МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1996

УДК 531.8

 Д. Ю. СКУБОВ, К. Ш. ХОДЖАЕВ

СИСТЕМЫ С МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ГАСИТЕЛЯМИ КОЛЕБАНИЙ

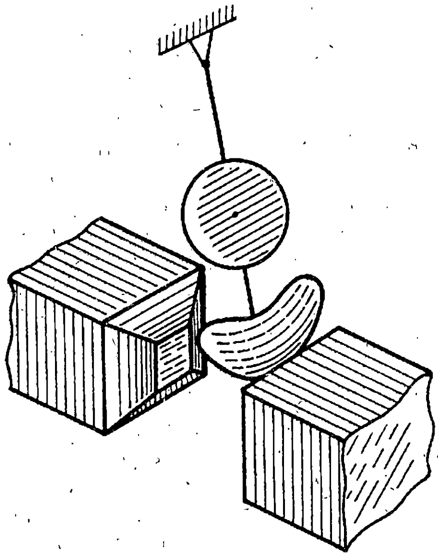
Составлены уравнения Лагранжа — Максвелла, описывающие системы с магнитоэлектрическими гасителями колебаний. Рассмотрено влияние магнитоэлектрических гасителей на устойчивость равновесия. Полученные результаты заменяют для систем с магнитоэлектрическими гасителями теоремы Томсона и Тета, позволяющие судить о влиянии на устойчивость равновесия сил вязкого трения. Решены задачи о параметрической оптимизации системы, состоящей из линейного осциллятора и одноконтурного гасителя. Показано, что известные уравнения качаний ротора синхронной электрической машины можно преобразовать так, чтобы они совпали с уравнениями движения маятника с гасителями. Это позволяет, основываясь на лагранжевой структуре уравнений, упростить доказательство известных фактов, относящихся к свойствам нестационарных процессов в синхронных машинах. Установлено, что при любых движениях маятника токи в гасителях ограничены и существуют движения с неограниченной угловой скоростью. Этого не может быть, если заменить действие магнитоэлектрических гасителей силами вязкого трения, пропорциональными угловой скорости маятника.

1. Устойчивость равновесия. Магнитоэлектрический гаситель колебаний (фиг. 1) содержит один или несколько короткозамкнутых проводящих контуров или массивных проводящих тел, движущихся в постоянном во времени магнитном поле. Проводники являются одновременно элементами колебательной системы. При движении проводников в магнитном поле в них наводятся токи Фуко и возникают механические силы, действующие на проводники и препятствующие их колебаниям и колебаниям всей системы.

Недостаток таких гасителей — во время их работы необходимо поддерживать токи, создающие постоянное магнитное поле. Но магнитоэлектрические гасители все же применяются в технике, поскольку обладают рядом преимуществ по сравнению с демпферами вязкого трения. В частности, демпфирующие свойства магнитоэлектрического гасителя сравнительно легко изменять, увеличивая или уменьшая величину постоянного магнитного поля. Фактически тот же способ гашения колебаний (качаний ротора) используется в синхронных электрических машинах. Хотя исходные уравнения машины отличны от уравнений систем с магнитоэлектрическими гасителями, упрощенные уравнения качаний ротора, получающиеся [1] из исходных с помощью асимптотического метода разделения движений, можно записать в виде уравнений системы с гасителями (см. п. 3).

Изучено много задач о движении систем, в которых действуют силы вязкого трения. Аналогичные задачи можно поставить, заменив силы вязкого трения действием магнитоэлектрических гасителей. Рассмотрим вначале их влияние на устойчивость равновесия.

Обозначим через $q_1,\dots,q_n$ обобщенные координаты колебательной системы, а через $i_1,\dots,i_m$ — токи в контурах гасителей. Векторная форма записи не применяется, чтобы избежать нестандартизированных операций с трехиндексными матрицами. Число гасителей, связанных с колебательной системой, число контуров в каждом гасителе и к какому именно гасителю относятся те или иные токи



Фиг. 1

здесь несущественно. Если гасители содержат объемные проводники (массивные проводящие тела), будет $m = \infty$. Последующее, по крайней мере, формально охватывает и этот случай; дискретная форма уравнений электромеханики для объемных проводников приведена в [2]. Связи в колебательной системе считаются голономными и стационарными.

Выражения кинетической энергии T и энергии магнитного поля будут

$$T = \frac{1}{2}\sum_{r,s}^{n} a_{rs}\dot{q}_r\dot{q}_s, \quad W = W_1 + W_2 + W_3 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j,k}^{m} L_{jk}i_j i_k + \sum_{k}^{m}\sum_{l}^{p} M_{kl}i_k J_l + \frac{1}{2}\sum_{l,g}^{p} L_{0lg}J_l J_g \qquad (1.1)$$

Здесь $a_{rs} = a_{rs}(q_1, \ldots, q_n)$ — инерционные коэффициенты, $L_{jk} = \mathrm{const}$ — коэффициенты само- и взаимной индукции контуров токов $i_1,\ldots i_m$; $J_1,\ldots,J_p$ — токи, создающие постоянное поле в гасителях, $M_{kl} = M_{kl}(q_1,\ldots,q_n)$ — коэффициенты взаимной индукции между контурами токов i_k и J_l. Считается, что взаимное расположение проводящих контуров в одном гасителе при колебаниях не меняется, а контуры в разных гасителях магнитно не связаны. Этому соответствует условие $L_{jk} = \mathrm{const}$. Токи J_l предполагаются заданными и постоянными, т. е. не учитывается влияние изменения M_{kl} и i_k на J_l. Соответственно, считается $L_{0lg} = \mathrm{const}$, так что член W_3 в выражении W вообще несущественен. Эти предположения обычны для реальных технических устройств.

