

УДК 539.3

© 1997 г. В.А. ЛЕВИН, В.В. ЛОХИН, К.М. ЗИНГЕРМАН

## ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОРИСТЫХ ТЕЛ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Предложен метод нахождения эффективных характеристик пористых сред при конечных упругих деформациях в двумерном случае. Метод основан на предположении, что средние перемещения эффективного материала вдоль границ представительной области равны средним перемещениям пористого материала при равных нагрузках. Показано, что при малых деформациях метод дает те же результаты, что и общепринятый метод. Приведен числовой пример определения эффективных модулей первого и второго порядка для нелинейно-упругого материала с круговыми в недеформированном состоянии полостями.

Рассматривается задача об определении эффективных свойств упругих тел с полостями. Считается, что тело содержит полости, статистически равномерно и изотропно распределенные по его объему. Общая методика расчета эффективных характеристик для тел с отверстиями следующая [1, 2]: в теле выделяется представительный объем  $V$ , содержащий одну или несколько полостей, и рассчитываются перемещения на границах выделенной части тела при приложении к ней определенных нагрузок. Затем подбирается эффективный упругий материал, удовлетворяющий следующему условию: если этим материалом заполнить такой же объем  $V$ , включая поры, и приложить к нему те же нагрузки, что и к исходному пористому телу, то средние перемещения на границах выделенного объема будут одинаковы. Решение этой задачи при различных нагрузках позволяет определить упругие постоянные эффективного материала.

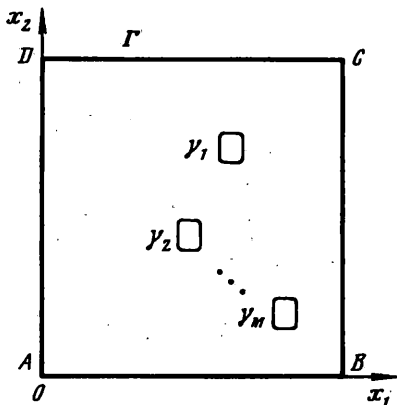
В дальнейшем рассматривается плоская задача. В этом случае представительный объем  $V$  может быть заменен представительной площадью  $S$ .

Для определенности считается, что форма полостей в теле задана в пространстве начального состояния. Пусть площадь  $S$  представляет собой квадрат со стороной  $a$ . Выберем в пространстве начального состояния декартову систему координат таким образом, чтобы оси координат  $x_1$  и  $x_2$  были параллельны сторонам квадрата, а начало координат совпало с одной из его вершин. Пусть  $A, B, C, D$  – вершины  $S$ ,  $\Gamma$  – граница  $S$ ,  $\gamma_k$  ( $k = 1, \dots, M$ ) – границы полостей внутри  $S$  (считается, что полости не пересекают и не касаются  $\Gamma$ , фигура).

Пусть решена при конечных деформациях задача о расчете напряженно-деформированного состояния в представительной области при заданных на ее границе постоянных нагрузках  $\sigma = \sigma_{ij}e_i e_j$  и известно поле вектора перемещений  $u(x) = u_m(x)e_m$ . Здесь и далее считается, что все индексы принимают значения 1, 2 (за исключением специально оговоренных случаев).

Найдем теперь деформацию эффективного материала. Поскольку напряжения на границе области  $S$  постоянны и эффективный материал однороден, эта деформация будет аффинной. Тогда

$$u_m^e = (\Psi_{nm}^e - \delta_{nm})x_n + c_m \quad (1)$$



где  $u_m^e$  — компоненты вектора перемещений эффективного материала;  $\Psi_{nm}^e$  — компоненты аффинора деформаций эффективного материала (не зависящие от координат).

В соответствии с определением эффективного материала будем полагать, что средние перемещения исходного материала на каждой из сторон квадрата равны средним перемещениям эффективного материала на этой стороне. Имеем, в частности:

$$\int_{AD} u_m^e dl = \int_{AD} u_m dl, \quad \int_{BC} u_m^e dl = \int_{BC} u_m dl \quad (m=1,2) \quad (2)$$

Здесь и далее интеграл вида  $\int_{PQ} f dl$  означает

интеграл по прямой, соединяющей точки  $P$  и  $Q$ , в направлении от  $P$  к  $Q$ .

