

УДК 531.8

© 1997 г. В.В. АЛЕКСАНДРОВ, Н.П. СТЕПАНЕНКО, А.В. ТРИФОНОВА

СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВРАЩЕНИЙ ЦЕНТРИФУГИ С УПРУГОЙ КОНСОЛЬЮ

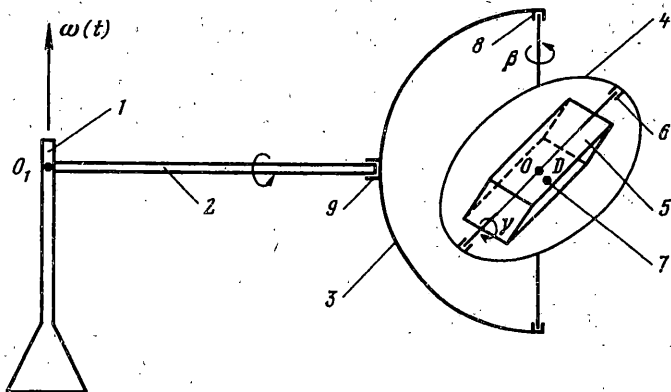
В [1] рассмотрена задача стабилизации нестационарных вращений аэрокосмического тренажера типа центрифуги в случае смещения центра масс кабины. В публикуемой работе исследуется влияние упругой податливости консоли центрифуги с управляемым кардановым подвесом на точность стабилизации нестационарного вращения (программного движения).

Схема центрифуги изображена на фиг. 1. Центрифуга представляет собой кабину пилота (5), закрепленную с помощью карданова подвеса на консоли (2). Карданов подвес состоит из полусферы-вилки (3), связанной плоским шарниром (9) с консолью, и кольца (4), которое связано плоским шарниром (8) с вилкой. Оси обоих шарниров перпендикулярны и пересекаются в точке O . Будем считать, что центры масс вилки, кольца и кабины находятся в геометрическом центре карданова подвеса. Предполагается, что кабина – осесимметричное тело, ось вращения которого проходит через центр карданова подвеса. В кабине, связанной плоским шарниром (6) с кольцом, находится кресло пилота (7). Кресло с пилотом считаются материальной точкой D , лежащей на оси вращения кольца. По осям карданова подвеса помещены двигатели, создающие управляющие моменты. Консоль вращается в горизонтальной плоскости с угловой скоростью $\omega(t)$.

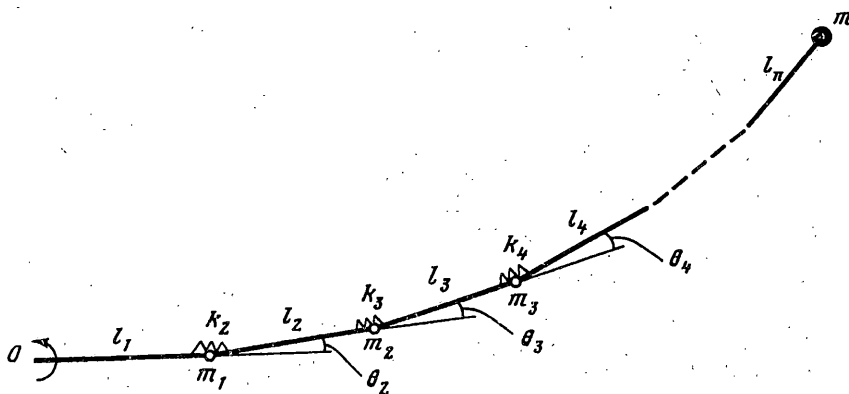
1. Выбор параметров моделирующей системы. Будем моделировать консоль системой жестких невесомых стержней длиной l_i и материальных точек массой m_i . Стержни последовательно соединены с помощью пружин, а материальные точки помещены в узлы соединения стержней. Пружины создают моменты, пропорциональные углам θ_i (фиг. 2) с коэффициентами пропорциональности k_i . Изгиб консоли рассматривается в горизонтальной плоскости.

Для имитации полета необходимо воспроизводить программные движения консоли и карданова подвеса. Для исследования влияния упругости консоли на реализацию имитирующих движений необходимо выбрать параметры стержневой модели консоли. Число и длины стержней, массы точек и жесткость пружин находим из сравнения частот колебаний сплошной консоли и моделирующей консоль системы стержней.

При выборе параметров стержневой модели предполагается, что $\omega \equiv \text{const}$ и линейные размеры вилки, кольца и кабины малы по сравнению с длиной консоли. Введем неподвижную систему координат $\xi\eta\zeta$ с началом в точке O_1 , ось ζ которой вертикальна, систему координат $x_0y_0z_0$, вращающуюся вместе с консолью с угловой скоростью $\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$ вокруг оси O_1z_0 . Материал консоли считается линейно-упругим. Введем обозначения: ρ – средняя плотность материала консоли, S – площадь поперечного сечения, $u = u(x, t)$ – растяжение консоли вдоль оси O_1x_0 , $v = v(x, t)$ – отклонение точек ее оси от оси O_1x_0 в горизонтальной плоскости, $M(x, t)$ – изгибающий момент, $Q(x, t)$ – перерезывающая сила, $N(x, t)$ – растягивающая сила. Обозначим через w, \dots



Фиг. 1



Фиг. 2

w_e, w_c соответственно относительное, переносное и кориолисово ускорения, через δ – угол наклона касательной. На фиг. 3 изображены силы, действующие на элемент dx .