Механические обобщенные силы считаем потенциальными, а электрические — падениями напряжения на активных сопротивлениях проводящих контуров. Обозначив через $\Pi = \Pi(q_1,\ldots,q_n)$ потенциальную энергию, а через R_{jk} сопротивления и взаимные сопротивления контуров токов $i_1,\ldots,i_m$, запишем уравнения Лагранжа — Максвелла

$$\sum_{j}^{m}(L_{jk}i_j^{\cdot} + R_{jk}i_j) + \sum_{r}^{n}\sum_{l}^{p} J_l\frac{\partial M_{kl}}{\partial q_r}\dot{q}_r = 0 \quad (k = 1, \ldots, m)$$

$$\sum_{s}^{n}(a_{rs}q_s^{\cdot})^{\cdot} - \frac{1}{2}\sum_{f,s}^{n}\frac{\partial a_{fs}}{\partial q_r}q_f^{\cdot}q_s^{\cdot} - \sum_{k}^{m}\sum_{l}^{p} J_l\frac{\partial M_{kl}}{\partial q_r}i_k + \frac{\partial \Pi}{\partial q_r} = 0 \quad (r = 1, \ldots, n) \qquad (1.2)$$

Здесь члены

$$\sum_r^n \sum_l^p J_l \frac{\partial M_{kl}}{\partial q_r} q_r^{\cdot}, \quad -\sum_k^m \sum_l^p J_l \frac{\partial M_{kl}}{\partial q_r} i_k$$

описывают соответственно эдс движения и пондеромоторные силы. Поскольку токи аналогичны обобщенным скоростям, а энергия магнитного поля — кинетической энергии, то эти члены, обусловленные слагаемым W_2 в выражении W, линейным по токам $i_1,\dots,i_m$, аналогичны выражениям для гироскопических сил. Рассматриваемые члены связывают подсистему в (1.2), описывающую механические движения, с подсистемой, описывающей токи. Диссипации же в единой системе соответствуют только члены $R_{jk}i_j$.

В положении равновесия $i_1,\dots,i_m = 0$, $q_1,\dots,q_n = \text{const}$, $\partial\Pi/\partial q_r = 0$ $(r = 1,\dots,n)$.

Рассматривая устойчивость равновесия по отношению к переменным q_r, $q_r^{\cdot}$, i_k $(r = 1,\dots,n;\ k = 1,\dots,m)$ в системе с гасителями, будем считать, что об устойчивости или неустойчивости равновесия в недемпфированной системе можно судить по членам второго порядка в разложении Π вблизи равновесия. Большей общности можно достичь, если применить вместо приводимых ниже рассуждений теоремы Красовского. Но тогда возникает трудно проверяемый аналог указанных ниже равенств, специфических для данных систем. Матрица R_{jk} предполагается положительно определенной.

Пусть в некотором положении равновесия $q_1 = q_{10},\dots,q_n = q_{n0}$. Введем возмущения $u_r = q_r - q_{r0}$ $(r = 1,\dots,n)$ и выразим в (1.2) переменные q_r, $q_r^{\cdot}$ через u_r, $u_r^{\cdot}$. Получим уравнения возмущенного движения. Для них справедливо энергетическое соотношение

$$\Big(\sum_{r,s}^n a_{rs}(u_1 + q_{10}, \dots, u_n + q_{n0})\, u_r^{\cdot} u_s^{\cdot} + W_1 + \\ + \Pi(u_1 + q_{10}, \dots, u_n + q_{n0})\Big)^{\cdot} = -\sum_{j,k}^m R_{jk} i_j i_k \tag{1.3}$$

Если удержать в уравнениях возмущенного движения только члены, линейные по неизвестным, придем к уравнениям в вариациях (уравнениям первого приближения). Сохраняя в этих уравнениях те же обозначения для неизвестных, что и в уравнениях возмущенного движения, будем иметь

$$\sum_j^m (L_{jk} i_j^{\cdot} + R_{jk} i_j) + \sum_r^n \Gamma_{kr} u_r^{\cdot} = 0 \quad (k = 1, \dots, m)$$

$$\sum_s^n (A_{rs} u_s^{\cdot\cdot} + C_{rs} u_s) - \sum_k^m \Gamma_{kr} i_k = 0 \quad (r = 1, \dots, n) \tag{1.4}$$

Здесь индекс (0) означает подстановку $q_1 = q_{10},\dots,q_n = q_{n0}$:

$$A_{rs} = a_{rs}(q_{10}, \dots, q_{n0}), \quad C_{rs} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_r \partial q_s}\right)_0, \quad \Gamma_{kr} = \sum_l^p J_l \left(\frac{\partial M_{kl}}{\partial q_r}\right)_0 \tag{1.5}$$

Для системы (1.4) справедливо соотношение

$$(\Delta T + \Delta W + \Delta\Pi)^{\cdot} = -2\Delta\Phi \tag{1.6}$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}\sum_{r,s}^n A_{rs} u_r^{\cdot} u_s^{\cdot}, \quad \Delta W = \frac{1}{2}\sum_{j,k}^m L_{jk} i_j i_k$$

$$\Delta\Pi = \frac{1}{2}\sum_{r,s}^n C_{rs} u_r u_s, \quad \Delta\Phi = \frac{1}{2}\sum_{j,k}^m R_{jk} i_j i_k \tag{1.7}$$

1. Пусть равновесие в недемпфированной системе устойчиво и ни одно частное решение $w_1(t),\ldots,w_n(t)$ системы

$$\sum_s^n (A_{rs}w_s^{\cdot\cdot} + C_{rs}w_s) = 0 \ (r = 1, \ldots, n) \qquad (1.8)$$

не удовлетворяет одновременно m равенствам

$$\sum_r^n \Gamma_{kr}w_r^{\cdot} \equiv 0 \ (k = 1, \ldots, m) \qquad (1.9)$$

Тогда равновесие в системе с гасителями асимптотически устойчиво.

