

УДК 531.552

© 1996 г. М. В. ШАМОЛИН

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И УСТОЙЧИВЫЕ ПО ПУАССОНУ ТРАЕКТОРИИ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Проводится качественный анализ одной динамической модели плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде при выполнении условий струйного обтекания [1, 2]. В [3] рассматривался случай постоянной величины скорости некоторой характерной точки твердого тела. Там же был полностью исследован фазовый цилиндр квазискоростей. Для всех классов динамических систем, возникающих при описании такой неголономной системы, выполнено одно общее свойство: фазовый цилиндр квазискоростей допускает разделение на области — финитную (она заполнена траекториями, занимающими ограниченную область) и вращательную (она заполнена вращениями на фазовом цилиндре). В работе проводится исследование самих траекторий движения твердого тела. Показано, что траекториям, занимающим на фазовом цилиндре квазискоростей вращательную область, соответствуют движения твердого тела в ограниченной области плоскости. При этом существуют как семейство замкнутых траекторий движения, так и семейство незамкнутых траекторий, обладающих свойством всюду плотности возле себя или устойчивости по Пуассону. С помощью средств современной вычислительной техники удалось проиллюстрировать последние траектории, всюду плотно заполняющие с течением времени кольцеобразную область.

Рассмотрим задачу о движении тела при условии, что линия действия силы, приложенной к телу со стороны среды, не меняет своей ориентации относительно тела, а лишь может смещаться параллельно самой себе в зависимости от угла между вектором скорости некоторой характерной точки и линией действия силы (так называемое квазистационарное описание). Подобные условия возникают при движении пластинки с «большими» углами атаки, в среде при струйном или отрывном обтеканиях [1, 2].

1. Формализация модельных предположений и динамическая система. В соответствии с [3], кратко перечислим модельные предположения, используемые при изучении движения тела.

1.1. Все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоской пластинки AB (фиг. 1).

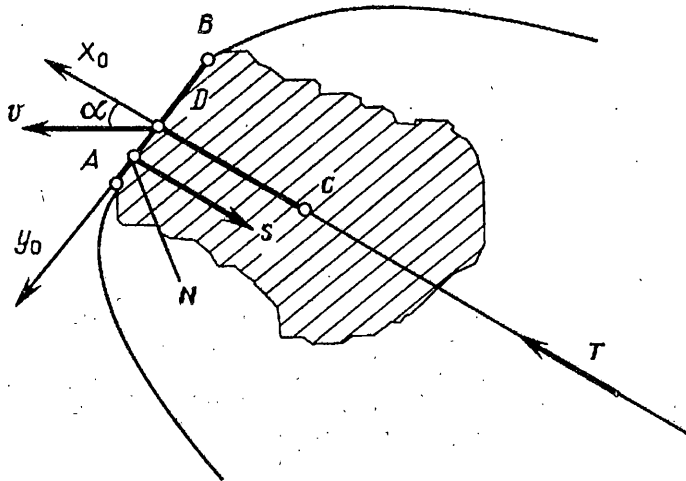
1.2. Сила S этого взаимодействия направлена по нормали к пластинке, причем точка N приложения этой силы определяется лишь одним параметром — углом атаки α , который измеряется между вектором скорости v середины D пластинки и внешней нормалью в этой точке (прямая CD). Таким образом, $DN = y(\alpha)$ (см. также [4]).

1.3. Величину силы сопротивления S примем в виде sv^2 , где коэффициент s есть функция только угла атаки α ($s = s(\alpha)$).

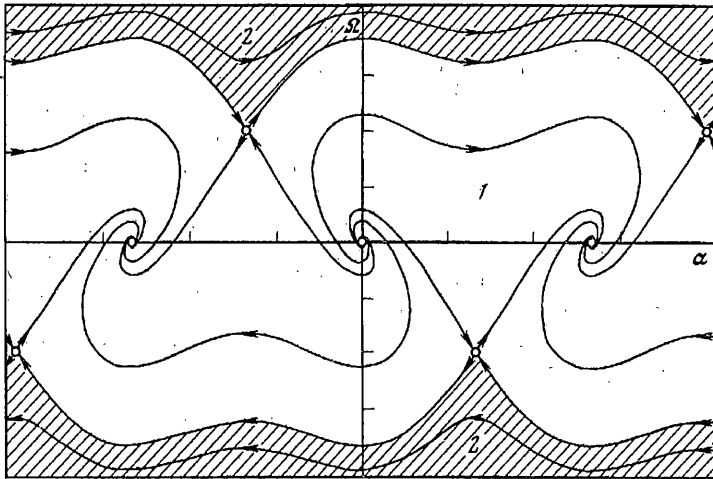
1.4. Предположим, что по прямой CD на тело действует дополнительная сила T , которую назовем «силой тяги». Ее величину выберем так, чтобы во все время была постоянной величина скорости точки D .

