МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1996

УДК 539.3

© 1996 г. В. В. ВАСИЛЬЕВ, Л. В. ФЕДОРОВ

К ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ, СФОРМУЛИРОВАННОЙ В НАПРЯЖЕНИЯХ

На основе геометрического подхода, устанавливающего соответствие между напряженно-деформированным состоянием тела и кривизной занимаемого им риманова пространства, рассматривается однородная задача теории упругости, сформулированная в напряжениях. Показано, что в рамках линеаризованного подхода, соответствующего классической теории упругости, требующей, чтобы пространство, занимаемое телом после деформации, оставалось евклидовым, задача сводится к шести уравнениям совместности деформаций, включающим шесть функций напряжений. Получены соотношения, позволяющие выразить напряжения через эти функции в произвольной системе координат.

1. Постановка задачи теории упругости в напряжениях. Как известно, задача теории упругости, сформулированная в напряжениях, сводится к системе девяти уравнений, включающей три уравнения равновесия, которые в случае отсутствия объемных сил могут быть записаны в декартовых координатах следующим образом:

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{21,2} + \sigma_{31,3} = 0 \quad (1, 2, 3) \tag{1.1}$$

и шесть уравнений совместности деформаций Бельтрами, записанных через напряжения. Для вывода последних рассматриваются соотношения Коши

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1}, \quad \varepsilon_{12} = 1/2\,(u_{1,2} + u_{2,1}) \quad (1, 2, 3) \tag{1.2}$$

из которых в результате исключения перемещений получаются уравнения совместности деформаций Сен-Венана, т. е.

$$S_{11}(\varepsilon) = 0, \quad S_{12}(\varepsilon) = 0 \quad (1, 2, 3) \tag{1.3}$$

где операторы $S_{ij}(a) = S_{ji}(a)$, действующие на некоторый симметричный тензор a_{ij}, имеют вид

$$S_{11}(a) = a_{22,33} + a_{33,22} - 2a_{23,33} \quad (1, 2, 3) \tag{1.4}$$

$$S_{12}(a) = a_{13,23} + a_{23,13} - (a_{12,33} + a_{33,12}) \quad (1, 2, 3)$$

затем с помощью закона Гука

$$\varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\sigma, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12} \quad (1, 2, 3) \tag{1.5}$$

$$\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \tag{1.6}$$

деформации в уравнениях (1.3) заменяются через напряжения и после некоторых преобразований получаются уравнения Бельтрами

$$\Delta\sigma_{11} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{,11} = 0, \quad \Delta\sigma_{12} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{,12} = 0 \quad (1, 2, 3) \tag{1.7}$$

В записанных выше и далее уравнениях индекс после запятой обозначает операцию дифференцирования по соответствующей координате, а символ (1, 2,

3) означает круговую перестановку индексов, с помощью которой из одного приведенного соотношения можно получить еще два.

Таким образом, задача сводится к девяти уравнениям (1.1), (1.7) относительно шести неизвестных напряжений. Несоответствие между числом уравнений и неизвестных в большинстве книг по теории упругости вообще не обсуждается. При этом предполагается, что для уравнений в частных производных число уравнений может не совпадать с числом неизвестных. Например, возможны случаи, когда часть уравнений используется для определения произвольных функций, получающихся при интегрировании других уравнений, что, в частности, имеет место в задаче о кручении стержня.

В классическом курсе [1] уравнения равновесия (1.1) предлагается объединить с граничными условиями, поскольку они имеют первый порядок, а система (1.7), включающая уравнения второго порядка, требует шести условий в каждой точке граничной поверхности, тогда как согласно исходной задаче теории упругости в этой точке задано только три напряжения.

Соответствующая современная трактовка [2] также связывает переопределенность задачи с порядком системы уравнений совместности (1.7), который в процессе ее вывода искусственно завышается. В результате система (1.7) приобретает дополнительные решения, существование которых нуждается в обосновании. Например, напряжения, линейно зависящие от координат, тождественно удовлетворяют уравнениям (1.7) и в общем случае не удовлетворяют уравнениям равновесия (1.1).

Известен вариант решения проблемы переопределенности задачи с помощью ослабления условий сплошности среды [3], согласно которым внутри тела достаточно удовлетворить лишь три уравнения совместности деформации, а остальные три удовлетворяются только на определенным образом фиксированных координатных поверхностях.

И наконец, согласно еще одной достаточно распространенной версии уравнения совместности деформаций (1.3) не являются взаимно независимыми и можно использовать любые три из них [4]. Действительно, непосредственной проверкой можно убедиться в том, что операторы S_{ij} в уравнениях (1.3) удовлетворяют следующим трем условиям [5]:

$$S_{11,1} + S_{21,2} + S_{31,3} = 0 \quad (1, 2, 3) \tag{1.8}$$

Интересно отметить, что по форме эти условия совпадают с уравнениями равновесия (1.1), причем, как будет видно из дальнейшего, эта аналогия не является единственной.