Из (1), (2) следует

$$\Psi_{11}^e - 1 = \frac{1}{a} [\langle u_1 \rangle_{BC} - \langle u_1 \rangle_{AD}] \quad (3)$$

$$\Psi_{21}^e = \frac{1}{a} [\langle u_2 \rangle_{BC} - \langle u_2 \rangle_{AD}], \quad \langle u \rangle_{PQ} = \frac{1}{|PQ|} \int_{PQ} u dl$$

Из равенств

$$\int_{AB} u_m^e dl = \int_{AB} u_m dl, \quad \int_{DC} u_m^e dl = \int_{DC} u_m dl \quad (m=1,2) \quad (4)$$

могут быть найдены  $\Psi_{12}^e$  и  $\Psi_{22}^e$ :

$$\Psi_{12}^e = \frac{1}{a} [\langle u_1 \rangle_{DC} - \langle u_1 \rangle_{AB}], \quad \Psi_{22}^e - 1 = \frac{1}{a} [\langle u_2 \rangle_{DC} - \langle u_2 \rangle_{AB}] \quad (5)$$

Если при решении нелинейной упругой задачи для области  $S$  был использован метод малого параметра с точностью до величин второго порядка малости [3, 4], то решение можно представить в виде

$$u_m = u_{mij}^{(0)} \sigma_{ij} + u_{mijkq}^{(1)} \sigma_{ij} \sigma_{kq} \quad (6)$$

Подстановка в выражения (3), (5) соотношений (6) позволяет получить представление для аффинора деформации эффективного материала в виде

$$\Psi_{mn}^e = \delta_{mn} + S_{mnij}^{(0)} \sigma_{ij} + S_{mnikq}^{(1)} \sigma_{ij} \sigma_{kq} \quad (7)$$

Подставив (7) в выражение для тензора деформаций Грина

$$E^e = \frac{1}{2} (\Psi^e \cdot \Psi^{eT} - I) \quad (8)$$

получим нелинейные определяющие соотношения для эффективного материала. С точностью до величин второго порядка малости они могут быть представлены в виде:

$$E_{mn}^e = T_{mnij}^{(0)} \sigma_{ij} + T_{mnikq}^{(1)} \sigma_{ij} \sigma_{kq}, \quad (9)$$

$$T_{mnij}^{(0)} = \frac{1}{2} (S_{mnij}^{(0)} + S_{nmij}^{(0)})$$

$$T_{mnikq}^{(1)} = \frac{1}{2} (S_{mnikq}^{(1)} + S_{nmijkq}^{(1)} + S_{npij}^{(0)} S_{npkq}^{(0)})$$

Вычислив  $T_{mnij}^{(0)}, T_{mnijkq}^{(1)}$  в (9), можно записать эффективные определяющие соотношения для пористого материала с точностью до величин второго порядка малости в следующих двух видах:

$$\sigma_{mn} = \tilde{C}_{mnij}^{(0)} E_{ij}^e + \tilde{C}_{mnijkq}^{(1)} E_{ij}^e E_{kq}^e \quad (10)$$

$$\Sigma_{mn}^0 = C_{mnij}^{(0)} E_{ij}^e + C_{mnijkq}^{(1)} E_{ij}^e E_{kq}^e \quad (11)$$

где  $\Sigma_{mn}^0$  – компоненты тензора обобщенных напряжений в базисе начального состояния  $\Sigma^0$ , связанного с тензором истинных напряжений  $\sigma$  соотношением [5]:

$$\sigma = (\det \Psi)^{-1} \Psi^T \cdot \Sigma^0 \cdot \Psi \quad (12)$$

(в литературе тензор  $\Sigma^0$  известен также под названием второго тензора напряжений Пиола – Кирхгофа [4]).

Отметим, что в случае малых деформаций рассмотренный способ осреднения приводит к тем же результатам, что и способ, основанный на осреднении тензора деформаций по представительной площади (этот способ изложен, например, в [6]), для случая, когда эта площадь представляет собой квадрат. В [6] деформации эффективного материала считаются равными средним деформациям, вычисляемым по формуле

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{S} \iint_S \varepsilon_{ij} ds = \frac{1}{S} \left[ \iint_{S_T} \varepsilon_{ij} ds + \sum_{k=1}^M \iint_{S_k} \varepsilon_{ij} ds \right] \quad (13)$$

где  $S_k$  – площадь полости, ограниченной контуром  $\gamma_k$ ;  $S_T$  – площадь тела ( $S = S_T + \sum S_k$ ,  $k = 1, \dots, M$ ).

При этом считается, что полости заполнены специальным упругим материалом, упругие константы которого равны 0 (т.е. напряжения отсутствуют при любых деформациях), а деформации таковы, что на контурах  $\gamma_k$  выполняются условия сопряжения, т.е. перемещения граничных точек специального материала совпадают с перемещениями соответствующих точек исходного упругого материала на контурах отверстий.