Условия равновесия элемента dx имеют вид

$$\begin{aligned} Q(x+dx, t) \sin(\delta + d\delta) - Q(x, t) \sin \delta + N(x+dx, t) \cos(\delta + d\delta) - N(x, t) \cos \delta - \\ - \rho S(w_{xr} + w_{xe} + w_{xc}) dx = 0 \\ -Q(x+dx, t) \cos(\delta + d\delta) + Q(x, t) \cos \delta + N(x+dx, t) \sin(\delta + d\delta) - N(x, t) \sin \delta - \\ - \rho S(w_{yr} + w_{ye} + w_{yc}) dx = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} M(x+dx, t) - M(x, t) + [(-ds \cos \delta e_x - ds \sin \delta e_y) \times (-Q(x, t) \sin \delta - N(x, t) \cos \delta) e_x + \\ + (Q(x, t) \cos \delta - N(x, t) \sin \delta) e_y] = 0 \end{aligned}$$

Предполагая, что консоль вдоль оси O_1x_0 нерастяжима и прогибы малы, разделив (1.1) на dx и переходя к пределу при $dx \rightarrow 0$ в линейном приближении получаем

$$\partial N / \partial x + \rho S \omega^2 x = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - N \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho S \omega^2 v = 0$$

$$\partial M / \partial x = Q, \quad M(x, t) = EI \partial^2 v / \partial x^2$$

Здесь введены обозначения: E – модуль Юнга, I – момент инерции сечения относительно оси, перпендикулярной плоскости сечения и проходящей через срединное волокно, m – сумма масс вилки, кольца, кабины и пилота, L – длина консоли. Сила $N(x, t)$, действующая на элемент консоли длины $(L - x)$ со стороны элемента длины x , имеет вид

$$N(x, t) = - \int_x^L (-\rho S \omega^2 x) dx + m \omega^2 L = \rho S \omega^2 \frac{1}{2} (L^2 - x^2) + m \omega^2 L$$

Уравнения, описывающие малые отклонения консоли $v(x, t)$ относительно подвижной системы координат [3], имеют форму

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho S \omega^2 v - \rho S \omega^2 \frac{1}{2} (L^2 - x^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - m \omega^2 L \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho S \omega^2 x \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

Граничные условия запишутся так:

$$v(0, t) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad M(L, t) = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0$$

$$Q(L, t) = EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \Big|_{x=L} = -m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - m \omega^2 L \frac{\partial v}{\partial x} + m \omega^2 v \quad (1.3)$$

Рассмотрим модель консоли в виде системы n жестких невесомых стержней. Обозначим через q_i – угол между i -м стержнем и осью $O_1 x_0$ ($i = 1, \dots, n$), $\psi_i = q_i + \phi$, $\mathbf{q}^T = (q_1, \dots, q_n)$, $\boldsymbol{\psi}^T = (\psi_1, \dots, \psi_n)$.

Кинетическая энергия системы стержней будет такова

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m \nu_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \sum_{l=1}^i \sum_{k=1}^i l_l l_k \dot{\psi}_l \dot{\psi}_k \cos(\psi_l - \psi_k)$$

Введем ν_l и μ_k такие, что $\nu_l = 0$ при $l > i$ и $\nu_l = 1$ при $l \leq i$ и $\mu_k = 0$ при $k > i$, $\mu_k = 1$ при $k \leq i$. Теперь кинетическую энергию можно представить в виде

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \nu_l \mu_k l_l l_k \dot{\psi}_l \dot{\psi}_k \cos(\psi_l - \psi_k) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n l_l l_k \dot{\psi}_l \dot{\psi}_k \cos(\psi_l - \psi_k) \sum_{i=1}^n \nu_l \mu_k m_i =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n l_l l_k \dot{\psi}_l \dot{\psi}_k \cos(\psi_l - \psi_k) \sum_{i \geq l, k} \nu_l \mu_k m_i =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{l, k=1}^n a_{lk} (\dot{q}_l + \dot{\phi})(\dot{q}_k + \dot{\phi}) \cos(q_l - q_k)$$

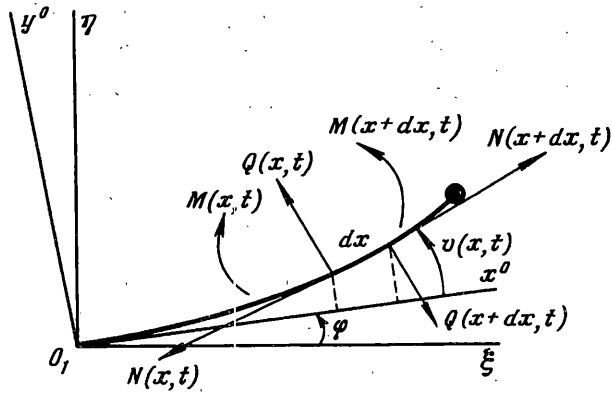
Тогда будем иметь

$$T = \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}(\dot{\mathbf{q}} + \dot{\phi} \mathbf{1}), (\dot{\mathbf{q}} + \dot{\phi} \mathbf{1}) \rangle, \quad A_{ij} = a_{ij} \cos(q_i - q_j), \quad a_{lk} = l_l l_k \sum_{i \geq l, k} m_i$$

