

УДК 539.3

© 1996 г. С. М. БОРЗЕНКОВ, В. П. МАТВЕЕНКО

## ОПТИМИЗАЦИЯ УПРУГИХ ТЕЛ В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Проблема построения сингулярных решений задач теории упругости в окрестности особых точек привлекает внимание многих исследователей. Известно большое число решений такого рода задач для особых точек различного типа. Наиболее широкое применение они нашли в линейной механике разрушения. Однако, необходимо отметить ограниченность приложений этих решений для прочностного анализа и численной оценки напряжений в телах произвольной конфигурации.

Анализ сингулярных решений и инженерный опыт позволяют говорить о том, что окрестности особых точек, как правило, являются зонами сильной концентрации напряжений, а форма их поверхности и механические характеристики материала существенно влияют на напряженное состояние. Поэтому представляется совершенно естественной постановка задачи оптимизации формы поверхности в окрестности особых точек и поиска упругих постоянных, при которых напряженное состояние удовлетворяет заданному прочностному критерию, либо возникающие напряжения являются минимальным из всех возможных конструктивных решений. Такой подход даёт новую возможность для практического приложения сингулярных решений задач теории упругости в окрестности особых точек.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается кусочно-однородное тело объема  $V$ , состоящее из  $k$  частей и ограниченное поверхностью  $S$ , на которой имеются особые точки (точки смены типа граничных условий, нарушения гладкости поверхности, границы контакта различных материалов и т. п.). В окрестности особой точки  $t$  введем функционал

$$F [S_t, E_{ijmn}^k] = \max_{V_t} f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}) \quad (1.1)$$

где  $S_t$  и  $V_t$  — часть поверхности  $S$  и объема  $V$  в окрестности особой точки,  $E_{ijmn}^k$  — тензор упругих постоянных  $k$ -ой части объема  $V$ ,  $f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij})$  — некоторая функция напряжений и деформаций.

На поверхность  $S_t$  наложены ограничения типа равенств и неравенств в форме

$$x \in S_t^*: S_t(x) = S_t^*(x) \quad (1.2)$$

$$x \in V_t^*: S_t(x) \subset V_t^*(x) \quad (1.3)$$

где  $S_t^*(x)$ ,  $V_t^*(x)$  — заданные ограничения. Компоненты тензора  $E_{ijmn}^k$  должны удовлетворять условиям симметрии

$$E_{ijmn}^k = E_{jmn}^k, \quad E_{ijmn}^k = E_{ijnm}^k, \quad E_{ijmn}^k = E_{mnji}^k \quad (1.4)$$

и образовывать положительно определенную квадратичную форму, ограниченную сверху и снизу [1].

$$G_1 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \leq \varepsilon_{ij} E_{ijmn}^k \varepsilon_{mn} \leq G_2 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (1.5)$$

Здесь  $G_1, G_2$  — минимальное и максимальное собственные значения соответствующей характеристической матрицы.

Требуется найти поверхность  $S$ , и характеристики материала, удовлетворяющие ограничениям (1.2)—(1.5) и минимизирующие функционал (1.1), либо обеспечивающие его значение меньше некоторой заданной величины.

При численной реализации поставленной оптимизационной задачи решение предлагается отыскивать на ограниченном классе поверхностей  $S_r$ . В качестве образующих для таких поверхностей можно использовать кусочно-полиномиальные функции, определяемые по значениям координат конечного числа узловых точек. Тогда неизвестная часть геометрии тела  $S$ , определяется конечным числом параметров, а функционал (1.1) превращается в функцию этих параметров. Следовательно, задача минимизации функционала (1.1) при ограничениях (1.2)—(1.5) сводится к минимизации функции конечного числа переменных (координат узловых точек поверхности и компонент тензора упругих постоянных  $E_{ijmn}^k$ ) при ограничениях (1.2)—(1.5), т. е. к классической задаче нелинейного математического программирования.