Покажем сначала, что оно просто устойчиво. Поскольку устойчивость равновесия в недемпфированной системе определяется членами второго порядка в разложении П, то матрица C_{rs} — положительно-определенная и существуют такие $\delta_1,\ldots,\delta_n$, что при $|u_r| < \delta_r$, $u_r \neq 0$ $(r = 1, \ldots, n)$ будет $\Pi > 0$. При таких u_r и любых $u_r^{\cdot}$, i_k функция под знаком производной в левой части (1.3) положительно-определенная. Функция в правой части — отрицательная. Отсюда и из соответствующей теоремы Ляпунова следует устойчивость.

При устойчивости равновесия полную совокупность линейно независимых частных решений уравнений в вариациях можно составить из решений трех типов затухающих, описывающих гармонические колебания и представляющих собой набор постоянных. Последнего при положительно-определенных матрицах R_{jk} и C_{rs} не может быть. Колебательные решения, в которых $i_j \not\equiv 0$ хотя бы для одного j не могут удовлетворять соотношению (1.6). Решений же, когда все $i_j \equiv 0$, также не может быть, поскольку решения системы (1.8) не удовлетворяют равенствам (1.9). Остается, что все решения системы (1.4) затухающие, т. е. устойчивость асимптотическая.

Но если равенства (1.9) для какого-нибудь решения системы (1.8) выполняются, то уравнения в вариациях (1.4) допускают частное решение, в котором все $i_j \equiv 0$, а $u_r(t)$ описывают это частное решение системы (1.8). Тогда устойчивость не будет асимптотической.

Равенства (1.9) означают, что возможны колебания недемпфированной системы, при которых в контурах гасителей не наводятся э.д.с. движения. Узнать, есть ли такие колебания или нет, обычно нетрудно. В более сложных случаях может быть полезна другая форма равенств (1.9). Обозначим через $U_1^{(\beta)},\ldots,U_n^{(\beta)}$ $(\beta = 1,\ldots,n)$ собственные формы системы (1.7). Для асимптотической устойчивости ни одна форма не должна удовлетворять одновременно m равенствам

$$\sum_r^n \Gamma_{kr}U_r^{(\beta)} = 0 \qquad (1.10)$$

Для систем с вязким трением существует общее (справедливое независимо от того, каковы собственные формы недемпфированной системы) условие асимптотической устойчивости равновесия — положительная определенность матрицы коэффициентов трения. Аналога этому для систем с магнитоэлектрическими гасителями нет. Приведенное выше утверждение аналогично следующему утверждению для систем с вязким трением: пусть матрица коэффициентов трения неотрицательна и формы колебаний недемпфированной системы не совпадают с собственными векторами этой матрицы, отвечающими нулевым собственным числам. Тогда устойчивость равновесия асимптотическая.

2. Пусть равновесие недемпфированной системы неустойчиво. Тогда неустойчиво и равновесие в системе с гасителями.

Поскольку неустойчивость определяется членами второго порядка в разложении П, то можно выбрать такие $u_{10},\ldots,u_{n0}$, что $\Delta\Pi(u_{10},\ldots,u_{n0}) < 0$. Рассмотрим решение системы (1.3) с начальными условиями $u_r(t_0) = u_{r0}$, $u_r^{\cdot}(t_0) = 0$; $i_j(t_0) = 0$ $(r = 1,...,n;$ $j = 1,...,m)$. Такое решение не может быть затухающим (когда все $u_r \to 0$, $u_r^{\cdot} \to 0$, $i_j \to 0$ или $i_j \equiv 0$), поскольку из (1.5) следует, что $\Delta T + \Delta W + \Delta\Pi \leq$ $\leq \Delta\Pi\,(u_{10}, \ldots, u_{n0}) < 0$, а в затухающем решении $\Delta T + \Delta W + \Delta\Pi \to 0$.

Допустим, что в рассматриваемом решении системы (1.4) не все $i_j \equiv 0$. Тогда $u_r(t)$ $(r = 1,...,n)$ не удовлетворяют m равенствам

$$\sum_r^n \Gamma_{kr} u_r^{\cdot} \equiv 0 \tag{1.11}$$

иначе $u_u^{\cdot}$ не входили бы в первые m уравнений (1.4) и при $i_j(t_0) = 0$ $(j = 1,...,m)$ было бы, что все $i_j \equiv 0$. Следовательно, если $u_r(t)$ описывают незатухающие колебания или суперпозицию незатухающих колебаний и затухающих движений, то хотя бы одно $i_j(t)$ содержит незатухающую компоненту. Такой набор $u_r(t)$, $i_j(t)$ не может быть решением системы (1.4), так как он не удовлетворяет соотношению (1.6). Остается, что рассматриваемое решение неограниченное, а равновесие неустойчиво.