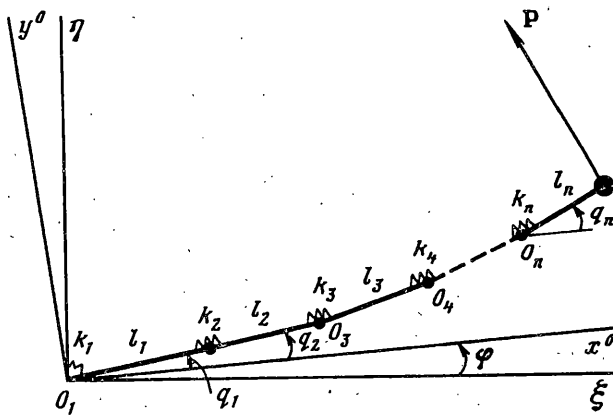
где $\mathbf{1}^T = (1, 1, \dots, 1)$. Потенциальная энергия упругих сил представляется в форме

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_i (q_i - q_{i-1})^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_i (\psi_i - \psi_{i-1})^2 = \frac{1}{2} \langle \mathbf{K} \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle$$

Здесь для k_{ij} – элементов матрицы \mathbf{K} имеем $k_{ij} = k_j + k_{j+1}$, если $i = j$; далее



Фиг. 3



Фиг. 4

$k_{ij} = -k_j$, если $j = i+1$; $k_{ij} = -k_i$, если $j = i-1$; и наконец, $k_{ij} = 0$, если $|i-j| > 1$; $k_{n+1} = 0$, $q_0 = 0$.

Уравнения Лагранжа имеют в данном случае вид

$$A(\ddot{\mathbf{q}} + \ddot{\phi} \mathbf{1}) + B(\dot{\mathbf{q}}^2 + \dot{\phi}^2 \mathbf{1}) + 2\dot{\phi} B \dot{\mathbf{q}} + K \mathbf{q} = 0, \quad B_{ij} = a_{ij} \sin(q_i - q_j)$$

Уравнения колебаний системы стержней около подвижной оси $O_1 x$ в линейном приближении при $\omega \equiv \text{const}$ преобразуются к виду

$$A \ddot{\mathbf{q}} + [K + \omega^2(G - A)] \mathbf{q} = 0, \quad G_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij}$$

$$G_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j, \quad B_{ij} = a_{ij}(q_i - q_j) = (G - A) \mathbf{q}$$

Коэффициенты жесткости пружин k_i выбираются из условия равенства прогибов на свободном конце для распределенной модели консоли и для моделирующей консоль системы стержней. Считается, что консоль изогнулась в горизонтальной плоскости под действием некоторой постоянной силы P . Граничные условия (1.3) принимают вид

$$Q(L, t) = EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \Big|_{x=L} = -P, \quad v(0, t) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0$$

Интегрируя, получаем прогиб на конце $v(L, t) = PL^3 / (3EI)$.

Для моделирующей системы (фиг. 4) запишем уравнения моментов относительно узлов соединения стержней O_i :

$$k_i(q_i - q_{i-1}) = pr(\text{мом}_{O_i} P)_z = P \sum_{m=i}^n l_i \cos(q_n - q_m) \quad (i=1, \dots, n), \quad q_0 = 0$$

При малых q_i и $k_i = k$ прогиб на свободном конце представляется формулой

$$v(L, t) = \sum_{i=1}^n l_i q_i = \frac{P}{k} \left[\left(\sum_{i=1}^n l_i \right)^2 + \dots + \left(\sum_{i=m}^n l_i \right)^2 + \dots + l_n^2 \right]$$

$$q_m = \frac{PL}{k} + \frac{P}{k} \sum_{i=2}^n l_i + \dots + \frac{P}{k} \sum_{i=m}^n l_i, \quad L = l_1 + l_2 + \dots + l_n$$

Из условия равенства прогибов на свободном конце для системы стержней и для распределенной модели получаем формулу для коэффициентов жесткости пружин

$$k = \frac{3EI}{L^3} \left[\left(\sum_{i=1}^n l_i \right)^2 + \dots + \left(\sum_{i=m}^n l_i \right)^2 + \dots + l_n^2 \right]$$

Рассмотрим частные случаи: (1) $\rho = 0$, $\omega \neq 0$, $m \neq 0$; и (2) $\omega = 0$, $m \neq 0$ [4].

Случай 1. Из (1.2) и (1.3) следует

$$EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \Big|_{x=L} = -m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \Big|_{x=L} - m\omega^2 L \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=L} + m\omega^2 v \Big|_{x=L}$$

$$v(L, t) = f = \frac{PL^3}{3EI}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=L} = \frac{PL^2}{2EI}, \quad M(L, t) = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0, \quad Q(L, t) = EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \Big|_{x=L} = P$$

С учетом граничных условий уравнения движения запишутся в виде

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \left[\frac{3EI}{L^3} + \frac{1}{2} m\omega^2 \right] f = 0$$

а собственные значения

$$\lambda^2 = -\frac{3EI}{mL^3} - \frac{1}{2} \omega^2 = -\nu^2 = -\nu_0^2 - \frac{1}{2} \omega^2$$

Таким образом, с увеличением угловой скорости вращения увеличивается частота колебаний консоли. Для реальной центрифуги угловая скорость вращения консоли находится в пределах от 0 до 38,6 обор/мин, а возможная перегрузка от 0 до 30g. В полете при отделении третьей ступени ракеты перегрузка равна 3,5g, что соответствует 4,5 обор/мин, т.е. меньше чем 0,5 рад/сек. Поэтому в реальном случае увеличение частот колебаний при увеличении угловой скорости вращения консоли незначительно. Для центрифуги $\nu_0 = 4,3235$ Гц, $\nu = 4,3379$ Гц. Результаты счета для моделирующей консоль системы стержней подтверждают вывод о том, что при увеличении угловой скорости вращения консоли увеличение собственных частот незначительно.

