}\, D^1$, $D^1 \equiv Q^2$; $c_{1,2} > 0$ – вещественные константы.

Фиг. 2, 3 иллюстрируют поведение системы: массивный электрод – пьезокерамический слой под воздействием механической нагрузки и тока $I(t) = P(t) = 2e^{-2t} - e^{-t}$. На фиг. 2 приведены смещения электрода, на фиг. 3 – потенциал. Сплошная линия

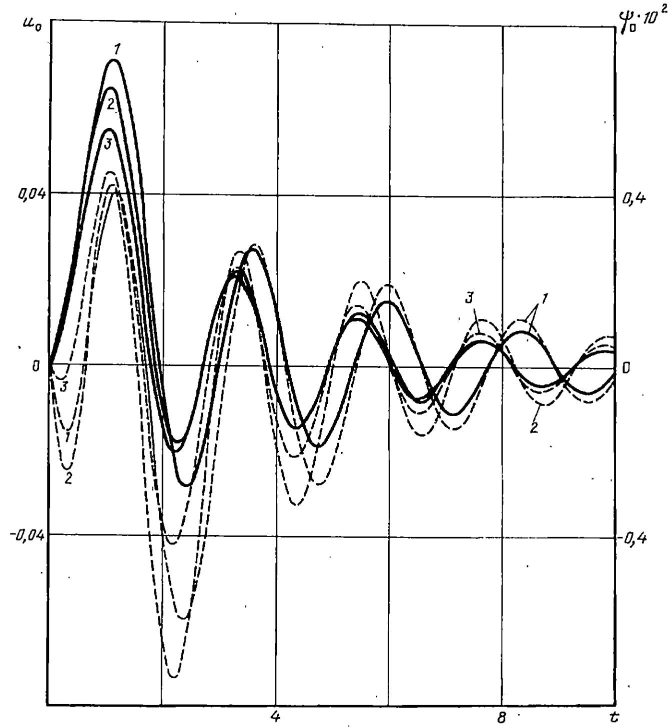


Фиг. 3

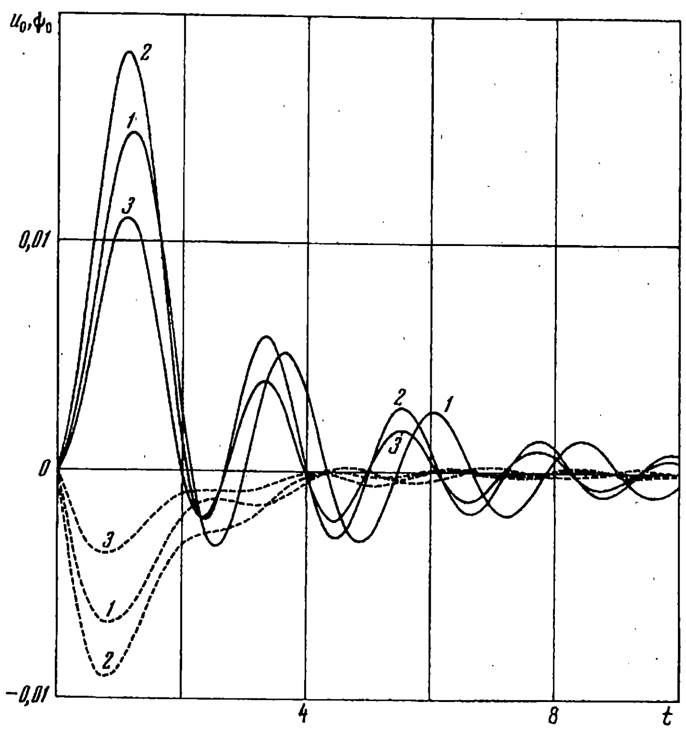
соответствует материалу ЦТС19. Кривые *1–4* соответствуют увеличению каждого из параметров $c_{13}, c_{33}, e_{33}, \varepsilon_{33}$ на 10% соответственно. Очевидно, что увеличение c_{13} приводит к увеличению амплитуд смещений и потенциала, а также увеличению периода колебаний T системы после снятия нагрузки. Увеличение c_{33} уменьшает амплитуды u_0, ψ_0 и уменьшает T; увеличение e_{33} уменьшает амплитуду u_0 и увеличивает ψ_0 при уменьшении периода T; увеличение ε_{33} увеличивает амплитуду u_0 и период T, а амплитуду ψ_0 – уменьшает. Установлено, что изменение остальных параметров $c_{11}, e_{15}, e_{31}, \varepsilon_{11}$ практически не влияет на поведение системы.

На фиг. 4 приведены смешения электрода и потенциал для различных материалов при воздействии механической нагрузки вида $P(t) = te^{-t}$ и тока $I(t) = 2e^{-2t} - e^{-t}$. Сплошные линии соответствуют $u_0(t)$, штриховые – $\psi_0(t)$. Кривые *1, 2, 3* соответствуют различным материалам: ЦТС19, PZT4 и PZT5H (табл.) Коэффициенты в табл. имеют следующие размерности: c_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, 4)$ – [Н/м²], e_{ij} $(i = 1{,}3,\ 3;\ j = 5,\ 1,\ 3)$ – [К/м²], ε_{ij} $(i, j = 1,\ 3)$ – $[10^{-10}$ Ф/м]. Аналогичная задача приведена на фиг. 5 при $P(t) = 0$, $I(t) = 2e^{-2t} - e^{-t}$. Очевидно, что для одинаковых материалов периоды колебаний $u_0(t)$ и $\psi_0(t)$ совпадают.

Численное обращение преобразования Лапласа проводилось на основе метода Филона [6], что позволило избежать трудностей при расчете интегралов (10) от сильно осциллирующих функций. Интегрирование велось по действительной оси при $\zeta = 0{,}2$ ($\omega = ipe^{-i\zeta}$, ζ – параметр вязкости среды [7]). Все величины на графиках приведены в безразмерном виде [1].


u_0
$\varphi_0 \cdot 10^2$
0,04
0
-0,04
0,4
0
-0,4
1
2
3
4
8
t

Фиг. 4


u_0, φ_0
0,01
0
-0,01
1
2
3
4
8
t

Фиг. 5

M	ЦТС19	PZT4	PZT5H
c_{11}	11,1	13,9	12,6
c_{12}	6,42	7,95	7,95
c_{13}	6,22	7,43	8,41
c_{33}	10,6	11,5	11,7
c_{44}	2,49	2,56	2,30
e_{15}	9,45	12,7	17,0
e_{31}	–3,4	–5,2	–6,5
e_{33}	15,1	15,1	23,3
ε_{11}	72,57	64,6342	150,518
ε_{33}	82,747	56,2229	130,1538

Авторы выражают благодарность И.И. Воровичу за внимание к работе и обсуждение результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00362).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович И.И., Пряхина О.Д., Тукодова О.М., Фрейгейт М.Р.* Об одном подходе к решению динамических задач для слоистых электроупругих и анизотропных сред // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 652–661.
2. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
3. *Жарий О.Ю., Улитко А.Ф.* Введение в механику нестационарных колебаний и волн. Киев: Вища шк., 1989. 184 с.
4. *Пряхина О.Д., Тукодова О.М.* Об одной плоской смешанной динамической задаче электроупругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 1. С. 80–85.
5. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 253 с.
6. *Сеймов В.М., Трофимчук А.Н., Савицкий О.А.* Колебания и волны в слоистых средах. Киев: Наук. думка, 1990. 221 с.
7. *Сорокин Е.С.* К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Госстройиздат, 1960. 131 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
26.III.1996