Как известно, из вывода уравнений совместности деформаций (1.3) следует, что существуют три функции, позволяющие тождественно удовлетворить эти уравнения. Этими функциями являются перемещения u_i, определяющие деформации в соответствии с соотношениями (1.2). Действительно, подстановка деформаций (1.2) в уравнения (1.3) приводит к тождественному удовлетворению этих уравнений при любых функциях u_i. Соответственно существуют, как известно, функции напряжений, позволяющие тождественно удовлетворить уравнения равновесия (1.1). Три такие функции (φ_{11}, φ_{22}, φ_{33}) были предложены в 1870 году Максвеллом

$$\sigma_{11} = \varphi_{22,33} + \varphi_{33,22}, \quad \sigma_{12} = -\varphi_{33,12} \quad (1, 2, 3) \tag{1.9}$$

и три другие (φ_{12}, φ_{13}, φ_{23}) были построены в 1892 году Морера

$$\sigma_{11} = -2\varphi_{23,23}, \quad \sigma_{12} = \varphi_{13,23} + \varphi_{23,13} - \varphi_{12,33} \quad (1, 2, 3) \tag{1.10}$$

Как показано в [6], существуют еще три формы, позволяющие выразить напряжения через три функции напряжений.

Таким образом, при трех функциях напряжений уравнения равновесия удовлетворяются тождественно и задача сводится к шести уравнениям совместности деформаций относительно трех неизвестных функций. Однако, как показывают решения конкретных задач, полученные в напряжениях, функции Максвелла и функции Морера не являются универсальными. Например, плоская задача решается с помощью функций Максвелла, а в задаче о кручении стержня используются функции Морера, причем окончательное число уравнений совпадает с числом неизвестных функций.

Действительно, задача о плоской деформации в координатах x_1, x_2 описывается двумя уравнениями равновесия

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{21,2} = 0, \quad \sigma_{22,2} + \sigma_{12,1} = 0 \tag{1.11}$$

и тремя уравнениями Бельтрами

$$\Delta\sigma_{11} + \frac{\sigma_{,11}}{1+\nu} = 0, \quad \Delta\sigma_{22} + \frac{\sigma_{,22}}{1+\nu} = 0, \quad \Delta\sigma_{12} + \frac{\sigma_{,12}}{1+\nu} = 0 \tag{1.12}$$

Эти пять уравнений включают три неизвестных напряжения $\sigma_{11}(x_1, x_2)$, $\sigma_{22}(x_1, x_2)$ и $\sigma_{12}(x_1, x_2)$. Остальные напряжения имеют вид $\sigma_{13} = 0$, $\sigma_{23} = 0$, $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$. Формулы Максвелла (1.9) описывают рассматриваемое напряженное состояние, если принять $\varphi_{11} = \nu\varphi(x, y)$, $\varphi_{22} = \nu\varphi(x, y)$, $\varphi_{33} = \varphi(x, y)$, т. е. ввести одну функцию напряжений так, что

$$\sigma_{11} = \varphi_{,22}, \quad \sigma_{22} = \varphi_{,11}, \quad \sigma_{12} = -\varphi_{,12}, \quad \sigma = (1+\nu)\Delta\varphi$$

При этом уравнения (1.11) и третье уравнение (1.12) удовлетворяются тождественно, а первые два уравнения (1.12) оказываются одинаковыми и приводят к известному бигармоническому уравнению $\Delta\Delta\varphi = 0$. Обращаясь к функции Морера (1.10), можно установить, что удовлетворяя трехмерным уравнениям равновесия (1.1), они не позволяют непосредственно удовлетворить их частную форму (1.11).

Рассмотрим теперь задачу кручения стержня, ось которого совпадает с осью x_3. Соответствующая система уравнений равновесия и совместности деформаций имеет вид

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} = 0 \tag{1.13}$$

$$\Delta\sigma_{31} + \frac{\sigma_{,13}}{1+\nu} = 0, \quad \Delta\sigma_{32} + \frac{\sigma_{,23}}{1+\nu} = 0 \tag{1.14}$$

и включает два неизвестных напряжения $\sigma_{31}(x_1, x_2)$ и $\sigma_{32}(x_1, x_2)$. Остальные напряжения отсутствуют, т. е. $\sigma_{11} = 0$, $\sigma_{22} = 0$, $\sigma_{33} = 0$, $\sigma_{12} = 0$. Формулы Морера (1.10) описывают такое напряженное состояние, если принять $\varphi_{12} = 0$, $\varphi_{13} = \varphi_{13}(x_1, x_2)$, $\varphi_{23} = \varphi_{23}(x_1, x_2)$, так что $\sigma_{31} = \sigma_{13} = \varphi_{23,12} - \varphi_{13,22}$, $\sigma_{32} = \sigma_{23} = \varphi_{13,12} - \varphi_{23,11}$. При этом уравнение (1.13) тождественно удовлетворяется, а уравнения (1.14) позволяют записать следующие два уравнения для функций φ_{13} и φ_{23}:

$$\Delta(\varphi_{23,12} - \varphi_{13,22}) = 0, \quad \Delta(\varphi_{13,12} - \varphi_{23,11}) = 0$$

Интегрируя первое уравнение по x_2, а второе по x_1 и обозначая $\varphi_{23,1} - \varphi_{13,2} = \varphi$, получим известное уравнение Пуассона для задачи кручения $\Delta\varphi = \mathrm{const}$. Как и ранее, можно отметить, что непосредственная постановка формул Максвелла (1.9) не позволяет удовлетворить уравнение равновесия в форме (1.13).