1.5. Распределение масс примем таким, что центр масс C тела располагается на срединном перпендикуляре CD к пластинке.

1.6. Динамическая система, описывающая произвольное плоскопараллельное движение тела, имеет шестой порядок. Для описания фазового состояния выберем следующие координаты: декартовы координаты x, y точки D ; угол поворота φ ,



Фиг. 1



Фиг. 2

который будем отсчитывать в плоскости между прямой CD и какой-нибудь осью инерциальной системы координат; величина v ; угол атаки α ; угловая скорость ω . При этом функции v и α рассматриваем как квазискорости системы.

Ввиду того, что обобщенные силы S и T , а также кинетическая энергия не зависят от положения тела на плоскости (от величин x , y , φ), координаты (x, y, φ) являются циклическими. Это позволяет рассматривать систему меньшей размерности [4].

1.7. Записывая теорему о движении центра масс на плоскости в проекциях на подвижные оси x_0, y_0 (фиг. 1) и присоединяя уравнение об изменении кинетического момента относительно оси Кенига, получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha + \omega v \sin \alpha + \sigma \omega^2 &= \frac{T}{m} - \frac{s(\alpha)}{m} v^2 \\ \dot{v} \sin \alpha + \dot{\alpha} v \cos \alpha - \omega v \cos \alpha + \sigma \dot{\omega} &= 0 \\ I \dot{\omega} &= -y(\alpha) s(\alpha) v^2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Эту динамическую систему дополним кинематическими соотношениями

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{x} = v \cos(\alpha - \varphi), \quad \dot{y} = v \sin(\alpha - \varphi) \quad (1.2)$$

Здесь введены следующие обозначения: σ — расстояние DC , I — центральный момент инерции тела, m — масса тела.

1.8. В динамическую систему (1.1) входят функции $y(\alpha)$, $s(\alpha)$, для качественного описания которых используем экспериментальную информацию о свойствах струйного обтекания.

Как показано в [3, 4], динамическая подсистема из (1.1) на плоскости квазискоростей относительно структурно устойчива (груба) по отношению к классам функций¹ $\{y\}$ и $\{s\}$. Поэтому будем считать, что $y(\alpha) = A \sin \alpha$, $s(\alpha) = B \cos \alpha$, $A, B > 0$. Цель публикуемой работы — исследование траекторий движения твердого тела, соответствующих вращательной области фазовой плоскости квазискоростей, которая получается разворачиванием фазового цилиндра.

2. О качественных свойствах динамической подсистемы из (1.1). В соответствии с 1.4, рассматриваемая неголономная связь

$$v(t) = \text{const} \quad (2.1)$$

понижает порядок системы (1.1), а первое уравнение (1.1) определяет функцию T как реакцию неголономной связи, в результате чего возникает независимая подсистема следующего вида:

$$\ddot{\alpha} = \omega + \beta \sin \alpha, \quad \dot{\omega} = -\beta \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.2)$$

где $\beta = \sigma^2 AB / I$ — единственный безразмерный параметр в системе (2.2).

У системы (2.2) имеется два вида симметрий, а именно, центральная симметрия относительно точек $(\pi k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, когда векторное поле системы (2.2) меняет знак при замене

$$\begin{pmatrix} \pi k - \alpha \\ -\omega \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pi k + \alpha \\ \omega \end{pmatrix}$$

а также некоторая зеркальная симметрия (НЗС), когда при замене

$$\begin{pmatrix} \pi/2 + \pi k - \alpha \\ \omega \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pi/2 + \pi k + \alpha \\ \omega \end{pmatrix}$$

α — составляющая векторного поля не меняется, а ω — составляющая меняет знак.

В [3, 4] приводится фазовый портрет системы (2.2) (см. фиг. 2, где 1 — колебательная область, 2 — вращательная область (заштрихована)).