Предположение о заполнении полостей специальным материалом позволяет переписать (13) в случае малых деформаций в виде:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2S} \oint_{\Gamma} (u_i n_j + u_j n_i) dl \quad (14)$$

Вычислив выражение для  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  с учетом (3), (5), получим

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = 1/2 (\Psi_{ij}^e + \Psi_{ji}^e) - \delta_{ij}$$

Итак, в линейном случае рассмотренный в настоящей работе способ определения эффективных характеристик приводит к тем же результатам, что и способ осреднения, рассмотренный в [6]. Однако непосредственное обобщение подхода, рассмотренного в [6], на нелинейные задачи вызывает затруднения, связанные с невозможностью замены интеграла по площади контурным интегралом.

Решение нелинейной упругой задачи для области  $S$  было получено с использованием специализированной системы аналитических вычислений на ЭВМ [7] с учетом взаимодействия между порами, расположенными внутри области. При решении использовалось допущение, принятое в теории эффективного поля [8, 9]: вместо задания нагрузок на границе представительной области задавались нагрузки на бесконечности, которые считались равными средним напряжениям в матрице  $\sigma_{ij}^M$

определяемым по формуле

$$\sigma_{ij}^m = \frac{1}{1-p} \sigma_{ij}$$

где  $\sigma_{ij}$  – средние напряжения в пористой среде;  $p$  – коэффициент пористости.

Отметим, что это допущение может быть применено в случае достаточно малой пористости [10].

Описанные выше вычисления должны быть проведены для всевозможных случаев расположения пор в области  $S$ , т.е. должно быть выполнено осреднение по ансамблю [11]. В настоящей работе в качестве модельного примера используется следующая схема осреднения по ансамблю. Считается, что поры в теле имеют круговую форму, одинаковы по размеру и число их в области  $S$  фиксировано и равно 2. Далее, в  $S$  строится равномерная сетка с узлами  $(x_i, y_j)$ , где  $x_i = (i + 1/2)h$ ,  $y_j = (j + 1/2)h$  ( $i = 0, \dots, N - 1, j = 0, \dots, N - 1$ ),  $h = a/N$ ,  $N$  – некоторое заданное целое положительное число (при расчетах полагалось  $N = 3$ ). Будут рассматриваться только случаи, когда центры пор располагаются в узлах сетки. Всего будет  $1/2 N^2(N^2 - 1)$  различных случаев расположения пор в области  $S$ . Для каждого из этих случаев решается соответствующая задача нелинейной упругости и вычисляются  $C_{mnij}^{(0)}$ ,  $C_{mnijkq}^{(1)}$ . Затем проводится осреднение (считается, что эти случаи равновероятны).

Отметим, что число задач, которые необходимо решить для расчета эффективных характеристик с учетом сделанных выше предположений, будет значительно меньше, чем  $1/2 N^2(N^2 - 1)$ , поскольку многие задачи могут быть сведены к другим посредством преобразований координат (смещения начала координат, смены направления осей на противоположное, перенумерация осей). Например, при  $N = 3$  число различных вариантов расположения пор в узлах сетки равно 36, а число задач, которые требуется решить, равно 5.

В случае, когда материал матрицы изотропен, эффективный материал, модули упругости которого вычислены по рассмотренной методике, будет вести себя при плоской деформации как материал с кубической симметрией. Этот факт можно объяснить тем, что при проведении осреднения по ансамблю центры пор располагались в представительной области не произвольным (случайным) образом, а в узлах сетки. Чтобы избавиться от "кажущейся" кубичности, проводится осреднение по возможным ориентировкам координатных осей в плоскости деформации [11]. В результате этого осреднения получается эффективный материал, который будет вести себя при плоской деформации как изотропный. Определяющие соотношения для него можно записать в виде:

$$\Sigma_{mn}^0 = \langle C_{mnij}^{(0)} \rangle E_{ij}^e + \langle C_{mnijkq}^{(1)} \rangle E_{ij}^e E_{kq}^e \quad (15)$$

или в обычной для изотропных материалов форме [4]:

$$\begin{aligned} \Sigma^0 &= \lambda^e (E^e : I) I + 2G^e E^e + \\ &+ 3C_3^e (E^e : I)^2 I + C_4^e [(E^e)^2 : I] I + 2C_6^e (E^e : I) E^e + 3C_5^e (E^e)^2 \end{aligned} \quad (16)$$

Соотношения (16) будут потенциальными, если  $C_6^e = C_4^e$ .

Сопоставляя (15) и (16), можно получить две системы линейных уравнений для определения модулей упругости первого и второго порядка в (16). Модули упругости первого порядка могут быть определены следующим образом:  $\lambda^e = \langle C_{1122}^{(0)} \rangle$ ,  $G^e = \langle C_{1212}^{(0)} \rangle$ .