На основании изложенного естественно предположить, что соотношения (1.9) и (1.10), а также другие возможные соотношения, включающие три функции напряжений, являются частными формами записи более общего результата. Этот результат можно установить, воспользовавшись аналогией между уравнениями

(1.1) и (1.8). Действительно, если уравнение (1.8), аналогичное уравнению равновесия (1.1), тождественно удовлетворяется операторами S_{ij}, достаточно подставить в эти операторы тензор функции напряжений φ_{ij} вместо тензора a_{ij}, т. е. принять

$$\sigma_{11} = \varphi_{22,33} + \varphi_{33,22} - 2\varphi_{23,23} \quad (1, 2, 3) \tag{1.15}$$

$$\sigma_{12} = \varphi_{13,23} + \varphi_{23,13} - (\varphi_{12,33} + \varphi_{33,12}) \quad (1, 2, 3)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что уравнения равновесия (1.1) удовлетворяются при любых функциях φ_{ij}. Сопоставляя равенства (1.15) с соотношениями (1.9) и (1.10), можно также установить, что функции $\varphi_{11}, \varphi_{22}, \varphi_{33}$ являются функциями Максвелла, а функции $\varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{23}$ являются функциями напряжений Морера.

Соотношения, аналогичные равенствам (1.15), были получены Бельтрами в результате суперпозиции решений Максвелла и Морера (1.9) и (1.10). Их непосредственный вывод из уравнений равновесия был осуществлен в [7], где показано, что φ_{ij} образуют тензор функций напряжений и удовлетворяют шести уравнениям совместности деформаций, которые следуют из уравнений Бельтрами (1.7), если подставить в них соотношения (1.15).

Таким образом, однородная задача статики, сформулированная в напряжениях, сводится к системе шести уравнений совместности деформаций относительно шести функций напряжений. Решение этой задачи определяется решением системы уравнений совместности деформации, отыскиваемым в классе функций, удовлетворяющих системе уравнений равновесия. Общий анализ этого решения содержится в [7].

Остается, однако, открытым вопрос, связанный с тем, что уравнения равновесия (1.1) в общем случае оказывается возможным удовлетворить, введя только три функции напряжений — функции Максвелла (1.9), функции Морера (1.10) или другие [6]. Ответ на этот вопрос следует из структуры соотношений (1.15). В связи с тем, что их правые части соответствуют операторам S_{ij} уравнений совместности деформаций (1.3), добавление соотношений, записанных в правых частях равенств (1.2), тождественно удовлетворяющих уравнениям (1.3), не должно изменять соотношений (1.15). Отсюда следует, что вместо функций напряжений φ_{ij} можно ввести другие функции ψ_{ij} так, что

$$\varphi_{ij} = \Psi_{ij} + \tfrac{1}{2} \left(\partial u_j / \partial x_i + \partial u_i / \partial x_j \right) \tag{1.16}$$

где u_i — компоненты некоторого вектора. Подстановка φ_{ij} (1.16) в соотношения (1.15) не изменяет эти соотношения, которые оказываются записанными через функции ψ_{ij}. Однако, как следует из равенств (1.16), три из функций напряжений можно обратить в нуль, если задать функции u_i в соответствие с уравнениями $\partial u_j / \partial x_i + \partial u_i / \partial x_j = 2\varphi_{ij}$. Действительно, пусть $\varphi_{ii} = \partial u_i / \partial x_i$ и $u_i = \int \varphi_{ii}\, dx_i$.

Тогда равенства (1.16) дают

$$\Psi_{11} = \Psi_{22} = \Psi_{33} = 0$$

$$\varphi_{ij} = \Psi_{ij} + \frac{1}{2} \left(\int \frac{\partial \varphi_{jj}}{\partial x_i} dx_j + \int \frac{\partial \varphi_{ii}}{\partial x_j} dx_i \right) \tag{1.17}$$

где $ij = 12$, 13, 23. Подставляя функции (1.17) в соотношения (1.15), получим

$$\sigma_{11} = -2\Psi_{23,23} \quad (1, 2, 3)$$

$$\sigma_{12} = \Psi_{13,23} + \Psi_{23,13} - \Psi_{12,33} \quad (1, 2, 3)$$

т. е. выражения Морера (1.10). Аналогичным образом можно выразить напряжения только через функции Максвелла и получить другие возможные формы, содержащие три функции напряжений [6]. Однако в решении при этом всегда участвуют шесть функций напряжений — три функции позволяют удовлетворить уравнения равновесия, а три другие необходимы для определения функций u_i.