Случай 2. Уравнение колебаний и граничные условия (1.2) и (1.3) принимают вид

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

$$v(0, t) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad M(L, t) = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0, \quad Q(L, t) = EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \Big|_{x=L} = -m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \Big|_{x=L}$$

Частное решение ищется в виде $v(x, t) = e^{i\omega t} V(x)$, где $V(x)$ – функция, характеризующая форму колебаний, ν – частота колебаний. Частоты колебаний вычисляются по формуле, приведенной в [4]:

$$\nu = 9,55 \frac{\alpha^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho SL}}$$

где значение коэффициента α для основного тона и первого обертона определяется по графику для $h = m/(\rho SL)$.

Для вычислений были взяты следующие параметры центрифуги, применяемой на практике: изгибная жесткость материала консоли $EI = 2 \cdot 10^9$ Н/м², масса консоли $\rho SL = 45170$ кг, длина консоли $L = 17,95$ м, сумма масс вилки, кольца и кабины $m = 55500$ кг. Для $h = 1,23$ значения $\alpha_1 = 1,19$, $\alpha_2 = 4,04$, тогда частоты колебаний $\nu_1 = 3,9184$ Гц, $\nu_2 = 45,1622$ Гц.

Для выбора модели системы рассматриваются два случая прикрепления первого стержня к валу (1) жесткое и (2) упругое. В обоих случаях вычислены частоты колебаний для любого числа стержней и любого распределения масс по длине консоли. Из сравнения частот колебаний сплошной консоли и моделирующей консоль системы стержней следует: с увеличением угловой скорости вращения консоли частоты колебаний возрастают незначительно (при увеличении угловой скорости с 0 до 0,5 рад/сек (перегрузка 3,5 g) частоты колебаний увеличиваются на сотые доли Гц); с увеличением числа стержней моделирующей системы первая частота увеличивается на сотые доли Гц, расхождение в высших частотах более значимое; случай одинаковых длин стержней и одинаковых масс как при упругом закреплении первого стержня, так и при его жестком закреплении, достаточно хорошо моделирует консоль, так как разница частот колебаний сплошной консоли и моделирующих систем не более 0,5 Гц; консоль достаточно моделировать двумя жесткими невесомыми стержнями, соединенными пружиной, с сосредоточенными массами на концах.

В дальнейшем для исследования движения центрифуги с упругой консолью будем моделировать последнюю двумя стержнями и в случае жесткого закрепления первого стержня выбираются следующие параметры системы:

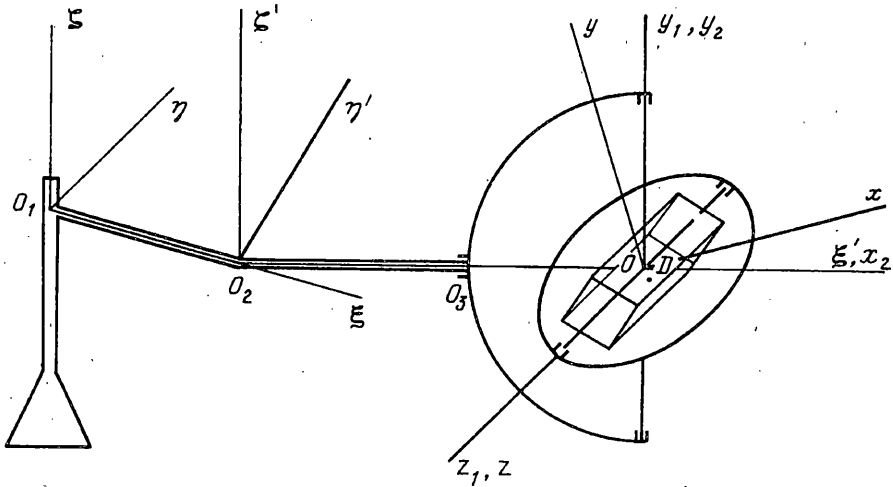
$$(a) d_1 = d_2 = 9 \text{ м}, m_1 = m_2 = 22585 \text{ кг}, k = 8,36 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2 \quad (1.4)$$

$$(b) d_1 = 10,55 \text{ м}, d_2 = 7,45 \text{ м}, m_1 = 21480 \text{ кг}, m_2 = 23690 \text{ кг}, k = 4,46 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$$