3. Интегрирование динамической системы (1.2). Для любых начальных условий известно качественное поведение решений $\alpha = \alpha_1(t, \alpha_0, \omega_0)$, $\omega = \omega_1(t, \omega_0, \alpha_0)$ системы (2.2). Для получения траекторий движения тела на плоскости, интегрируя кинематические соотношения (1.2), получим следующие равенства:

$$\varphi = \varphi_1(t, \varphi_0, \alpha_0, \omega_0) = \varphi_0 + \int_{\varphi_0}^t \omega_1(\tau, \omega_0, \alpha_0) d\tau$$

$$x = x_1(t, x_0, \alpha_0, \omega_0, \varphi_0) = x_0 + \int_{\varphi_0}^t \cos(\alpha_1(\tau, \alpha_0, \omega_0) - \varphi_1(\tau, \varphi_0, \alpha_0, \omega_0)) d\tau$$

$$y = y_1(t, y_0, \alpha_0, \omega_0, \varphi_0) = y_0 + \int_{\varphi_0}^t \sin(\alpha_1(\tau, \alpha_0, \omega_0) - \varphi_1(\tau, \varphi_0, \alpha_0, \omega_0)) d\tau$$

¹ См. также: Шамолин М. В. Качественный анализ модельной задачи о движении тела в среде со струйным обтеканием. Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 27.12.91. М.: МГУ, 1991, 147 с.

Далее будем рассматривать только лишь класс следующих начальных условий: $t_0 = 0$, $\alpha_0 = \pi/2$, $\varphi_0 = -\pi/2$, $x_0 = y_0 = 0$. Достаточность рассмотрения лишь данного класса обусловлена наличием двух видов симметрий у системы (2.2). Таким образом

$$\alpha = \alpha_1(t, \pi/2, \omega_0) = \alpha_2(t, \omega_0), \quad \omega = \omega_1(t, \omega_0, \pi/2) = \omega_2(t, \omega_0)$$

$$\varphi = \varphi_1\left(t, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \omega_0\right) = \varphi_2(t, \omega_0) = -\frac{\pi}{2} + \int_0^t \omega_2(\tau, \omega_0) d\tau$$

$$x = x_1\left(t, 0, \frac{\pi}{2}, \omega_0, -\frac{\pi}{2}\right) = x_2(t, \omega_0) = \int_0^t \cos(\alpha_2(\tau, \omega_0) - \varphi_2(\tau, \omega_0)) d\tau$$

$$y = y_1\left(t, 0, \frac{\pi}{2}, \omega_0, -\frac{\pi}{2}\right) = y_2(t, \omega_0) = \int_0^t \sin(\alpha_2(\tau, \omega_0) - \varphi_2(\tau, \omega_0)) d\tau$$

3.1. Общие свойства пространства решений. Сначала укажем на общие свойства решений системы (1.2), (2.2), соответствующих вышеприведенному классу начальных условий. Выбранные начальные условия, а также два вида симметрий (см. фиг. 2) позволяют говорить о симметрии траектории центра пластинки на плоскости $R^2\{x, y\}$, для чего докажем следующее предложение.

Предложение 1. Функции $\alpha_2(t, \omega_0) - \pi/2$, $\psi_2(t, \omega_0) + \pi/2$, $x_2(t, \omega_0)$ — нечетные, а $\omega_2(t, \omega_0)$, $y_2(t, \omega_0)$ — четные функции времени t (все это для любого фиксированного $\omega_0 \in R$).

Заметим, что можно считать, что $\omega_0 \in (-\beta, +\infty)$ в силу наличия НЗС и центральной симметрии (см. фиг. 2).

Доказательство. В силу наличия НЗС, имеем

$$\dot{\alpha}(\pi/2 - \alpha, \omega) = \dot{\alpha}(\pi/2 + \alpha, \omega), \quad \forall \omega \in R, \quad \forall \alpha \in R \quad (3.1)$$

Выберем параметризацию на фазовой траектории таким образом, чтобы при $t = 0$ $\alpha = \pi/2$. Тогда в силу отделения независимой подсистемы (2.2), а также последнего свойства (3.1):

$$\frac{d}{dt} \alpha_2(t, \omega_0) = \frac{d}{dt} \alpha_2(-t, \omega_0)$$

Поэтому $\alpha_2(t, \omega_0) - \pi/2$ — функция нечетная.