Если же в этом решении все $i_j \equiv 0$, то $u_r(t)$ изменяются в соответствии с одним из частных решений системы (1.8). Но любое ее решение, удовлетворяющее условию $\Delta\Pi(t_0) < 0$, неограниченное. Следовательно, при принятых начальных условиях решение системы (1.3) неограниченное независимо от того, будет ли $i_j \equiv 0$ или нет, а равновесие системы с гасителями неустойчиво.

Рассмотрим еще случай, когда одна группа уравнений в вариациях содержит члены, описывающие «чисто механические» гироскопические силы и имеет вид

$$\sum_s^n (A_{rs} u_s^{\cdot\cdot} + G_{rs} u_s^{\cdot} + C_{rs} u_s) - \sum_k^m \Gamma_{kr} i_k = 0$$

$$G_{rs} = -G_{sr} \tag{1.12}$$

Другая группа уравнений в вариациях та же, что первые уравнения в (1.4). Такие уравнения могут появиться, если связи в колебательной системе нестационарные, но выражение кинетической энергии не содержит времени явно. Коэффициенты C_{rs}, при этом получаются из разности $\Pi - T_0$, где T_0 — член в выражении кинетической энергии, не зависящей от обобщенных скоростей. Уравнения (1.12) возникают также в случае, когда механическая система содержит циклические координаты, и исследуются равновесия в позиционной подсистеме при фиксированных циклических импульсах. Вместо второй группы уравнений Лагранжа в (1.2) в этом случае войдут уравнения Рауса, которые могут содержать гироскопические члены.

3. Пусть равновесие линейной системы, описываемое уравнениями в вариациях для системы без гасителей

$$\sum_s^n (A_{rs} w_s^{\cdot\cdot} + G_{rs} w_s^{\cdot} + C_{rs} w_s) = 0 \quad (r = 1, \ldots; n) \tag{1.13}$$

обладает временной устойчивостью, и ни одно частное решение уравнений (1.13) не удовлетворяет m равенствам (1.9). Тогда равновесие в системе с гасителями неустойчиво.

Выберем начальные условия решения уравнений в вариациях для системы с гасителями так же, как в случае неустойчивого равновесия недемпфированной системы. Неравенство $\Delta\Pi < 0$ при временной устойчивости возможно, а соотношение (1.6) сохраняется. В рассматриваемом решении не все $i_j \equiv 0$, так как при $i_j \equiv 0$ $(j = 1,...,m)$ входящие в него $u_r(t)$ совпадают с решениями системы (1.13), а последние не удовлетворяют равенствам (1.9), необходимым, чтобы было $i_j \equiv 0$. Неустойчивость равновесия в системе с гасителями далее устанавливается тем же путем, что и при неустойчивости равновесия недемпфированной системы, только исключается случай $i_j \equiv 0$.

Но если равенства (1.9) могут быть выполнены, то может оказаться, что им удовлетворяют все частные решения системы (1.13), для которых возможно неравенство $\Delta\Pi < 0$. Тогда гасители не разрушают временную устойчивость, но и не гасят колебания. Погасить колебания гироскопически стабилизированной системы, не разрушая устойчивости, магнитоэлектрическими гасителями так же невозможно, как и с помощью демпферов вязкого трения.

2. Оптимальные параметры магнитоэлектрического гасителя малых колебаний системы с одной степенью свободы. Рассмотрим задачу об оптимальном выборе параметров гасителя с одним контурным током, предназначенного для гашения малых колебаний системы с одной степенью свободы. Уравнения малых колебаний в этом случае получаются из уравнений первого приближения (1.4) при $m = 1$, $n = 1$:

$$Li^{\cdot} + \Gamma u^{\cdot} + Ri = 0$$

$$Au^{\cdot\cdot} - \Gamma i + Cu = 0 \tag{2.1}$$

Здесь $C > 0$, поскольку равновесие недемпфированной системы должно быть устойчиво, знак Γ несуществен, остальные коэффициенты положительны согласно п.1.

Пусть все параметры кроме R заданы. При очень малых значениях R или при $R = \infty$ (разомкнутый контур) гаситель, очевидно, неэффективен. То же будет, если заданы все параметры кроме Γ и $\Gamma = 0$. При достаточно больших значениях гаситель также неэффективен по той же причине, что и демпфер вязкого трения с очень большим коэффициентом демпфирования. Поэтому задача об оптимальном выборе Γ при фиксированных значениях прочих параметров при разумном выборе критерия оптимальности имеет решение; то же относится и к выбору R. Далее оптимальными считаются значения параметров, соответствующие максимальной степени устойчивости, т. е. максимальной величине модуля вещественной части того корня характеристического уравнения, который расположен ближе к мнимой оси, чем остальные корни. Это — часто применяемый критерий оптимальности (см., например, [3]).

Полагая в (2.1) переменные u, i пропорциональными $\exp \lambda t$, получим характеристическое уравнение

$$AL\lambda^3 + AR\lambda^2 + (C\Gamma + \Gamma^2)\lambda + RC = 0 \tag{2.2}$$

Корни его, как показано в п.1, либо отрицательны, либо имеют отрицательные вещественные части; это легко проверить и непосредственно, составив определители Гурвица.