2. Кривизна пространства, порождаемая напряжениями, и функции напряжений. Введем криволинейную и, в общем случае, неортогональную систему координат x^1, x^2, x^3 и запишем однородные уравнения равновесия

$$\nabla_i \tau^{ij} = 0 \tag{2.1}$$

Как известно [8, 9], уравнения (2.1) можно тождественно удовлетворить, если соответствующие ковариантные компоненты тензора напряжений τ_{ij} (в отличие от введенных в п. 1 физических компонент тензора напряжений σ_{ij} они обозначены через τ_{ij}) выразить через метрический тензор g_{ij} и тензор Эйнштейна G_{ij} следующим образом

$$\mu\tau_{ij} = \lambda g_{ij} - G_{ij} \tag{2.2}$$

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij}R, \quad R = g^{ij}R_{ij} \tag{2.3}$$

Здесь μ и λ некоторые постоянные, а R_{ij} — тензор Риччи, через который в трехмерном пространстве выражаются компоненты тензора кривизны Римана — Кристоффеля

$$R_{ijkl} = g_{jl}R_{ik} + g_{ik}R_{jl} - g_{jk}R_{il} - g_{il}R_{jk} + \frac{1}{2} R\,(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}) \tag{2.4}$$

В ортогональной криволинейной системе координат, для которой (H_i — коэффициенты Ламе):

$$g_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad g_{ii} = H_i^2, \quad \sigma_{ij} = \tau_{ij}/(H_iH_j) \tag{2.5}$$

равенства (2.2) можно записать в развернутой форме [10]:

$$\sigma_{11} = p + \frac{cr_{23}}{H_2H_3}, \quad \sigma_{12} = -\frac{cR_{12}}{H_1H_2} \quad (1, 2, 3) \tag{2.6}$$

$$R_{12} = R_{21} = \frac{1}{H_3}\left(H_{3,12} - \frac{1}{H_1}H_{1,2}H_{3,1} - \frac{1}{H_2}H_{2,1}H_{3,2}\right) \quad (1, 2, 3)$$

$$r_{12} = r_{21} = \left(\frac{H_{2,1}}{H_1}\right)_{,1} + \left(\frac{H_{1,2}}{H_2}\right)_{,2} + \frac{H_{1,3}H_{2,3}}{H_3^2} \quad (1, 2, 3)$$

где p и c — коэффициенты, выражающиеся через μ и λ.

Из равенств (1.6), (2.3), (2.5) и (2.6) следует, что первый инвариант тензора напряжений σ связан с инвариантом кривизны следующим образом: $\sigma - 3p = cR/2$.

На основе полученных результатов процессу нагружения твердого тела можно придать следующую геометрическую интерпретацию. Пусть в исходном состоянии тело занимало некоторую область евклидова пространства, определяемого метрическим тензором g_{ij}^0, для которого $R_{ijkl} \equiv 0$. Согласно равенствам (2.2) напряжения τ_{ij}, вызываемые поверхностной нагрузкой, порождают внутри тела риманово пространство, характеризуемое метрическим тензором g_{ij} и тензором кривизны R_{ij} или R_{ijkl}. По-видимому, впервые обсуждаемая геометрическая интерпретация напряженного состояния была предложена в [11]. При этом остался открытым вопрос о возможности существования искривленного пространства внутри нагруженного тела, которое в свою очередь находится в евклидовом пространстве. Как известно [12], трехмерное риманово пространство в общем случае может содержаться в евклидовом пространстве, размерность которого не меньше шести.

Однако, как показано в [10], если отказаться от условия однородности и сплошности пространства, то риманово пространство может содержаться в евклидовом пространстве с такой же размерностью. В результате кривизна риманова пространства проявляется в изменении некоторой характеристики плотности вмещающего его евклидова пространства.

Однако вне зависимости от того является ли риманово пространство внутри нагруженного тела физическим пространством, соотношение (2.2), позволяющее тождественно удовлетворить уравнения равновесия (2.1), можно использовать для получения функций напряжений. Ввиду того, что соотношение (2.2) нелинейно по g_{ij}, представим метрический тензор в виде

$$g_{ij} = g^0_{ij} + \varepsilon\varphi_{ij} \tag{2.7}$$

Здесь g^0_{ij} — метрический тензор евклидова пространства, для которого $R_{ijkl}(g^0_{ij}) \equiv 0$, ε — бесконечно малая величина, а φ_{ij} — функции напряжений, составляющие, как следует из равенства (2.7), симметричный тензор второго ранга. Подставляя метрические коэффициенты (2.7) в равенство (2.2), осуществим линеаризацию по параметру ε. В результате получим

$$\mu\tau_{ij} = \lambda g_{ij} - R^0_{ij} + \frac{1}{2} g^0_{ij} R_0 \tag{2.8}$$

Для записи R^0_{ij} и R_0 воспользуемся общим выражением для тензора Риччи

$$R_{ik} = \frac{\partial r^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial r^l_{il}}{\partial x^k} + r^l_{ik} r^m_{lm} - r^m_{il} r^l_{km} \tag{2.9}$$

$$r^i_{ik} = \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{sk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{si}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^s} \right) \tag{2.10}$$

где r^i_{ik} — символы Кристоффеля 2-го рода.