Аналогичным образом, в силу наличия НЗС, имеем

$$\dot{\omega}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \omega\right) = -\dot{\omega}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha, \omega\right), \quad \forall \alpha \in R, \quad \forall \omega \in R \quad (3.2)$$

Выбирая ту же параметризацию, в силу отделения независимой подсистемы (2.2), а также свойства (3.2):

$$\frac{d}{dt} \omega_2(t, \omega_0) = -\frac{d}{dt} \omega_2(-t, \omega_0)$$

Поэтому $\omega_2(t, \omega_0)$ — функция четная. В силу (1.2) $\varphi_2(t, \omega_0) + \pi/2$ — функция нечетная. Поэтому $\alpha_2(t, \omega_0) - \varphi_2(t, \omega_0) - \pi$ — нечетная, а следовательно, $dy_2(t, \omega_0)/dt$ — нечетная, $dx_2(t, \omega_0)/dt$ — четная функция (в силу (1.2)). Таким образом, $x_2(t, \omega_0)$ — нечетная, а $y_2(t, \omega_0)$ — четная функция.

Следствие. На плоскости $R^2\{x, y\}$ кривая $\{(x, y) \in R^2: x = x_2(t, \omega_0), y = y_2(t, \omega_0), t \in R\}$ для любого ω_0 симметрична относительно оси Oy .

Это говорит о том, что для любых начальных условий существует система декартовых координат на плоскости, относительно которых траектория движения центра пластинки симметрична относительно одной из осей.

3.2. *Расслоения фазового пространства.* Фазовое пространство общей задачи плоскопараллельного движения твердого тела имеет размерность 6. В силу отщепления независимой подсистемы, а также дальнейшего понижения порядка, фазовое пространство допускает некоторые расслоения. Между тем основной вывод можно сформулировать так: геометрия траекторий на плоскости квазискоростей $R^2\{\alpha, \omega\}$ (фиг. 2) полностью определяет геометрию расположения траекторий во всем пятимерном фазовом пространстве $R^2\{x, y\} \times T^2\{\alpha, \varphi\} \times R^1\{\omega\}$. Таким образом, геометрия траектории центра пластинки на плоскости $\times R^2\{x, y\}$ полностью определена строением плоскости $R^2\{\alpha, \omega\}$. Остановимся подробнее на анализе траекторий на фазовой плоскости системы (2.2) (фиг. 2).

Ключевые сепаратрисы (т. е. сепаратрисы, выходящие из точек $(-\pi/2 + \pi l, (-1)^l \beta)$ и входящие в точки $(3\pi/2 + \pi l, (-1)^l \beta)$) разделяют фазовую плоскость на две области с совершенно различным характером поведения траекторий. Прямую $\{(\alpha, \omega) \in R^2 : \alpha = \pi/2\}$ одна из сепаратрис пересекает при некотором $\omega_0 > 0$.

Первая область — финитная (она односвязна и содержит прямую $\{(\alpha, \omega) \in R^2 : \omega = 0\}$) — сплошь заполненная траекториями следующего типа. Почти любая такая траектория начинается в отталкивающейся точке $(2\pi k, 0)$ и кончается в притягивающей $((2k+1)\pi, 0)$, $k \in Z$. Исключение лишь составляют точки покоя $(\pi k, 0)$, а также сепаратрисы, которые либо выходят из отталкивающих точек $(2\pi k, 0)$ и входят в седла S_{2k-1} и S_{2k} , либо выходят из седел S_{2k} и S_{2k+1} и входят в притягивающие точки $((2k+1)\pi, 0)$, где $S_k = (\pi/2 + \pi k, (-1)^{k+1} \beta)$.

Вторая область — вращательная (она двусвязна) — сплошь заполненная вращательными движениями подобно вращениям на фазовой плоскости математического маятника. Данные фазовые траектории огибают фазовый цилиндр и являются на нем периодическими. Хотя динамическая система (2.2) и неконсервативна, во вращательной области ее фазовой плоскости $R^2\{\alpha, \omega\}$ она допускает сохранение инвариантной меры с переменной плотностью [5].