**2. Особенности численной реализации алгоритма оптимизации.** Для определения напряженно-деформированного состояния (НДС) тела в ходе оптимизационного поиска использовался метод конечных элементов. Включение в конечно-элементный алгоритм полуаналитических сингулярных элементов [2] позволило снять вопросы о точности и сходимости решения в окрестности особых точек (линий). Однако, выбор численного метода расчета НДС предопределил присущие ему трудности при получении решения поставленной оптимизационной задачи.

В отличие от оптимизации по переменным, определяющим некоторые размеры тела (толщина пластинки, площадь поперечного сечения стержня и т. п.), оптимизация по форме ведет к изменению исходной конечно-элементной модели. При этом, форма и число элементов, достаточные для требуемой точности расчета исходной конфигурации, могут оказаться совершенно не достаточными для конечного варианта. Для решения этой проблемы нужно использовать такие методы создания сетки, которые на каждом этапе решения оптимизационной задачи позволяли бы производить генерацию конечноэлементной сетки требуемого качества. Этого можно достичь, например, с помощью алгоритма, изложенного в работе [3].

При решении двумерных или сводящихся к ним (тела вращения) задач для описания изменяемой части границы тела была использована полигональная кривая, задаваемая набором из  $N$  отрезков, каждый из которых описывается полиномом первой степени. Уравнение этой кривой в декартовой системе координат имеет вид

$$y - \sum_{i=1}^N \left\{ (x - x_i) \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} + y_i \right\} = 0, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad (2.1)$$

где  $x_i, y_i$  — координаты узловых точек.

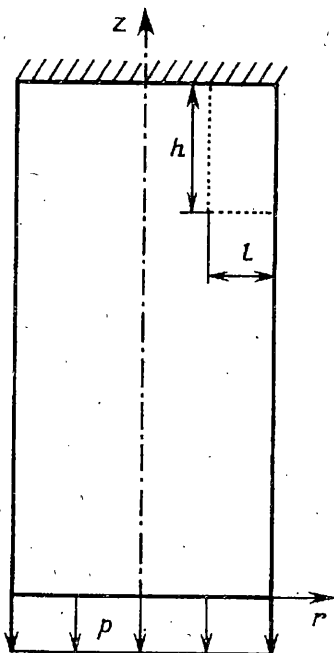
Подобный способ задания формы области, как отмечается в обзоре [4], в ходе оптимизационного поиска может привести к ее «пилообразности». Вершины пилообразной кривой будут являться дополнительными особыми точками, в которых функционал цели может принимать бесконечные значения. При численной реализации это обстоятельство приводит к снижению точности выполнения естественных граничных условий вблизи таких точек. Поэтому для устранения нежелательных конфигураций к выбранной целевой функции добавлялась штрафная функция выполнения естественных граничных условий

$$\omega = C \int_{S_i} |\sigma_i^* - \sigma_i| ds \quad (i = 1, 2) \quad (2.2)$$

Здесь  $\sigma_1^*, \sigma_2$  — заданные и полученные в результате решения главные напряжения:  $C$  — некоторая константа, подбираемая из условия, что штрафная функция  $\omega$  не должна превышать 10—15% от ожидаемого значения целевой функции. Численные эксперименты показали, что указанный вариант штрафной функции несущественно меняет значение целевой функции и обеспечивает достаточную гладкость границы в процессе оптимизации.

Для численной реализации задачи оптимального поиска с ограничениями использовался симплексный метод Нелдера — Мида, программная реализация которого дана в работе [5].

3. Результаты решения некоторых оптимизационных задач. Рассмотрим примеры решения задач о поиске оптимальной формы поверхности с целью минимизации функционалов, характеризующих напряженное состояние в окрестности особых точек.