Считая параметры колебательной системы заданными, введем в (2.2) новое неизвестное $\mu = \lambda/\Omega$, $\Omega^2 = C/A$ и запишем уравнение относительно μ

$$\mu^3 + \rho\mu^2 + \gamma\mu + \rho = 0 \tag{2.3}$$

Оно содержит два независимых параметра

$$\rho = R/(L\Omega), \quad \gamma = 1 + \Gamma^2/(CL) \tag{2.4}$$

Рассмотрим сначала задачу об оптимальном выборе одновременно обоих параметров γ и ρ (кстати, из предыдущего не следует, что она имеет решение). При двух выбираемых параметрах три коэффициента уравнения (2.3) должны быть связаны соотношением, не содержащим параметров. Оно очевидно: второй коэффициент равен свободному члену. Отсюда получается соотношение между корнями $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \mu_1\mu_2\mu_3$. Следовательно, нужно выбрать μ_1, μ_2, μ_3, удовлетворяющие этому соотношению и условию оптимальности; затем найдутся коэффициенты в (2.3). Такой выбор нужно произвести дважды: когда корни вещественные и когда один корень вещественный, а два комплексно сопряженные. После этого нужно выбрать лучший вариант.

Пусть корни вещественные. Выразим один корень через два других $\mu_3 = (\mu_1 + \mu_2)/(\mu_1\mu_2 - 1)$. Производные $\partial\mu_3/\partial\mu_1$, $\partial\mu_3/\partial\mu_2$ там, где они существуют — отрицательные. Отсюда сразу следует, что оптимальное решение «на вещественных корнях» отвечает трехкратному корню $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = -\sqrt{3}$ и значениям параметров $\rho = 3\sqrt{3}$, $\gamma = \mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1 = 9$. Действительно, выбирая μ_1 и μ_2 меньше $-\sqrt{3}$, получим $\mu_3 > -\sqrt{3}$.

Пусть теперь имеется один вещественный корень μ_3 и два комплексно-сопряженных $\mu_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. Выразим μ_3 через α, β получим $\mu_3 = 2\alpha/(\alpha^2 + \beta^2 - 1)$. Числа α, $\mu_3(\alpha, \beta = 0)$ соответствуют не меньшей степени устойчивости, чем числа α, $\mu_3(\alpha, \beta)$ при любом $\beta \neq 0$. Поэтому оптимальное решение следует искать при $\beta = 0$, что вновь приводит к уже рассмотренному случаю трех вещественных корней. Впрочем, можно использовать и соотношение $\mu_3 = 2\alpha/(\alpha^2 - 1)$, где $\alpha < -1$. Производная $\partial\mu_3/\partial\alpha$ отрицательна, что сразу дает $\mu_3 = \alpha = -\sqrt{3}$.

Представляет также интерес задача об оптимальном выборе γ при фиксированных значениях ρ; к ней сводится выбор оптимальной величины тока, создающего постоянное магнитное поле при заданных параметрах контура.

В этом случае корни уравнения (2.3) удовлетворяют двум соотношениям, не содержащим выбираемого параметра γ. Если один корень μ_3 вещественный, а два остальных комплексно-сопряженные $\mu_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, эти соотношения имеют вид $2\alpha + \mu_3 = -\rho$, $\mu_3(\alpha^2 + \beta^2) = -\rho$. Выберем оптимальные значения α и μ_3, удовлетворяющие только первому соотношению. Решение этой задачи очевидно: $\alpha = \mu_3 = -\rho/3$. Если теперь из второго соотношения при найденных α и μ_3 можно определить $\beta^2 > 0$, то эти значения α, μ_3, β, соответствуют оптимальному решению полной задачи. Условие $\beta^2 > 0$ дает $\rho < 3\sqrt{3}$. При таких значениях ρ оптимальная величина $\gamma = 2\rho^2/9 + 3$. При $\rho = 3\sqrt{3}$ оптимальным будет решение, соответствующее трехкратному корню, как в случае оптимального выбора γ и ρ.

Пусть $\rho > 3\sqrt{3}$. Из двух соотношений, связывающих μ_3, α и β^2 получается соотношение между β^2 и α:

$$\beta^2 = (\rho - \rho\alpha^2 - 2\alpha^3)/(\rho + 2\alpha) \tag{2.5}$$

Задав β^2, из (2.5) можно найти α, а затем $\mu_3 = -\rho - 2\alpha$. При достаточно больших β^2 уравнение (2.5) имеет единственное решение $\alpha = \alpha_1(\beta^2)$, причем $-\rho/2 < \alpha_1 < -\rho/3$, $\mu_3(\alpha_1) > \alpha_1$; в этом легко убедиться, если изобразить качественно зависимость правой части уравнения (2.5) от α и учесть, что при $\alpha = -\rho/3$, $\rho > 3\sqrt{3}$ получается $\beta^2 < 0$. При уменьшении β^2 у уравнения (2.5) появляются два других корня α_2, α_3, таких, что $-\rho/3 < \alpha_2 < 0$, $\alpha_3 > 0$, $\mu_3(\alpha_2) < \alpha_2$. Если выбирать все меньшие значения β^2 вплоть до $\beta^2 = 0$, то значения α_1 увеличиваются, а μ_1 уменьшаются, так что выбор $\beta^2 = 0$ дает лучшее значение критерия оптимальности $|\mu_3| = \rho + 2\alpha_1(0)$, чем выбор любого другого значения β^2. Значения же α_2 при уменьшении β^2 уменьшаются, и лучшее значение критерия оптимальности, равное в этом случае $|\alpha_2|$, также получается при $\beta^2 = 0$.