Учитывая, что линеаризация с учетом равенства (2.7) дает $g^{ij} = g^{ij}_0 - \varepsilon\varphi^{ij}$, $\varphi^{ij} = g^{is} g^{jk} \varphi_{sk}$, линеаризованную форму соотношения (2.10) можно представить в виде

$$r^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \varepsilon g^{ip}_0 (f_{pik} - \varphi_{pq}\Gamma^q_{jk}) \tag{2.11}$$

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{is}_0 \left(\frac{\partial g^0_{sk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g^0_{sj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g^0_{jk}}{\partial x^s} \right)$$

$$f_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_{jk}}{d x^i} \right)$$

$$g^{ij}_0 = \frac{1}{g_0} \frac{\partial g_0}{\partial g^0_{ij}}, \quad g_0 = \mathrm{Det}\,|g^0_{ij}|$$

Подставляя коэффициенты (2.11) в равенство (2.9) и учитывая, что $R_{ik}(g^0_{ij}) \equiv 0$, окончательно получим

$$R^0_{ik} = \varepsilon g^{ip}_0 \Big[\frac{\partial f_{pik}}{\partial x^l} - \frac{\partial f_{pil}}{\partial x^k} + f_{qlk}\Gamma^q_{ip} + f_{qip}\Gamma^q_{lk} - f_{qik}\Gamma^q_{lp} -$$
$$- f_{qlp}\Gamma^q_{ik} + \varphi_{st}(\Gamma^s_{ik}\Gamma^t_{lp} - \Gamma^s_{ip}\Gamma^t_{lk}) \Big] \tag{2.12}$$

Для инварианта кривизны имеем

$$R_0 = g^{ik}_0 R^0_{ik} \tag{2.13}$$

Возвращаясь к формуле (2.8), заметим, что первое слагаемое, соответствующее, как следует из равенств (2.6), гидростатическому нагружению, может быть отброшено. Вводя, как и ранее в равенствах (2.6), коэффициент c вместо μ, окончательно получим

$$\tau_{ij} = c\,(R^0_{ij} - {}^1\!/\!_2 g^0_{ij} R_0) \tag{2.14}$$

где R^0_{ij} и R_0 определяются формулами (2.12) и (2.13). Напряжения (2.14) тождественно удовлетворяют уравнениям (2.1), записанным для исходного евклидова пространства, т. е. для случая $g_{ij} = g^0_{ij}$. Доказательство этого факта, проведенное для декартовой системы координат и справедливое в общем случае, представлено в [9, 11], где с помощью обсуждаемого метода были выведены соотношения (1.9) и (1.10).

В случае ортогональной криволинейной системы координат, для которой справедливы равенства (2.5), соотношение (2.14) можно записать в развернутой форме, т. е.

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} = \frac{c\varepsilon}{H_2H_3}\Big\{ & \frac{1}{2H_2H_3}(\varphi_{22,33} + \varphi_{33,22}) + \frac{1}{2H_1^2}\left(\varphi_{22,1}\frac{H_{3,1}}{H_2} + \varphi_{33,1}\frac{H_{2,1}}{H_3}\right) - \\
& - \frac{1}{2}\left(\varphi_{22,2}\frac{H_{3,2}}{H_2^3} + \varphi_{33,3}\frac{H_{2,3}}{H_3^3}\right) - \frac{1}{H_2H_3}\left[\varphi_{22,3}\left(\frac{H_{2,3}}{H_2} + \frac{H_{3,3}}{2H_3}\right) + \right. \\
& + \varphi_{33,2}\left(\frac{H_{3,2}}{H_3} + \frac{H_{2,2}}{2H_2}\right) - \varphi_{11}\frac{H_{2,1}H_{3,1}}{H_1^4} + \varphi_{22}\frac{1}{H_2^3}\left(\frac{H_{2,2}H_{3,2}}{H_2} + \frac{H_{2,3}^2}{H_3}\right) + \\
& + \varphi_{33}\frac{1}{H_3^3}\left(\frac{H_{3,3}H_{2,3}}{H_3} + \frac{H_{3,2}^2}{H_2}\right) - \varphi_{23,23}\frac{1}{H_2H_3} + \frac{1}{H_2H_3}\left(\varphi_{23,2}\frac{H_{3,3}}{H_3} + \varphi_{23,3}\frac{H_{2,2}}{H_2}\right) + \\
& + \frac{1}{H_1^2}\left[-\varphi_{12,2}\frac{H_{3,1}}{H_2} - \varphi_{13,3}\frac{H_{2,1}}{H_3} + \frac{\varphi_{12}}{H_2^2}(H_{2,2}H_{3,1} - H_{2,1}H_{3,2}) + \right. \\
& \left.\left. + \frac{\varphi_{13}}{H_3^2}(H_{3,3}H_{2,1} - H_{3,1}H_{2,3}) + \varphi_{23}\frac{H_1^2}{H_2^2H_3^2}(H_{2,3}H_{3,2} - H_{2,2}H_{3,3})\right]\right\} \quad (1, 2, 3)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{12} = \frac{c\varepsilon}{H_1H_2}\Big\{ & \frac{1}{2}\left[-\frac{\varphi_{33,12}}{H_3^2} + \frac{1}{H_3^2}\left[\varphi_{33,2}\left(\frac{H_{3,1}}{H_3} + \frac{H_{2,1}}{H_2}\right) + \varphi_{33,1}\left(\frac{H_{3,2}}{H_3} + \frac{H_{1,2}}{H_1}\right) + \right.\right. \\
& \left. + \varphi_{11,2}\frac{H_3H_{3,1}}{H_1^2} + \varphi_{22,1}\frac{H_3H_{3,2}}{H_2^2}\right] - 2\varphi_{11}\frac{H_{1,2}H_{3,1}}{H_1^3H_3} - 2\varphi_{22}\frac{H_{2,1}H_{3,2}}{H_3H_2^3} - \\
& \left. - 2\varphi_{33}\frac{H_{3,1}H_{3,2}}{H_3^4}\right] + \frac{1}{2H_3^2}\left[(\varphi_{13,2} + \varphi_{23,1} - \varphi_{12,3})_{,3} + \varphi_{12,3}\left(\frac{H_{1,3}}{H_1} + \frac{H_{2,3}}{H_2} + \right.\right. \\
& \left. + \frac{H_{3,3}}{H_3}\right) + \varphi_{13,2}\left(\frac{H_{1,3}}{H_1} - \frac{H_{2,3}}{H_2} - \frac{H_{3,3}}{H_3}\right) + \varphi_{23,1}\left(\frac{H_{2,3}}{H_2} - \frac{H_{1,3}}{H_1} - \frac{H_{3,3}}{H_3}\right) - \\
& - 2\varphi_{13,3}\frac{H_{1,2}}{H_1} - 2\varphi_{23,3}\frac{H_{2,1}}{H_2} - \frac{2\varphi_{12}}{H_1H_2}\left(\frac{H_3H_{1,2}H_{3,2}}{H_2} + H_{1,3}H_{2,3} + \frac{H_3H_{2,1}H_{3,1}}{H_1}\right) + \\
& \left. + \frac{2\varphi_{13}}{H_1H_3}(H_{1,2}H_{3,3} - H_{1,3}H_{3,2}) + \frac{2\varphi_{23}}{H_2H_3}(H_{2,1}H_{3,3} - H_{3,1}H_{2,3})\right]\Big\} \quad (1, 2, 3)
\end{aligned}$$