3.3. *Геометрия траекторий, соответствующих вращательной области.* Будем исследовать качественное расположение траекторий центра пластинки на плоскости для вращательной области пространства квазискоростей. Поэтому рассмотрим функции $\alpha_2(t, \omega_0)$, $\omega_2(t, \omega_0)$ при $t \geq 0$, а также при $\omega_0 \in (\omega_*, +\infty)$. При этом функция $\omega_2(t, \omega_0)$ для каждого фиксированного $\omega_0 \in (\omega_*, +\infty)$ — периодическая функция t периода $T(\omega_0)$: $\omega_2(t + T(\omega_0), \omega_0) = \omega_2(t, \omega_0)$, а $\alpha_2(t, \omega_0)$ — имеет приращение 2π : $\alpha_2(t + T(\omega_0), \omega_0) = \alpha_2(t, \omega_0) + 2\pi$.

Исследуем для начала зависимость периода $T(\omega_0)$ траектории от параметра $\omega_0 \in (\omega_*, +\infty)$.

Поскольку вдоль замкнутой на цилиндре траектории

$$\partial \alpha_2(t, \omega_0) / \partial t > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \omega_0 \in (\omega_*, +\infty)$$

по теореме о неявной функции можно разрешить однозначно $t = t_2(\alpha, \omega_0)$ вдоль периодической траектории. При этом $\partial t_2(\alpha, \omega_0) / \partial t > 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \omega_0 \in (\omega_*, +\infty)$.

Функция $T(\omega_0)$ представляется в виде

$$0 < T(\omega_0) = \int_{\pi/2}^{5\pi/2} \frac{d\alpha}{\omega_2(t_2, \omega_0) + \beta \sin \alpha} \quad (3.3)$$

И хотя геометрия траектории центра пластинки при движении тела пока не очевидна, следующее предложение раскрывает свойства периода вдоль исследуемой периодической траектории на плоскости квазискоростей.

Предложение 2. Функция $T(\omega_0)$ — гладкая функция на интервале $(\omega_*, +\infty)$, причем

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow \omega_* + 0} T(\omega_0) = +\infty, \quad \lim_{\omega_0 \rightarrow +\infty} T(\omega_0) = +0$$

$$dT(\omega_0)/d\omega_0 < 0, \quad \forall \omega_0 \in (\omega_*, +\infty)$$

Таким образом, функция $T(\omega_0)$ задает взаимнооднозначное гладкое отображение $(\omega_*, +\infty) \xrightarrow{T} (0, +\infty)$.

Следовательно, изображающая точка на фазовом цилиндре сколь угодно долго и сколь угодно быстро может огибать цилиндр.

Приступим к исследованию траектории центра пластинки на плоскости $\mathbb{R}^2 \{x, y\}$. Для этого рассмотрим функции $x_2(t, \omega_0)$, $y_2(t, \omega_0)$ при $\omega_0 \in (\omega_*, +\infty)$. В силу предложения 1 — $x_2(t, \omega_0)$ — нечетная, а $y_2(t, \omega_0)$ — четная функция t . В силу (1.2):

$$\dot{x}_2(t, \omega_0) = \cos(\alpha_2(t, \omega_0) - \varphi_2(t, \omega_0)) \quad (3.4)$$

$$\dot{y}_2(t, \omega_0) = \sin(\alpha_2(t, \omega_0) - \varphi_2(t, \omega_0))$$

Фиксируем ω_0 . Пусть приращение функции $\varphi_2(t, \omega_0)$ за время $T(\omega_0)$ равно $\Delta\varphi = \varphi_2(T(\omega_0), \omega_0) - \varphi_2(0, \omega_0) = \varphi_2(T(\omega_0), \omega_0) + \pi/2 > 0$, так как $\omega_2(t, \omega_0) > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall \omega_0 \in (\omega_*, +\infty)$. Если $\Delta\alpha = \alpha_2(T(\omega_0), \omega_0) - \alpha_2(0, \omega_0)$, то, очевидно, $\Delta\alpha = 2\pi$.

Рассмотрим $\Delta(\alpha - \varphi) = \alpha_2(T(\omega_0), \omega_0) - \varphi_2(T(\omega_0), \omega_0) - \alpha_2(0, \omega_0) + \varphi_2(0, \omega_0)$. Функция $\Delta(\alpha - \varphi)(\omega_0)$ гладкая при $\omega_0 \in (\omega_*, +\infty)$. Значение величины $\Delta(\alpha - \varphi)$, взятое в точке ω_0 , обозначим через $\Delta_{\alpha-\varphi}(\omega_0)$. Покажем, что $-\infty < \Delta_{\alpha-\varphi}(\omega_0) < 2\pi$. Другими словами, приращение разности углов за период может быть достаточно большой. Последнее двойное неравенство исключительно важно для исследования траекторий центра пластинки на плоскости.