Модули упругости второго порядка могут быть найдены из системы линейных уравнений

$$3C_3^e + C_4^e + 3C_5^e + 2C_6^e = \langle C_{111111}^{(1)} \rangle \quad (17)$$

$$3C_3^e + C_4^e = \langle C_{112222}^{(1)} \rangle, \quad 2C_4^e + 3C_5^e = 4\langle C_{111212}^{(1)} \rangle$$

$$3C_5^e + 2C_6^e = 4\langle C_{121112}^{(1)} \rangle, \quad 6C_3^e + 2C_6^e = 2\langle C_{111122}^{(1)} \rangle$$

$\Lambda$	$\Lambda_m$	$\Lambda_1$	$\Lambda_2$	$\bar{\Lambda}_1$	$\bar{\Lambda}_2$
$\lambda$	2,24	1,845	1,847	0,824	0,825
$G$	1,00	0,964	0,961	0,964	0,961
$C_3$	-1,96	-3,024	-3,165	1,543	1,615
$C_4$	3,61	3,610	3,610	1,000	1,000
$C_5$	-11,13	-10,46	-10,50	0,940	0,943
$C_6$	3,61	3,763	3,766	1,042	1,043

Отметим, что при решении задач о плоской деформации только 3 из четырех модулей  $C_3^e, C_4^e, C_5^e, C_6^e$  в (17) могут быть определены однозначно. Один из этих модулей может быть задан произвольно, после чего остальные могут быть найдены из решения системы (17) (только 3 уравнения этой системы линейно независимы). Например, можно положить  $C_4^e = C_4$ .

В качестве примера была рассмотрена задача об определении эффективных характеристик пористого тела, упругие свойства материала матрицы которого задаются определяющими соотношениями типа Мурнагана [4] (материал матрицы считается изотропным):

$$\Sigma^0 = \lambda(E:I)I + 2GE + 3C_3(E:I)^2I + C_4(E^2:I)I + 2C_4(E:I)E + 3C_5E^2 \quad (18)$$

Чтобы оценить поправку от учета эффекта взаимодействия между порами в представительной области  $S$ , расчет эффективных характеристик был проведен как для случая, когда в  $S$  расположены две круговые полости радиуса  $R = a/9$ , так и для случая, когда в  $S$  расположена одна круговая полость радиуса  $R = a\sqrt{2}/9$  (в обоих случаях коэффициент пористости одинаков и равен  $p = 0,08$ ). Результаты расчетов модулей упругости  $\Lambda(\lambda, G, C_j)$  приведены в таблице. Во втором столбце таблицы приведены модули упругости материала матрицы  $\Lambda_m$ , отнесенные к  $G$  матрицы, для которых был проведен расчет, в третьем и четвертом столбцах – эффективные модули  $\Lambda_j$  ( $j = 1$  – одна полость,  $j = 2$  – две полости) пористого материала для двух указанных случаев (отнесенные к  $G$  матрицы), в пятом и шестом столбцах – отношения эффективных модулей упругости к соответствующим модулям материала матрицы для этих случаев ( $\bar{\Lambda}_j = \Lambda_j / \Lambda_m$ ).

Приведенные результаты показывают, что влияние нелинейности на эффективные механические свойства пористого материала может быть существенным и растет при увеличении деформации. Например, при  $E_{11} = E_{22} = 0,04$  поправка от учета нелинейности при расчете напряжений в эффективном материале для случая круговых в недеформированном состоянии пор, коэффициента пористости  $p = 0,08$  составляет около 30%.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фильштинский Л.А. Напряжения и смещения в упругой плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круглых отверстий // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 430–441.
2. Григолоук Э.И., Фильштинский Л.А. Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970. 556 с.
3. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 455 с.
4. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
5. Левин В.А., Тарасьев Г.С. Наложение больших упругих деформаций в пространстве конечных состояний // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251. Вып. 1. С. 63–66.

6. Вавакин А.С., Салганик Р.Л. Об эффективных характеристиках неоднородных сред с изолированными неоднородностями // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 3. С. 65–75.
7. Левин В.А., Зингерман К.М. К решению с помощью численно-аналитических вычислений на ЭВМ одной плоской задачи теории многократного наложения больших упругих деформаций // Гез. докл. 3-й Всесоюз. конф. по нелинейной теории упругости. Сыктывкар, 1989. С. 77–78.
8. Канаун С.К. Метод эффективного поля в линейных задачах статики композитной среды // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 655–665.
9. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // Acta Met. 1973. V. 21. N 5. P. 571–574.
10. Канаун С.К., Левин В.М. Метод эффективного поля в механике композитных материалов. Петрозаводск: Изд-во Петрозав. ун-та, 1993. 598 с.
11. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.

Москва

Поступила в редакцию  
28.XI.1995