Фиг. 1

**Задача 1.** На упругое цилиндрическое тело (фиг. 1) высотой  $H$  и радиуса  $R$  по одной из торцевых поверхностей действует постоянная нагрузка  $p$ . Другая торцевая поверхность неподвижна. Боковая поверхность свободна от напряжений. Необходимо определить форму цилиндрической поверхности, обеспечивающую минимальную интенсивность касательных напряжений  $\sigma_u$  в теле.

Для рассматриваемой задачи функционал (1.1) примет вид

$$F[S_i(r, z)] = \max_{V_i} \sigma_u + \omega \quad (3.1)$$

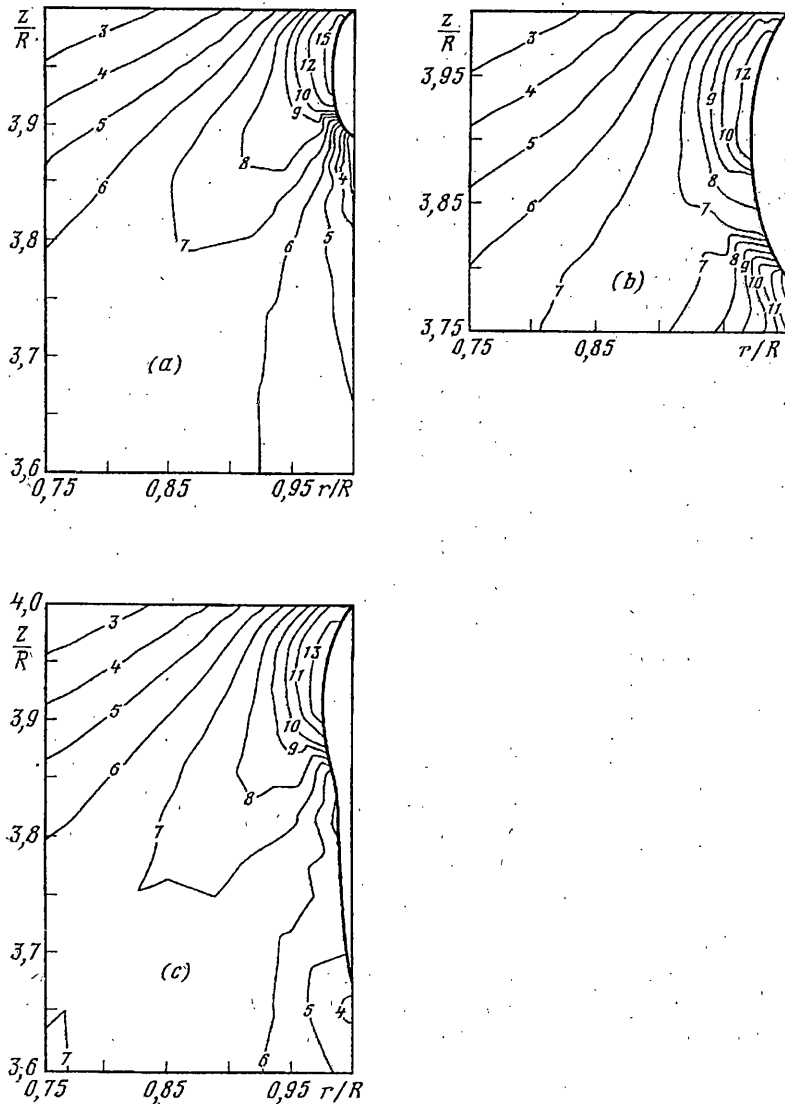
Требуется определить функцию  $S_i(r, z)$ , минимизирующую функционал (3.1) при ограничениях, обеспечивающих изменение геометрии в заданных пределах

$$R - l \leq r \leq R, \quad H - h \leq z \leq H \quad (3.2)$$

Для расчетов принималось: коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ ,  $H/R = 4$ ,  $l/R = 0,1$ ,  $N = 6$ . В качестве параметров оптимизации выбирались координаты узловых точек, полигональной кривой  $S_i(r, z)$ , являющейся образующей для цилиндрической поверхности. На фиг. 2 приведены формы оптимальных поверхностей и линии равного уровня  $\sigma_u^* = \sigma_u/p$