Как и ранее, индекс после запятой обозначает дифференцирование по соответствующей координате.

Рассмотрим соотношения (2.14) и (2.15), в которых содержится бесконечно малая величина ε. Поскольку напряжения в левых частях этих равенств и функции напряжений в их правых частях должны быть конечными, произведение $c\varepsilon$ должно быть конечной величиной, а параметр c бесконечно большим. Записывая формулы (2.15) для декартовых координат, т. е. для случая $H_i = 1$, и сравнивая результат с равенствами (1.15), можно заключить, что $c\varepsilon = 2$. Конкретное значение, естественно, не существенно, так как задача однородная и функции напряжений определяются с точностью до множителя. Важно, что $c\varepsilon$ является конечной величиной. Другим важным результатом этого раздела является тензор кривизны R^{τ}_{ijkl}, который связан с напряжениями, и его компоненты пропорциональны бесконечно малой величине ε, т. е.

$$R^{\tau}_{ijkl} = R^{0}_{ijkl}(\varepsilon\varphi) \tag{2.16}$$

где R^0_{ijkl} следует из равенств (2.4), (2.12) и (2.13).

3. Кривизна пространства, порождаемая деформациями. Запишем метрический тензор деформированной среды в виде

$$g_{ij} = g^0_{ij} + e_{ij} \tag{3.1}$$

В отличие от равенства (2.7) компоненты тензора деформаций e_{ij} считаются малыми по сравнению с единицей, но конечными величинами. Рассмотрим тензор кривизны Римана — Кристоффеля

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l}\right) + g^{pq}(\Gamma_{p,kj}\Gamma_{q,li} - \Gamma_{p,ki}\Gamma_{q,lj})$$

$$\Gamma_{p,kj} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_p}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^p}\right)$$

$$g^{pq} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{pq}}, \quad g = \mathrm{Det}\,|g_{ij}|$$

Подставим сюда метрический тензор в форме (3.1) и учтем, что g^0_{ij} соответствует евклидову пространству, а e_{ij} — компоненты тензора малых деформаций. Осуществляя линеаризацию по e_{ij}, окончательно получим