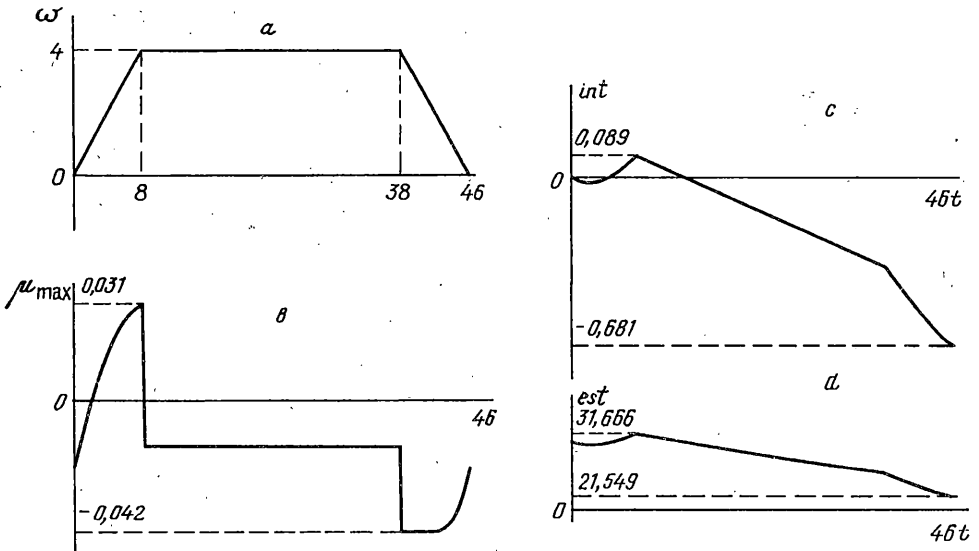
2. Уравнения движения центрифуги. Рассмотрим центрифугу, у которой вилка закреплена в вертикальном положении. Введем следующие системы координат (фиг. 5): $\xi\eta\zeta$ – неподвижная система координат с началом в точке O_1 , ось ζ которой вертикальна; $\xi'\eta'\zeta'$ жестко связана со вторым стержнем длины d_2 , с началом в точке O_2 и осью ξ' , направленной по этому стержню; ось ζ' направлена параллельно оси ζ ; системы координат $x_2y_2z_2, x_1y_1z_1, xuyz$ жестко связаны соответственно с вилкой, кольцом и кабиной, с началом в центре карданова подвеса точке O ; при этом ось y_2 совпадает с осью y_1 и направлена по оси вращения кольца, а ось z_1 совпадает с осью z и является осью вращения кабины.

Введем обобщенные координаты: β – угол поворота кольца относительно вилки, γ – угол поворота кабины относительно кольца, θ – угол между продолжением первого стержня и осью ξ' .

Обозначим через M_2, M_1, M_4 и M_3 массы вилки, кольца, кабины и точки D , а через m_2 массу второго стержня, сосредоточенную в узле крепления вилки. Тела считаем абсолютно твердыми, а оси $x_2, y_2, z_2, x_1, y_1, z_1$ и x, y, z – главными осями инерции соответствующих тел. Обозначим через A_2, B_2, C_2 главные моменты инерции вилки относительно осей x_2, y_2, z_2 ; A_1, B_1, C_1 – главные моменты инерции кольца относительно осей x_1, y_1, z_1 , а через $J_{xx} = J_{yy}, J_{zz}$ – экваториальный и полярный моменты



Фиг. 5



Фиг. 6

инерции кабины. Расстояние от узла крепления вилки O_3 до геометрического центра карданова подвеса O (фиг. 5) равно l . Обозначим через k – коэффициент жесткости, через d_1 и d_2 длины стержней.

Кинетическая энергия системы тел выражается формулой:

$$T_{\Sigma} = \frac{1}{2}(A_2 p_2^2 + B_2 q_2^2 + C_2 r_2^2) + \frac{1}{2} M_2 v_O^2 + \frac{1}{2}(A_1 p_1^2 + B_1 q_1^2 + C_1 r_1^2) + \frac{1}{2} M_1 v_O^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{O_3}^2 + \frac{1}{2}(J_{xx} p^2 + J_{yy} q^2 + J_{zz} r^2) + \frac{1}{2}(M_4 + M_3) v_O^2 \quad (2.1)$$

Здесь p_2, q_2, r_2 – проекции абсолютной угловой скорости вилки на оси x_2, y_2, z_2 ; p_1, q_1, r_1 – проекции абсолютной угловой скорости кольца на оси x_1, y_1, z_1 ; p, q, r – проекции абсолютной угловой скорости кабины на оси x, y, z .

В обобщенных координатах (2.1) принимает вид

$$T_{\Sigma} = \frac{1}{2} J_{zz} \dot{\gamma}^2 + \frac{1}{2} S_0 (\omega + \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} B_0 (\omega + \dot{\theta} + \dot{\beta})^2 + R(\omega^2 + \omega \dot{\theta}) \cos \theta + \frac{1}{2} (m + m_2) d_1^2 \omega^2$$

$$m = M_2 + M_1 + M_4 + M_3, \quad R = m d_1 d_3 + m_2 d_1 d_2$$

$$S_0 = m d_3^2 + m_2 d_2^2 + B_2, \quad B_0 = B_1 + J_{yy}, \quad d_3 = d_2 + l$$

Обозначим через M_{β} , M_{γ} , M_{θ} моменты управления. Уравнения Лагранжа, описывающие движение центрифуги, имеют вид

$$B_0 (\dot{\omega} + \ddot{\theta} + \ddot{\beta}) = M_{\beta}, \quad J_{zz} \ddot{\gamma} = M_{\gamma} \quad (2.2)$$

$$B_0 \ddot{\beta} + (B_0 + S_0) (\dot{\omega} + \ddot{\theta}) + R \dot{\omega} \cos \theta + R \omega^2 \sin \theta + k \theta = M_{\theta}$$

3. Выбор программных движений центрифуги. Пусть $\mathbf{n}^0(t)$ – вектор перегрузки в расчетной точке летательного аппарата, а $\mathbf{n}(t)$ – имитирующий вектор перегрузки в геометрическом центре карданова подвеса центрифуги. Вектор перегрузки, создаваемый на центрифуге, в проекциях на оси системы координат $O_1 x_0 y_0 z_0$, вращающейся вместе с консолью, равен

$$\mathbf{n}^T = (n_{x_0}, n_{y_0}, n_{z_0}) = (1, -\dot{\omega} L / g, -\omega^2 L / g)$$