для различных соотношений  $h$  и  $R$ . Для соотношений  $h/R = 0,1$  (фиг. 2, а),  $h/R = 0,2$  (фиг. 2, б) и  $h/R = 0,4$  (фиг. 2, в) максимальные значения функции цели  $\max \sigma_u^*$  равны соответственно 2,58, 2,26 и 2,30. Значения линий уровня с номерами 1, 2, ... 15 равны 0,8, 0,9, ... 2,20.

В аналогичных прикладных задачах одним из традиционных вариантов снятия концентрации напряжений является использование кольцевых выточек в форме полуокружности. На фиг. 3 приведены результаты решения рассматриваемой задачи с выточками разного радиуса. Для выточек с радиусами  $\rho/R = 0,025$  (фиг. 3, а),  $\rho/R = 0,05$  (фиг. 3, б) и  $\rho/R = 0,1$  (фиг. 3, в) максимальные значения функции цели  $\max \sigma_u^*$  равны соответственно 4,67; 4,09 и 3,23. Значения линий уровня  $\sigma_u^*$  с номерами 1, 2, ... 15 равны 0,6; 0,8; ... 3,4. Из этих вариантов для сравнения с результатами, представленными на фиг. 2 наиболее оправданным представляется выбор варианта с кольцевой выточкой радиуса  $\rho/R = 0,025$ , глубина проникновения которой в тело совпадает с оптимальным про-



Фиг. 2

филем (фиг. 2, b). Сопоставление показывает, что оптимальное решение дает максимальное значение  $\sigma_u^*$  на 107% меньше, чем такая традиционная схема снятия концентрации напряжений.

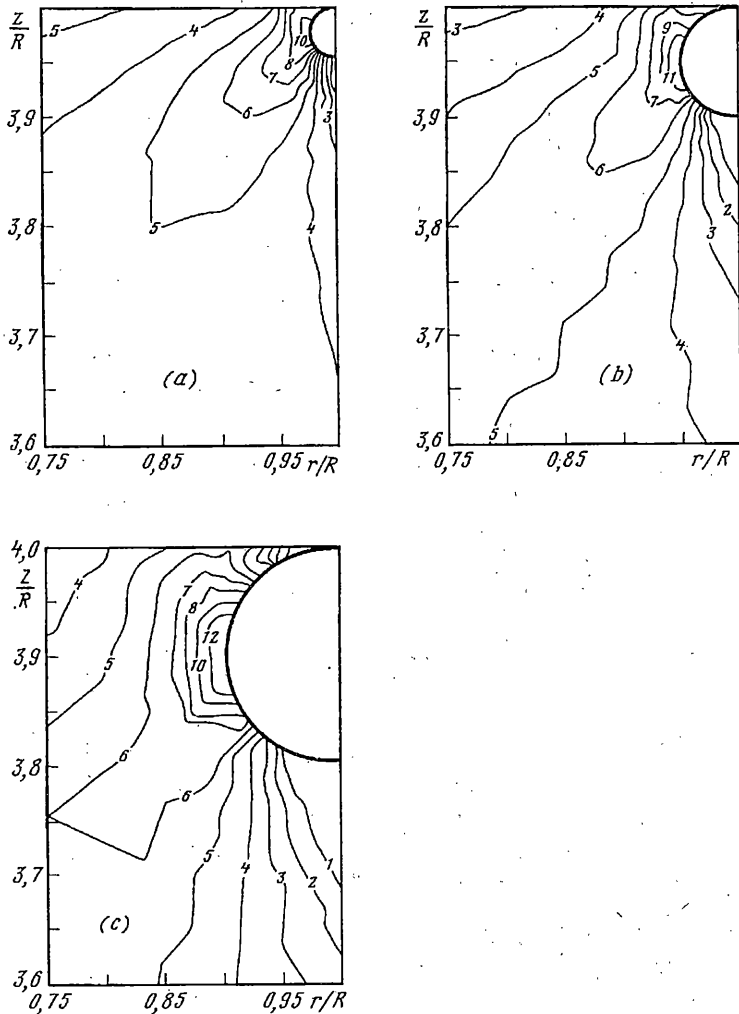
**Задача 2.** Рассмотрим задачу 1 с другим функционалом цели, который определяет отклонение отрывных напряжений на скрепленной поверхности от их среднего значения:

$$F [S_l(r, z)] = \int_{S_z} \left[ \sigma_n(r, z) - 1/S_z \int_{S_z} \sigma_n(r, z) ds \right]^2 ds + \omega \quad (3.3)$$

Здесь  $S_z$  — поверхность закрепленного торца цилиндра,  $\sigma_n$  — напряжение, нормальное к поверхности  $S_z$ .

Требуется найти геометрию боковой поверхности цилиндра  $S_l(r, z)$ , минимизирующую функционал ((3.3) при ограничениях (3.2).

Такая задача может быть полезной при выборе формы образца для определения

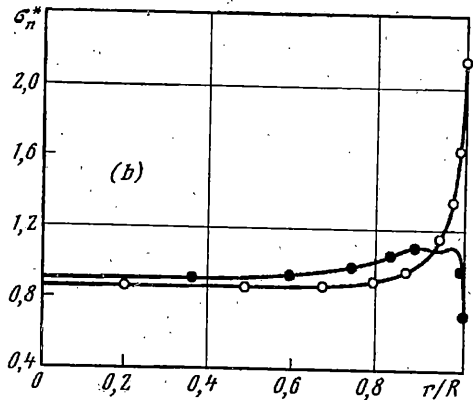
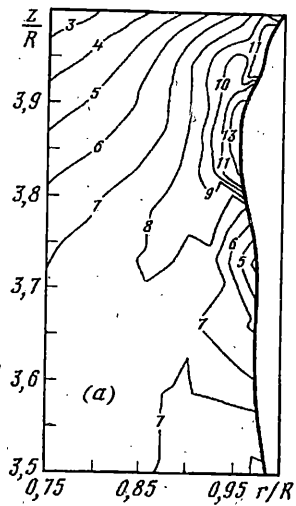


Фиг. 3

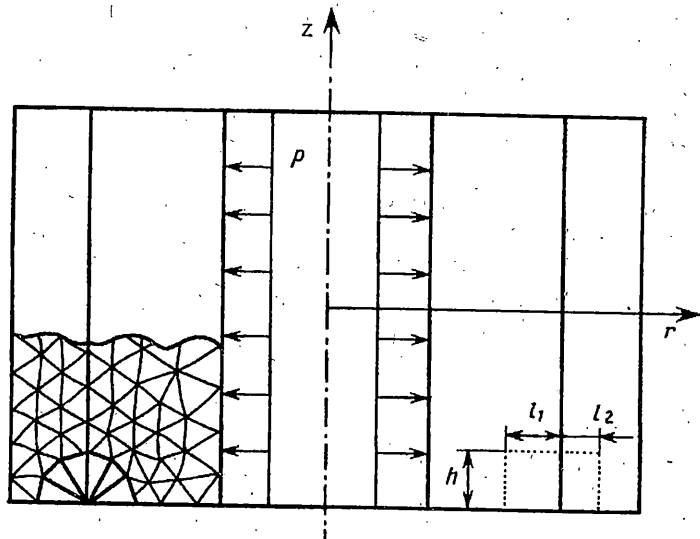
адгезионной прочности при отрыве, когда наиболее подходящими являются образцы, обеспечивающие однородное распределение отрывных напряжений. В этом случае поверхность  $S_z$  будет выполнять роль поверхности адгезионного скрепления.