$$\begin{aligned}
R^e_{ilkp} = {} & \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial e_{pk}}{\partial x^i} + \frac{\partial e^{pi}}{\partial x^k} - \frac{\partial e_{ik}}{\partial x^p}\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial e_{pl}}{\partial x^i} + \frac{\partial e_{pi}}{\partial x^l} - \frac{\partial e_{il}}{\partial x^p}\right) - \\
& - \Gamma^q_{ip}\left(\frac{\partial e_{qk}}{\partial x^l} + \frac{\partial e_{ql}}{\partial x^k} - \frac{\partial e_{lk}}{\partial x^q}\right) - \Gamma^q_{lk}\left(\frac{\partial e_{qp}}{\partial x^i} + \frac{\partial e_{qi}}{\partial x^p} - \frac{\partial e_{ip}}{\partial x^q}\right) - \\
& - \Gamma^q_{lp}\left(\frac{\partial e_{qk}}{\partial x^i} + \frac{\partial e_{qi}}{\partial x^k} - \frac{\partial e_{ik}}{\partial x^q}\right) - \Gamma^q_{ik}\left(\frac{\partial e_{qp}}{\partial x^l} + \frac{\partial e_{ql}}{\partial x^p} - \frac{\partial e_{lp}}{\partial x^q}\right) + \\
& + 2e_{st}(\Gamma^s_{ik}\Gamma^t_{lp} - \Gamma^s_{ip}\Gamma^t_{lk})
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Если считать, что пространство, занимаемое деформированным телом, является евклидовым, то следует принять $R^e_{ilkp} = 0$. В результате получается шесть уравнений совместности деформаций, которые были выведены таким способом в [13]. Заметим, что обсуждаемая геометрическая интерпретация уравнений совместности деформаций упоминается в [1], а в курсе [14] эти уравнения ассоциируются с условиями приводимости квадратичной формы, определяющей метрику деформированной среды, к канонической форме.

Выразим правую часть равенства (3.2) через функции напряжений. Для этого заменим деформации через напряжения с помощью закона Гука $e_{ij} = C_{ijkl}\tau^{kl}$, а напряжения — через функции напряжений в соответствии с равенствами (2.14). Учитывая; что $c\varepsilon = 2$, представим результат в следующей символической форме

$$R^e_{ijkl} = 2L_{ijkl}(\varphi_{mn}) \tag{3.3}$$

где L — некоторый линейный дифференциальный оператор. Из изложенного выше следует, что уравнения совместности деформаций, записанные через функции напряжений, имеют вид

$$L_{ijkl}(\varphi_{mn}) = 0 \tag{3.4}$$

Всего существует шесть независимых уравнений такого типа [13].

4. Постановка задачи теории упругости в напряжениях. Предварительно рассмотрим постановку задачи в перемещениях, которая допускает однозначное толкование. Как известно, такая задача сводится к системе трех уравнений равновесия, записанных через перемещения и определяющих три функции перемещений $u_i(x^1, x^2, x^3)$. Подстановка этих перемещений в геометрические соотношения позволяет получить деформации, которые тождественно удовлетворяют уравнениям совместности деформаций. В результате соотношения (3.2) дают $R^e_{ijkl} \equiv 0$, т. е. классическая постановка задачи теории упругости предполагает, что деформированная среда обладает евклидовой метрикой.

Вернемся теперь к задаче, сформулированной в напряжениях. Учитывая, что соотношения, полученные в п. 2 и 3, являются линейными, воспользуемся принципом суперпозиции и представим тензор кривизны, порождаемый напряженно-деформированным состоянием тела, в виде

$$R_{ijkl} = R^{\tau}_{ijkl} + R^e_{ijkl} = R^0_{ijkl}(\varepsilon\varphi) + 2L_{ijkl}(\varphi_{mn})$$

Правая часть этого соотношения записана с помощью равенств (2.16) и (3.3). Так как $\varepsilon \to 0$, то первое слагаемое можно отбросить. Тогда уравнения (3.4) дают $R_{ijkl} \equiv 0$, что, как было отмечено, соответствует классической постановке задачи теории упругости. Последняя сводится таким образом к системе уравнений совместности деформаций (3.4) относительно тензора функций напряжений.

Как уже отмечалось в заключительной части п. 1, существует некоторый вектор с компонентами u_i, с помощью которого можно управлять формой соотношений, связывающих напряжения с функциями напряжений в декартовых координатах. Используем аналогичную возможность в общем случае и введем метрический тензор $g'_{ij} = \nabla_j u_j + \nabla_j u_i$, где u_i— произвольный вектор. Как известно, для пространства с такими метрическими свойствами тензор кривизны тождественно равен нулю, т. е. замена в соотношении (2.12) φ_{ij} на $\varphi_{ij} + g'_{ij}$ не изменяет R^0_{ik}, а следовательно, не изменяет и равенства (2.14). Таким образом, если φ_{ij} является тензором функций напряжений, то $\varphi_{ij} + g'_{ij}$ также является таким тензором. Поскольку u_i являются компонентами произвольного вектора, отсюда следует, что на функции φ_{ij} можно наложить три условия, из которых при необходимости можно найти u_i. Для того, чтобы ввести эти условия, преобразуем общее выражение для тензора Риччи, аналогичное равенству (2.12), т. е.