Найдем углы поворотов карданова подвеса β и γ , при которых ориентация вектора $\mathbf{n}(t)$ в системе координат xyz , связанной с кабиной центрифуги, соответствует ориентации вектора $\mathbf{n}^0(t)$ в системе координат, связанной с движущимся объектом. Ориентации рассматриваемых векторов совпадают (в случае подъема на орбиту [1]), если выполняются равенства:

$$g n_x^0 = g \cos \beta \cos \gamma + \dot{\omega} L \sin \gamma + \omega^2 L \sin \beta \cos \gamma$$

$$0 = g \cos \beta \sin \gamma - \dot{\omega} L \cos \gamma + \omega^2 L \sin \beta \sin \gamma$$

$$0 = g \sin \beta - \omega^2 L \cos \beta$$

Отсюда следует, что одно из возможных решений, являющееся программным движением центрифуги, имеет вид:

$$\beta = \beta^{pr} = \arctg \frac{\omega^2 L}{g}, \quad \gamma = \gamma^{pr} = \arctg \frac{\dot{\omega} L}{\sqrt{g^2 + \omega^4 L^2}}, \quad \theta^{pr} = 0$$

где $\omega(t)$ в [1] находится как решение уравнения

$$\dot{\omega}^2 + \omega^4 = f^4(t), \quad f^4(t) = \frac{g}{L} (|n^0(t)|^2 - 1)$$

Подставляя выражения программных движений в уравнения (2.2), описывающие движения центрифуги, получаем программные моменты управления

$$M_{\beta}^{pr} = B_0 (\dot{\omega} + \ddot{\beta}^{pr}), \quad M_{\gamma}^{pr} = J_{zz} \ddot{\gamma}^{pr}, \quad M_{\theta}^{pr} = B_0 \ddot{\beta}^{pr} + (B_0 + S_0 + R) \dot{\omega} \quad (3.1)$$

При различных перегрузках $\mathbf{n}^0(t) \in N$ будем получать различные программные движения центрифуги. Поэтому возникает задача анализа асимптотической устойчивости каждого такого движения при заданном законе стабилизации.

4. Постановка задачи анализа точности имитации перегрузок. Упругость консоли может помешать точной имитации перегрузки. Асимптотическая устойчивость программного движения является одним из условий желаемой точности имитации. Задача асимптотической устойчивости программных движений в первом приближении сводится

к задаче абсолютной устойчивости тривиального решения уравнений в отклонениях при наличии параметрического возмущения $\omega(t)$, известного с точностью до функционального множества [2].

Введем отклонения x, y, z от программных движений $\beta^{pr}, \gamma^{pr}, \theta^{pr}$:

$$\gamma = \gamma^{pr} + x, \quad \beta = \beta^{pr} + y, \quad \theta = \theta^{pr} + z \quad (4.1)$$

Моменты $M_\beta, M_\gamma, M_\theta$ формируются в виде линейной обратной связи по отклонениям от программных движений с коэффициентами обратной связи c_i :

$$\begin{aligned} M_\beta &= M_\beta^{pr} + c_1(\beta - \beta^{pr}) + c_2(\dot{\beta} - \dot{\beta}^{pr}) = M_\beta^{pr} + c_1y + c_2\dot{y} \\ M_\gamma &= M_\gamma^{pr} + c_3(\gamma - \gamma^{pr}) + c_4(\dot{\gamma} - \dot{\gamma}^{pr}) = M_\gamma^{pr} + c_3x + c_4\dot{x} \\ M_\theta &= M_\theta^{pr} + c_5(\theta - \theta^{pr}) + c_6(\dot{\theta} - \dot{\theta}^{pr}) = M_\theta^{pr} + c_5z + c_6\dot{z} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Из уравнений (2.2) подстановкой (3.1), (4.1) и (4.2) в первом приближении по отклонениям от программных движений получаем уравнения в вариациях рассматриваемой системы

$$\begin{aligned} J_{zz}\ddot{x} &= c_3x + c_4\dot{x} \\ B_0(\ddot{y} + \ddot{z}) &= c_1y + c_2\dot{y} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$B_0\ddot{y} + (B_0 + S_0)\ddot{z} + (R\omega^2 + k)z = c_5z + c_6\dot{z}$$

В рассматриваемой задаче $\omega = \omega(t) \in \Omega = \{0 \leq \omega \leq \omega_+, |\dot{\omega}| \leq \sigma, |\ddot{\omega}| \leq \ddot{\omega}_+\}$. Коэффициенты c_i выбираются так, чтобы выполнялись условия устойчивости тривиального решения по критерию Гурвитца для $\forall \omega \equiv \text{const} \in \Omega$.