Приведем результат расчета для случая  $\nu = 0,3$ ,  $H/R = 4$ ,  $l/R = 0,1$ ,  $h/R = 0,8$ ,  $N = 14$ . Найденная форма оптимальной поверхности и линии равного уровня  $\sigma_n^*$  приведены на фиг. 4а. Значения линий уровня 1, 2, ... 15 равны соответственно 0,8; 0,9, ... 2,2. Распределение отрывных напряжений  $\sigma_n^* = \sigma_z/P$  по поверхности  $S_z$  в цилиндре с исходной (светлые точки) и оптимальной (темные точки) поверхностью приведены на фиг. 4, b. Полученная геометрия поверхности обеспечивает отклонение отрывных напряжений от их среднего значения не более чем на 11%.

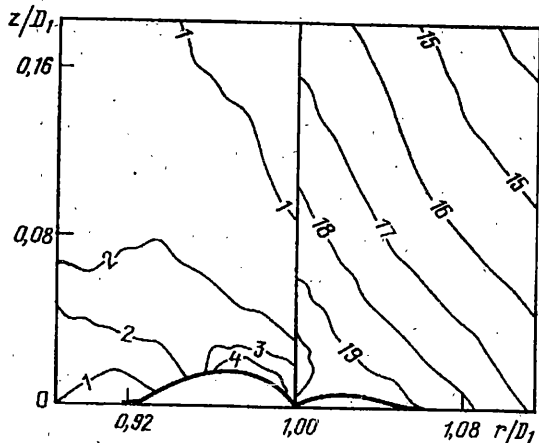
**Задача 3.** Рассмотрим упругий двухслойный полый цилиндр, геометрия которого определяется высотой  $H$ , внутренним и наружным диаметрами  $D_0$  и  $D$ , диаметром поверхности соединения слоев  $D_1$  (фиг. 5). Упругими характеристиками внутреннего слоя являются модуль упругости  $E_1$  и коэффициент Пуассона  $\nu_1$ , наружного слоя —  $E_2$ ,  $\nu_2$ . На внутреннюю поверхность действует постоянное давление  $p$ . В



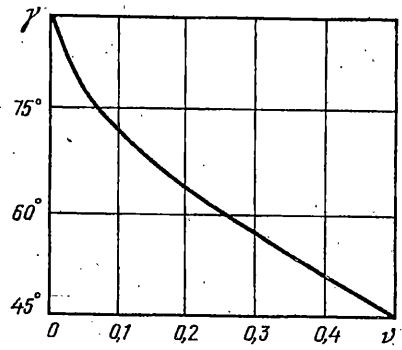
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

виду симметрии рассматривается половина расчетной области. Ставится задача поиска формы торцевой поверхности, доставляющее минимальное значение функционалу

$$F [S_i(r, z)] = \sum_{i=1,2} \max_{\nu_i} \sigma_u^i + \omega \quad (3.4)$$

при следующих ограничениях на аргументы функции  $S_i$ :

$$D_1/2 - l_1 \leq r \leq D_1/2 + l_2, \quad 0 \leq z \leq h \quad (3.5)$$

При решении данной оптимизационной задачи наиболее эффективной оказалась итерационная стратегия поиска, которая заключается в следующем. На первом шаге минимизации функционала (3.4) изменяется геометрия только в одной из однородных частей составного цилиндра. На следующем шаге найденная форма фиксируется и допускается изменение геометрии во второй части цилиндра. Такая итерационная процедура продолжается до тех пор, пока процесс не сойдется с заданной точностью.