Остается сравнить два значения $\mu_3 = -\rho - 2\alpha_1(0)$ и $\alpha_2(0)$. Покажем, что

$\alpha_2(0) < -\rho - 2\alpha_1(0)$. Рассматриваемые значения α являются корнями уравнения $\rho - \rho\alpha^2 - 2\alpha^3 = 0$ и удовлетворяют соотношениям $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = 0$, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \rho/2$. Из уравнения следует, что $-\rho - 2\alpha_1 = -\rho/\alpha_1^2$. Используя второе соотношение между корнями приведем доказываемое неравенство к виду $\alpha_1 < -2\alpha_3$. Внося сюда выражение $\alpha_3 = -\alpha_1\alpha_2/(\alpha_1 + \alpha_2)$, получающееся из первого соотношения, после простых преобразований придем к очевидному неравенству $\alpha_1 < \alpha_2$.

Таким образом, максимальная степень устойчивости в рассматриваемом случае равна $|\alpha_2(\rho)|$, где α_2 — больший отрицательный корень уравнения $Q(\alpha, \rho) = \alpha^3 + (\rho/2)\alpha^2 - \rho/2 = 0$. Для исходного уравнения (2.3) этот корень кратный и, следовательно, является корнем производной полинома в левой части (2.3). Отсюда определяется оптимальное значение $\gamma = -3\alpha_2^2 - 2\rho\alpha_2$.

Анализ случая, когда корни уравнения (2.3) вещественные, не изменяет вывода, что найденные выше значения степени устойчивости и γ оптимальные, и здесь не приводятся.

Укажем некоторые свойства зависимости α_2 от ρ. При $\alpha = -1$ имеем $Q < 0$, $\partial Q/\partial\alpha < 0$. Зная расположение корней $Q(\alpha, \rho)$, заключаем, что $\alpha_2 < -1$ при всех $\rho > 3\sqrt{3}$. Очевидно также, что $\alpha_2 \to -1$ при $\rho \to \infty$. Дифференцируя $Q(\alpha, \rho)$ по ρ с учетом того, что α — функция ρ, получим, что $\partial\alpha_2/\partial\rho = 0$ при $\alpha_2 = -1$. Но так как значение $\alpha_2 = -1$ не достигается, то α_2 — монотонно возрастает с ростом ρ от $\alpha_2 = -\sqrt{3}$ при $\rho = 3\sqrt{3}$.

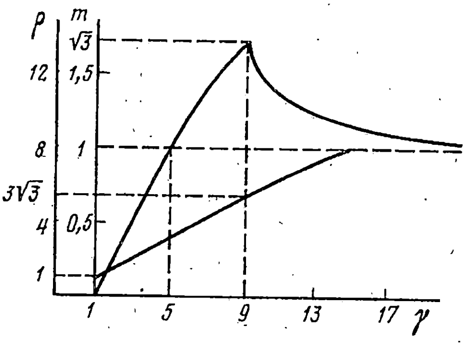
Таким образом, непосредственно показано следующее. Определенная в этой задаче наибольшая по γ при фиксированных значениях ρ степень устойчивости достигает наибольшего значения по ρ, равного тому значению, которое достигается при оптимизации по γ и ρ одновременно. Вопрос, при каких условиях такое совпадение следует из того, что последнее значение существует (конечно, применительно к более общим задачам), заслуживает отдельного рассмотрения.

Зная качественно зависимость $\alpha_2(\rho)$, легко исследовать зависимость $\gamma(\rho)$. Получается, что $\gamma(\rho)$ — монотонно возрастающая функция ρ и $9 \le \gamma < \infty$ при $3\sqrt{3} \le \rho < \infty$.

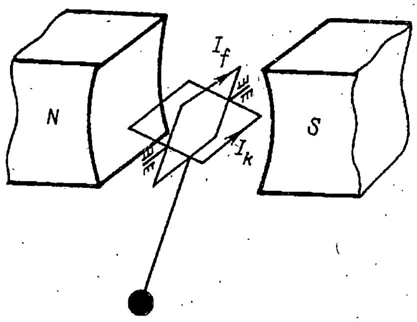
Третья возможная задача — оптимальный выбор ρ при фиксированных значениях γ и определение максимальной степени устойчивости как функции γ. Не излагая здесь ее полное решение, укажем два самых простых случая и приведем окончательный численный результат. Как и в предыдущей задаче, имеем два соотношения между корнями, не содержащих выбираемого параметра. Они имеют вид $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \mu_1\mu_2\mu_3$, $\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1 = \gamma$. При $1 \le \gamma \le 9$ оптимальное решение соответствует случаю, когда $\mu_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, μ_3 — вещественное число. Если $1 \le \gamma \le 5$, то $\alpha \ge \mu_3$ и максимальная степень устойчивости $|\alpha| = (\gamma - 1)/4$ достигается при $\rho = (\gamma + 1)/2$. Если же $5 \le \gamma \le 9$, то $|\alpha| = |\mu_3| = \sqrt{(\gamma - 3)/2}$ и $\rho = 3|\alpha|$. В последнем случае имеем ту же связь между γ и ρ и между ρ и α, что и в одном варианте решения предыдущей задачи $\alpha = -\rho/3$, $\gamma = 2\rho^2/9 + 3$. Полные зависимости оптимального значения ρ и максимальной степени устойчивости m от γ представлены на фиг. 2.