Характеристическое уравнение системы в вариациях имеет вид

$$\begin{aligned} [B_0S\lambda^4 - (c_2B_0 + c_2S + c_6B_0)\lambda^3 + (B_0R\omega^2 + B_0k - c_1S - c_1B_0 - c_5B_0 + c_2c_6)\lambda^2 + \\ + (c_2c_5 + c_1c_6 - c_2(R\omega^2 + k))\lambda + c_1c_5 - c_1(R\omega^2 + k)][J_{zz}\lambda^2 - c_4\lambda - c_3] = 0 \end{aligned}$$

Условия устойчивости принимают форму

$$c_2B_0 + c_2S + c_6B_0 < 0$$

$$(B_0 + S)^2 c_1 c_2 + B_0^2 (c_2 c_5 + c_1 c_6 + c_5 c_6) - B_0^2 (R\omega^2 + k)(c_2 + c_6) - (B_0 + S)c_2^2 c_6 - B_0 c_2 c_6^2 > 0$$

$$(B_0 + S)^2 c_1^2 c_2 c_6 + B_0^2 (c_2^2 c_5^2 + c_2 c_5^2 c_6 + c_1^2 c_6^2) + B_0^2 (R\omega^2 + k)^2 (c_2^2 + c_2 c_6) +$$

$$+ B_0 (R\omega^2 + k)c_2^2 c_6^2 + (B_0 + S)(R\omega^2 + k)c_2^3 c_6 + 2B_0 S (R\omega^2 + k)c_1 c_2 c_6 - B_0 (c_2^2 c_5 c_6^2 + c_1 c_2 c_6^3) -$$

$$- (B_0 + S)(c_2^3 c_5 c_6 + c_1 c_2^2 c_6^2) - 2B_0^2 (R\omega^2 + k)(c_2^2 c_5 + c_2 c_5 c_6) - 2B_0 S c_1 c_2 c_5 c_6 > 0$$

$$c_1 c_5 - c_1 (R\omega^2 + k) > 0$$

Возьмем в качестве примера коэффициенты стабилизации $c_i = -10B_0$ ($i = 1, 2, 5, 6$) такие, что условия устойчивости выполняются для $\forall \omega \equiv \text{const} \in [0, \omega_+]$, тогда тривиальное решение системы уравнений в вариациях асимптотически устойчиво при любых постоянных ω . Необходимо исследовать асимптотическое поведение отклонений в первом приближении при различных, переменных во времени $\omega(t)$ из заданного множества Ω .

5. Анализ устойчивости нестационарных имитирующих движений центрифуги. Подставим значения коэффициентов стабилизации $c_i = -10B_0$ ($i = 1, 2, 5, 6$) во второе и

третье уравнения системы (4.3) и представим матрицу A этой системы в форме Коши.

$$A(\omega) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -10 - 10 \frac{B_0}{S} & -10 - 10 \frac{B_0}{S} & \frac{R\omega^2 + k}{S} + 10 \frac{B_0}{S} & 10 \frac{B_0}{S} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 10 \frac{B_0}{S} & 10 \frac{B_0}{S} & -\frac{R\omega^2 + k}{S} - 10 \frac{B_0}{S} & -10 \frac{B_0}{S} \end{vmatrix}$$

Ей соответствует система

$$\dot{x} = A(\omega)x, \quad \omega = p, \quad \dot{p} = v, \quad v = w \quad (5.1)$$

где $\omega = \omega(t)$, известное с точностью до функционального множества. Считаем, что $A(\omega)$ – гурвитцева для $\forall \omega \equiv \text{const} \in [0, \omega_+]$.

Для нахождения $H(\omega)$ используется уравнение Ляпунова $A^T(\omega)H + HA(\omega) = -E$, где $H^T(\omega) = H(\omega) > 0$ для $\omega = \omega(t)$. Матрицу G формируем в виде

$$G(\omega, \dot{\omega}) = \frac{\partial H}{\partial \omega} \dot{\omega} + A^T(\omega)H + HA(\omega)$$

В любой момент $\{\omega(t), \dot{\omega}(t), \ddot{\omega}(t)\}$ принадлежат множеству

$$\Omega = \{0 \leq \omega_- \leq \omega \leq \omega_+, |v(t)| \leq \sigma, |w(t)| \leq w_+\}$$

где $w(t)$ – кусочно-голоморфная ограниченная функция.

Предположим, что в фазовом пространстве $\{\omega, \dot{\omega}\}$ параметрических возмущений имеется простая замкнутая траектория, которая начинается в момент t_0 с начальными условиями $\omega(t_0) = \omega_0 = 0$, $\dot{\omega}(t_0) = 0$ и заканчивается в момент t_2 с конечными условиями, совпадающими с начальными; в момент t_1 имеем: $\dot{\omega}(t_1) = 0$, $\omega(t_1) = \omega_1$ и ω_0 , $\omega_1 \in [\omega_-, \omega_+]$.

Известно [2], что для абсолютной устойчивости системы (5.1) достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\max_{\substack{\omega_- \leq \omega_1^0 \leq \omega_2^0 - \Delta \\ \omega_1^0 + \Delta \leq \omega_2^0 \leq \omega_+}} \left[\int_{t_0}^{t_1} \mu_{\max}(\omega_1(t), \sigma) dt + \int_{t_1}^{t_2} \mu_{\max}(\omega_2(t), -\sigma) dt \right] \leq \mu_0 < 0 \quad (5.2)$$

$$\Delta = v_0^2 / w_+, \quad \dot{\omega}_1 = \sigma, \quad \omega_1(t_0) = \omega_1^0, \quad \omega_1(t_1) = \omega_2^0, \quad \dot{\omega}_2 = -\sigma, \quad \omega_2(t_1) = \omega_2^0, \quad \omega_2(t_2) = \omega_1^0$$

где v_0 – минимальное расстояние от нуля функции μ_{\max} до оси абсцисс на плоскости (p, v) .