$$\begin{aligned}
R^0_{ik} &= \tfrac{1}{2}\varepsilon g^{lp}_0 (\nabla_l\nabla_k\varphi_{ip} + \nabla_i\nabla_p\varphi_{lk} - \nabla_l\nabla_p\varphi_{ik} - \nabla_i\nabla_k\varphi_{lp}) = \\
&= \tfrac{1}{2}\varepsilon\, [g^{lp}_0 (\nabla_l\nabla_k\varphi_{ip} + \nabla_i\nabla_p\varphi_{lk} - \nabla_l\nabla_p\varphi_{ik}) - \nabla_i\nabla_k\varphi] = \\
&= \tfrac{1}{2}\varepsilon\, [(\nabla^p\nabla_k\varphi_{ip} - \tfrac{1}{2}\nabla_i\nabla_k\varphi) + (\nabla_i\nabla^l\varphi_{kl} - \tfrac{1}{2}\nabla_i\nabla_k\varphi) - g^{lp}_0\nabla_l\nabla_p\varphi_{ik}] = \\
&= \tfrac{1}{2}\varepsilon\, [\nabla_k\nabla^p (\varphi_{ip} - \tfrac{1}{2}g^0_{ip}\varphi) + \nabla_i\nabla^l (\varphi_{kl} - \tfrac{1}{2}g^0_{kl}\varphi) - g^{lp}_0\nabla_l\nabla_p\varphi_{ik}]
\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\varphi = g^{lp}_0\varphi_{lp}, \quad \nabla^p = g^{pi}_0\nabla_i$$

Теперь наложим на функции φ_{ik} следующие три условия

$$\nabla^p (\varphi_{ip} - \tfrac{1}{2}g^0_{ip}\varphi) = 0 \qquad (4.2)$$

Тогда равенство (4.1) упрощается и принимает вид

$$R^0_{ik} = -\tfrac{1}{2}\varepsilon g^{lp}_0 \nabla_l \nabla_p \varphi_{ik} \qquad (4.3)$$

Подставляя кривизны (4.3) в соотношение (2.14) для напряжений, получим

$$\tau_{ij} = -\tfrac{1}{2}c\varepsilon g^{lp}_0 \nabla_l \nabla_p \psi_{ij} \qquad (4.4)$$

$$\psi_{ij} = \varphi_{ij} - \tfrac{1}{2}g^0_{ij}\varphi \qquad (4.5)$$

Таким образом, каждая составляющая тензора напряжений τ_{ij} выражается через соответствующую составляющую тензора функций напряжений ψ_{ij}, которые связаны следующими тремя условиями, вытекающими из равенств (4.2) и (4.5):

$$\nabla^k \psi_{ik} = 0 \qquad (4.6)$$

Введение функций напряжений согласно равенствам (4.4) позволяет в некоторых случаях упростить решение задачи по сравнению с решением в традиционной постановке.

В декартовых координатах соотношения (4.4) и (4.6) принимают вид

$$\sigma_{ij} = -\tfrac{1}{2}c\varepsilon\Delta\psi_{ij}, \quad \psi_{ij,j} = 0$$

т. е. напряжения выражаются через функции напряжений с помощью гармонического оператора.

Следует отметить, что преобразование, аналогичное рассмотренному выше и называемое калибровочным преобразованием, широко используется в электродинамике для упрощения уравнений [15, 16].

Таким образом, рассмотренный выше геометрический подход подтверждает сделанный в [7] вывод, согласно которому задача теории упругости, сформулированная в напряжениях, сводится к системе шести уравнений совместности деформаций, включающей в качестве неизвестных шесть функций напряжений. Однако возможно, что этот вывод не является окончательным. Отметим в связи с этим работу [17], в которой задача формально сводится также к шести уравнениям, которые являются линейными комбинациями уравнений совместности и уравнений равновесия и включают в качестве неизвестных компоненты тензора напряжений.

Работа выполнена при поддержке Международного Научного Фонда (MQN000).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Треффц Е.* Математическая теория упругости. Л.— М.: Государственное технико-теоретическое издательство. 1932. 148 с.
2. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979, 744 с.
3. *Маковенко С. Я.* Решение пространственных задач линейной и нелинейной теории упругости в напряжениях или деформациях: Автореф. дис. д-ра техн. наук: М., ЦНИИСК. 1990. 37 с.
4. *Зубчанинов В. Г.* Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1990, 368 с.
5. *Allen D. H., Haisler W. E.* Introduction to aerospace structural analysis. New York: John Wiley and Sons. 1985. 507 p.
6. *Блох В. И.* Теория упругости. Харьков: Издательство Харьковского государственного университета. 1964. 483 с.
7. *Крутков Ю. А.* Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости. М.— Л.: Издательство Академии Наук СССР. 1949, 199 с.
8. *Синг Д.* Общая теория относительности. М.: Издательство иностранной литературы. 1963, 423 с.

9. *Кильчевский Н. А.* Основы тензорного исчисления с приложениями к механике. Киев: Наук. думка, 1972. 148 с.
10. *Васильев В. В.* Напряженное состояние твердых тел и некоторые геометрические эффекты // Изв. АН. МТТ. 1989. № 5. С. 30—34.
11. *Кильчевская Е. Н., Кильчевский Н. А.* Функции кинетических напряжений и геометрия пространства в деформированном континууме // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука, 1972. С. 243—250.
12. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1976. 664 с.
13. *Власов В. З.* Уравнения неразрывности деформаций в криволинейных координатах // Избранные труды. М.: 1962. Т. 1. 528 с.
14. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.— Л.: 1935. 674 с.
15. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэнус М.* Фейнмановские лекции по физике. Вып. 5. Электричество и магнетизм. М.: Мир. 1977. 302 с.
16. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука. 1988. 512 с.
17. *Победря Б. Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Издательство Московского университета. 1981. 343 с.

Москва

Поступила в редакцию
9.II.1995