3. Качания ротора синхронной машины и движения маятника с магнитоэлектрическими гасителями. Упрощенные (приближенные) уравнения качаний ротора неявнополюсной синхронной электрической машины, работающей на сеть с заданным напряжением, получаются [1] из исходных уравнений Лагранжа — Максвелла с помощью соответствующего асимптотического метода разделения движений. Эти упрощенные уравнения можно записать в виде

$$\Psi_f^{\cdot} + \frac{r_f}{l}(\Psi_f - \gamma\cos\delta) = e_f$$



Фиг. 2



Фиг. 3

$$\Psi_k^{\cdot} + \frac{r_k}{l}(\Psi_k + \gamma \sin \delta) = 0 \tag{3.1}$$

$$\varkappa\delta^{\cdot\cdot} + \frac{\gamma}{l}(\Psi_f \sin \delta + \Psi_k \cos \delta) = m$$

Здесь Ψ_f, Ψ_k — медленные составляющие потокосцеплений контура возбуждения и поперечного демпферного контура, δ — угол качаний ротора, отсчитываемый между двумя осями, перпендикулярными оси вращения ротора, из которых одна жестко связана с ним, а другая вращается заданным образом с синхронной угловой скоростью. Все величины в (3.1) — безразмерные.

Уравнения (3.1) представляют собой уравнения (10) из [1], но с другими обозначениями для коэффициентов: комплексы безразмерных параметров, возникшие в [1] при применении асимптотического метода, обозначены в (3.1) через l, γ и так далее. Кроме того, в (3.1) введено другое безразмерное время. Связь между прежними и новыми обозначениями будет очевидной, если сопоставить уравнения (3.1) и (10) в [1].

Существенно, что уравнения (3.1) имеют структуру уравнений Рауса, в которых Ψ_f, Ψ_k — квазициклические обобщенные импульсы, δ — позиционная обобщенная координата. Это позволяет перейти к более удобным в данном случае уравнениям Лагранжа. Введем токи (обобщенные скорости) I_f, I_k соотношениями

$$I_f = \frac{1}{l}\left(\Psi_f - \gamma \cos \delta - \frac{le_f}{r_f}\right), \quad I_k = \frac{1}{l}(\Psi_k + \gamma \sin \delta) \tag{3.2}$$

Получим уравнения

$$lI_f^{\cdot} - \gamma\delta^{\cdot} \sin \delta + r_f I_f = 0$$

$$lI_k^{\cdot} - \gamma\delta^{\cdot} \cos \delta + r_k I_k = 0 \tag{3.3}$$

$$\varkappa\delta^{\cdot\cdot} + \gamma(I_f \sin \delta + I_k \cos \delta) + \frac{\gamma e_f}{r_f} \sin \delta = m$$

Эти уравнения являются частным случаем уравнений (1.2) и описывают как качания ротора синхронной машины, так и движения маятника с магнитоэлектрическими гасителями под действием силы тяжести и внешнего момента m; только для маятника коэффициент $\gamma e_f / r_f$ должен быть заменен другим безразмерным параметром. Гасители в данном случае содержат по одному контуру с токами I_f и I_k, эти контуры жестко соединены с маятником, плоскости контуров взаимно перпендикулярны и коэффициент взаимной индукции между контурами равен нулю. Контуры помещены в однородное магнитное поле и совершают угловые колебания или вращаются в этом поле при колебаниях или вращении маятника (фиг. 3).

Для системы (3.3) справедливо энергетическое соотношение

$$\left[\frac{1}{2}\,l\,(I_f^2 + I_k^2) + \frac{1}{2}\,\varkappa\delta^{\cdot 2} + \frac{\gamma e_f}{r_f}\,(1 - \cos\delta)\right]^{\cdot} = -\,(r_f I_f^2 + r_k I_k^2) + m\delta^{\cdot} \qquad (3.4)$$

Свойствам решений уравнений, описывающих переходные процессы в различных синхронных маятниках посвящена работа [4]. Но тот факт, что по крайней мере в ряде важных случаев эти уравнения имеют лагранжеву структуру[1] и для них справедливы соотношения типа (3.4), в [4] не отмечается и не используется. В то же время для систем, обладающих указанным свойством, доказательства приведенных в [4] теорем можно существенно упростить. Например, с помощью (3.4) легко показать, что при $m = \mathrm{const}$ или $m = m(\delta)$, где $m(\delta)$ — периодическая функция с отличным от нуля средним значением, система (3.3) дихотомична, т. е. ее движения либо неограниченные, либо описывают равновесия, либо стремятся к равновесию (вращения при таком определении [4] считаются неограниченными движениями).

Действительно, для ограниченных движений интеграл от $r_f I_f^2 + r_k I_k^2$ ограничен при $t \to \infty$. Ограничены также $I_f^{\cdot}, I_k^{\cdot}$. Следовательно, $I_f, I_k \to 0$. Взяв производные по времени от частей первых двух уравнений (3.3), сразу установим, что ограничены $I_f^{\cdot\cdot}, I_k^{\cdot\cdot}$. Отсюда и из того факта, что I_f, I_k — интегралы от $I_f^{\cdot}, I_k^{\cdot}$, следует $I_f^{\cdot}, I_k^{\cdot} \to 0$. Из тех же двух уравнений (3.3) получается, что $\delta^{\cdot} \to 0$. Аналогично выводится, что $\delta^{\cdot\cdot\cdot}$ — ограниченная функция t и $\delta^{\cdot\cdot} \to 0$. Последнее уравнение (3.3) дает теперь, что δ либо отвечает равновесию, либо $\delta(t)$ стремится к положению равновесия.

Если среднее значение $m(\delta)$ равно нулю, то система (3.3) глобально асимптотически устойчива [4]. С помощью соотношения (3.4) это также доказывается значительно проще, чем в [4].