При этом имеем место двойная оценка (5.3):

$$\sqrt{\frac{\lambda_{\min}(\omega(t_0))}{\lambda_{\max}(\omega(t))}} |x(t_0)| \exp\left(\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \mu_{\min} d\tau\right) \leq |x(t)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\omega(t_0))}{\lambda_{\min}(\omega(t))}} |x(t_0)| \exp\left(\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \mu_{\max} d\tau\right)$$

Здесь $\mu_{\min}(\omega, \dot{\omega})$, $\mu_{\max}(\omega, \dot{\omega})$ – минимальный и максимальный корни уравнения $\det(G(\omega, \dot{\omega}) - \mu_i H(\omega)) = 0$, $\mu_i = \mu_i(\omega, \dot{\omega})$ ($i = 1, 2, 3, 4$), $\lambda_{\min}(\omega)$, $\lambda_{\max}(\omega)$ – минимальный и максимальный корни уравнения $\det(H(\omega) - \lambda E) = 0$.

Таким образом, тривиальное решение уравнений в вариациях асимптотически устойчиво при любом поведении $\omega \in \Omega$, если максимум суммы интегралов в (5.2) на рассматриваемом треугольнике отрицателен.

При вычислении моментов инерции вилки, кольца и кабины первую и третью считаем сферами, а второе плоским кольцом. Возьмем в качестве примера:

$$M_2 = 35000 \text{ кг}, M_1 = 17000 \text{ кг}, M_3 = 500 \text{ кг}, M_4 = 3500 \text{ кг}, m = M_2 + M_1 + M_3 + M_4$$

$$R_2 = 3 \text{ м}, R_1 = 2 \text{ м}, R_3 = 1,5 \text{ м}, d_3 = d_2 + l = d_2 + 3 \text{ м}, J_{yy} = \frac{4}{3}(M_3 + M_4)R_3^2 = 10500 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$B_2 = \frac{4}{3}M_2R_2^2 = 420000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, B_1 = \frac{1}{2}M_1R_1^2 = 34000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$R = md_1d_3 + m_2d_1d_2, S = md_3^2 + m_2d_2^2 + B_2, k = 3EI[L^2 + d_3^2] / L^3$$

Рассматриваются два случая выбора параметров (1.4) механической системы:

(а) $d_1 = d_2 = 9 \text{ м}, m_1 = m_2 = 22585 \text{ кг}, R \approx 7324000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, S = 8965000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, коэффициент жесткости пружины $k = 8,36 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$.

(б) $d_1 = 10,55 \text{ м}, d_2 = 7,45 \text{ м}, m_1 = 21480 \text{ кг}, m_2 = 23690 \text{ кг}, R \approx 7981000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, S = 7796000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, коэффициент жесткости пружины $k = 4,46 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$.

Исследование влияния изгибных колебаний консоли на реализацию нестационарных имитирующих движений для обоих вариантов проведено для случая, когда $\omega_+ = 4 \text{ рад/с}, \sigma = 0,5 \text{ рад/с}^2$ и $w_+ = 2,5 \text{ рад/с}^3, \Delta = 4 \cdot 10^{-5}$.

Для любых значений ω_1^0, ω_2^0 , принадлежащих треугольнику в (5.2), значения суммы интегралов в (5.2) отрицательны и изменяются в пределах от $-0,663167 \cdot 10^{-5}$ в точке $\omega_1^0 = 4 - \Delta, \omega_2^0 = 4$ до $-1,09269$ в точке $\omega_1^0 = 0, \omega_2^0 = 4$ для случая (а) и для случая (б) изменяются в пределах от $-0,24296 \cdot 10^{-5}$ в точке $\omega_1^0 = 4 - \Delta, \omega_2^0 = 4$ до $-0,28034$ в точке $\omega_1^0 = 0, \omega_2^0 = 4$ для сетки по ω в $0,5 \text{ рад/с}$. Измельчение сетки не приводит к изменению экстремальных значений интегралов. Поэтому исследуемая система абсолютно устойчива.

При $w_+ = \infty$ был просчитан пример с конкретным изменением $\omega(t)$, представленным на фиг. 6, а (для случая (б)). Из результатов счета видно (фиг. 6, с), что и в этом случае также имеет место асимптотическая устойчивость нестационарного движения в первом приближении. Полученная оценка (5.3) свидетельствует о том, что при единичном начальном отклонении от программного движения отклонение от конечных интервалах не может увеличиться больше, чем в 32 раза (фиг. 6, д).

Таким образом, изгибные колебания консоли центрифуги не нарушают асимптотической устойчивости нестационарных имитирующих движений карданова подвеса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В.В., Воронин Л.И., Глазков Ю.Н., Ишлинский А.Ю., Садовничий В.А. Математические задачи динамической имитации аэрокосмических полетов. М.: Изд-во МГУ, 1995. 160 с.
2. Александров В.В. Абсолютная устойчивость имитационных динамических систем в первом приближении. // Докл. АН. 1988. Т. 299. Вып. 2. С. 297–301.
3. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Об управляемом вращении упругого стержня. // ПММ. 1982. Т. 49. В. 4. С. 587–595.
4. Ананьев И.В. Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем. М.Л.: Гостехиздат, 1946. 223 с.
5. Ишлинский А.Ю., Борзов В.И., Степаненко Н.П. Лекции по теории гироскопов. М.: МГУ, 1983. 246 с.
6. Ишлинский А.Ю. Классическая механика и силы инерции. М.: Наука, 1987. 191 с.