На фиг. 6 приведены найденная оптимальная форма поверхности цилиндра и распределение  $\sigma_u^*$  в некоторой окрестности особой точки (край поверхности соединения слоев цилиндра) для следующих параметров задачи:  $\nu_1 = 0,4$ ;  $\nu_2 = 0,3$ ;  $E_2/E_1 = 92,86$ ;  $D_0/D_1 = 0,4$ ;  $D/D_1 = 1,2$ ;  $H/D_1 = 1,2$ ;  $N_1 = 7$ ;  $N_2 = 7$ ;  $l_1/D_1 = 0,07$ ;  $l_2/D_1 = 0,05$ ;  $h/D_1 = 0,04$ . Значения линий уровня  $\sigma_u^* 1, 2, \dots 15$  равны соответственно 0,8; 0,9,  $\dots$  2,2. Как и в задаче 1, были выполнены расчеты для вариантов с кольцевыми выточками. Сравнение результатов показало, что форма поверхности, найденная при решении оптимизационной задачи, дает существенно меньший уровень напряжений.

**4. Обсуждение результатов.** Из работ, посвященных сингулярным решениям задач теории упругости известно, что характер поведения напряжений в окрестности особых точек может быть оценен из анализа собственных решений для клиновидных тел с соответствующими граничными условиями [6]. Эти решения, построенные в полярной системе координат  $(r, \varphi)$  с началом в вершине клина (особая точка), содержат в качестве множителя  $r^{\alpha_n}$ , где  $\alpha_n$  есть  $n$ -е собственное значение соответствующей задачи о клине [7]. Если среди  $\alpha_n$  есть хотя бы одно, у которого действительная часть меньше единицы, то в особой точке имеет место сингулярность напряжений.

Собственные значения  $\alpha_n$  зависят от упругих постоянных материала и геометрии области. Так, для однородного клина со смешанными граничными условиями (особая точка в задачах 1 и 2)  $\alpha_n$  зависят от коэффициента Пуассона и величины угла  $\gamma$ , а для составной области (особая точка в задаче 3) — от коэффициентов Пуассона  $\nu_1, \nu_2$ , соотношения  $E_2/E_1$  и величины углов  $\gamma_1, \gamma_2$ . В области параметров, определяющих действительные значения  $\alpha_n$ , можно построить линию (поверхность), разделяющую ее на две подобласти с  $\text{Re } \alpha_n < 1$  (область над кривой) и  $\text{Re } \alpha_n > 1$  (область под кривой). Пример такой разделительной кривой для однородного клина со смешанными граничными условиями приведен на фиг. 7.

Анализ оптимальных поверхностей, полученных для различных задач, в том числе и для представленных в данной работе, позволил выявить у них следующее общее свойство. Углы, образуемые проведенными из особой точки касательными к поверхности, в совокупности со значениями упругих постоянных дают точку на линии (поверхности), разделяющей в соответствующей задаче о клиновидной области решения с сингулярностью и без сингулярности.

Важным обстоятельством является то, что указанное свойство оптимальных поверхностей является их ключевой характеристикой. Это позволяет при наличии

информации о значениях  $Re \alpha_n$  и размерах допустимой области изменения геометрии построить поверхность достаточно близкую к оптимальной, не решая оптимизационной задачи.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код 96—01—00473).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 548 с.
2. Борзенков С. М., Матвеевко В. П. Полуаналитические сингулярные элементы для плоских и пространственных задач теории упругости//Изв. АН МТТ. 1995, № 6. С. 48—61.
3. Антуков В. Н., Мурзакаев Р. Т., Фонарев А. В. Прикладная теория проникания. М.: Наука, 1992. 103 с.
4. Haftka R. T., Grandhi R. V. Structural shape optimization a survey//Comp. Methods Appl. Mech. Eng. 1986. V. 57. No. 1. P. 91—106.
5. Гуснин С. Ю., Омелянов Г. А., Резников Г. В., Сироткин В. С. Минимизация в инженерных расчетах на ЭВМ. Библиотека программ. М.: Машиностроение, 1981. 121 с.
6. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. М.: Наука. 1981. 688 с.
7. Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension//J. Appl. Mech. 1952. V. 19. No. 4. P. 526—528.

Пермь

Поступила в редакцию  
25.XI.1993