Покажем в дополнение к [4], что система (3.3) допускает неограниченные решения, в которых достигаются сколь угодно большие значения $\delta^{\cdot} \to \infty$. Из первого уравнения (3.3) получается соотношение, связывающее I_f и δ

$$I_f(t) = I_f(t_0)\exp\left(-\frac{r_f(t - t_0)}{l}\right) + \frac{\gamma}{l}\int_{t_0}^{t}\exp\left(-\frac{r_f(t - \vartheta)}{l}\right)\frac{d\cos\delta(\vartheta)}{d\vartheta}\,d\vartheta \qquad (3.5)$$

Если взять в (3.5) интеграл по частям, чтобы устранить производную от $\cos\delta$, то становится очевидно, что $I_f(t)$ в любом решении системы (3.3) — ограниченная функция времени. То же относится к $I_k(t)$. Очевидно также, что получаемые таким образом оценки $|I_f|$, $|I_k|$ одни и те же для всех решений с одними и теми же начальными условиями $I_f(t_0), I_k(t_0)$.

Пусть среднее значение m положительно. Используем неравенство

$$\delta^{\cdot}(t) \geq \delta^{\cdot}(t_0) - C(t - t_0) \qquad (3.6)$$

которое получается из третьего уравнения (3.3) после интегрирования. Существенно, что константа $C > 0$ в (3.6) не зависит от начального значения $\delta^{\cdot}(t_0)$. Из (3.6) следует, что выбирая достаточно большое значение $\delta^{\cdot}(t_0)$, можно добиться, чтобы было $\delta^{\cdot}(t) > s_*$, где s_* — любое заданное число, на любом промежутке $t_0 \leq t \leq t_1$. Выберем t_1 таким, чтобы $\delta(t_1) = \delta_0 + 2\pi$, $\delta_0 = \delta(t_0)$ (разность $t_1 - t_0$

[1] Вывод, что структура уравнений синхронных машин, записанных как уравнения Рауса, сохраняется после применения асимптотического метода (чего, вообще говоря, могло и не быть) и переход к уравнениям типа (3.3) в рассматриваемом случае неявнополюсного генератора и в других случаях сделаны совместно О. М. Левом и авторами.

тем меньше, чем больше $\delta^{\cdot}(t_0)$) и перейдем в (3.3) к аргументу вместо времени t. Первое уравнение (3.3) примет вид

$$\frac{dI_f}{d\delta} = \frac{\Upsilon}{l}\sin\delta - \frac{r_f}{ls} I_f \tag{3.7}$$

Здесь обозначено $\delta^{\cdot} = s$. Интегрируя и аналогичное уравнение, содержащее I_k, получим

$$I_f(\delta) = I_f(t_0) + \frac{\Upsilon}{l}(\cos\delta_0 - \cos\delta) - \frac{r_f}{l}\int_{\delta_0}^{\delta}\frac{I_f(\xi)}{s(\xi)}d\xi \tag{3.8}$$

$$I_k(\delta) = I_k(t_0) - \frac{\Upsilon}{l}(\sin\delta_0 - \sin\delta) - \frac{r_k}{l}\int_{\delta_0}^{\delta}\frac{I_k(\xi)}{s(\xi)}d\xi$$

Подставим (3.8) в уравнение, получающееся из третьего уравнения (3.3) после замены аргумента и интегрируя по δ, придем к соотношению

$$\frac{1}{2}\varkappa\,[s^2(\delta_0 + 2\pi) - s^2(\delta_0)] = \int_{\delta_0}^{\delta_0+2\pi} m(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \frac{\Upsilon r_f}{l}\int_{\delta_0}^{\delta_0+2\pi}\sin\xi\int_{\delta_0}^{\xi}\frac{I_f(\eta)}{s(\eta)}d\eta d\xi + \frac{\Upsilon r_k}{l}\int_{\delta_0}^{\delta_0+2\pi}\cos\xi\int_{\delta_0}^{\xi}\frac{I_k(\eta)}{s(\eta)}d\eta d\xi \tag{3.9}$$

Выбирая достаточно большое значение $s_0 = \delta^{\cdot}(t_0)$, можно добиться, чтобы сумма двух последних членов в (3.9) была меньше первого члена. При этом будет $s(\delta_0 + 2\pi) > s(\delta_0)$. Повторяя рассуждение для промежутка $\delta_0 + 2\pi \le \delta \le \delta_0 + 4\pi$ и так далее, получим, что $s(\delta)$ и $\delta^{\cdot}(t)$ при принятом начальном условии $\delta^{\cdot}(t_0)$ неограничены. Интересно, что это возможно при сколь угодно малых средних значениях m.

Сделанный вывод основан на том, что члены в (3.8), не содержащие s в знаменателе, не дают вклада в приращение s за период изменения δ. Последнее же является, по существу, следствием лагранжевой структуры уравнений (3.3) и того, что члены, связывающие уравнение движения и уравнения для токов, гироскопические.

Рассмотренные движения не может совершать маятник под действием внешнего момента и момента трения, пропорционального угловой скорости. Это указывает, что действие магнитоэлектрических гасителей на вращательном движении «слабее», чем сил вязкого трения.

Сказанное без оговорок относится к маятнику с гасителями. Но для электрических машин нужно учесть еще, что уравнения (3.3) получаются с помощью асимптотического метода и справедливы лишь при достаточно малых скольжениях; этот факт надо учитывать также при использовании результатов, приведенных в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Киселев П. В., Лев О. М, Ходжаев К. Ш.* Асимптотическое разделение переходных процессов синхронной машины//Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1983. № 3. С. 76—83.
2. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
3. *Болотник Н. Н.* Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983. 257 с.
4. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
17.X.1994