Предложение 3. Для любого достаточно большого отрицательного значения $D < 0$ найдется $\omega_0 \in (\omega_*, +\infty)$ такое, что $\Delta_{\alpha-\varphi}(\omega_0) = D$.

Доказательство. В силу предыдущих утверждений $\Delta_{\alpha-\varphi}(\omega_0)$, $\Delta_\varphi(\omega_0)$ — гладкие функции ω_0 при $\omega_0 \in (\omega_*, +\infty)$.

По теореме о непрерывной зависимости решений от начальных условий, для любого $D_1 > 0$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что траектория с начальным условием $(\pi/2, \omega_0)$ в ε — окрестности $U(\pi/2, \omega_*)$, $\omega_0 > \omega_*$, пробудет в окрестности $U(3\pi/2, \omega_*)$ время, большее чем D_1 . Таким образом, величина $\Delta_\varphi(\omega_0)$ при таких ω_0 оценивается как $\Delta_\varphi(\omega_0) > D_1\beta$. Поскольку операция Δ — линейна, то для любого $D < 0$ найдется $\omega_0 \in (\omega_*, +\infty)$ такое, что $\Delta_{\alpha-\varphi}(\omega_0) = 2\pi - \Delta_\varphi(\omega_0) < 2\pi - \beta D_1 < D$, что и требовалось.

Таким образом, приращение $\Delta_{\alpha-\varphi}(\omega_0)$ может принимать при $\omega_0 \in (\omega_*, +\infty)$ сколь угодно большие отрицательные значения z .

Рассмотрим значения правых частей (3.4) за период $T(\omega_0)$: $\dot{x}_2(T(\omega_0), \omega_0) = \cos z$, $\dot{y}_2(T(\omega_0), \omega_0) = \sin z$. Т. е. $\dot{x}_2(t, \omega_0) = \cos g(t)$, $\dot{y}_2(t, \omega_0) = \sin g(t)$, где $g(T(\omega_0)) = z$. Следующее предложение является критерием периодичности изменения правых частей последних равенств от времени.

Предложение 4. Функции $\cos g(t)$ и $\sin g(t)$ периодические тогда и только тогда, когда z рационально зависимо с π .

Всю исследуемую область параметра $\omega_0 \in (\omega_*, +\infty)$ необходимо разделить

на области с периодическим и непериодическим характерами траекторий. Ответ на последний вопрос дает следующее предложение.

Предложение 5. На числовом луче $(\omega_*, +\infty)$ существует всюду плотное счетное множество K , обладающее следующим свойством: $\omega_0 \in K$ тогда и только тогда, когда функции $\dot{x}_2(t, \omega_0)$ и $\dot{y}_2(t, \omega_0)$ периодические, период которых обозначим через $\tau(\omega_0)$.

Доказательство. Функция $\Delta_{\alpha-p}(\omega_0)$ — достаточно гладкая. Поскольку множество точек на числовой прямой, рационально зависимое с данным фиксированным значением, всюду плотно на прямой и имеет меру нуль, то, благодаря предложению 4, предложение 5 доказано.

Поскольку на множестве K (при фиксированном $\omega_0 \in K$) функции $\dot{x}_2(t, \omega_0)$ и $\dot{y}_2(t, \omega_0)$ — периодические периода $\tau(\omega_0)$, то $x_2(t, \omega_0)$ и $y_2(t, \omega_0)$ периодические в том и только том случае, если

$$\int_0^{\tau(\omega_0)} \dot{x}_2(t, \omega_0) dt = \int_0^{\tau(\omega_0)} \dot{y}_2(t, \omega_0) dt = 0 \quad (3.5)$$

Равенство (3.5) выполнено на множестве K , поскольку функция $\dot{y}_2(t, \omega_0)$ — нечетная переменная t , а также выполнено свойство $\dot{y}_2(t + \pi/2, \omega_0) = \dot{x}_2(t, \omega_0)$, $\forall \omega_0 \in K$.

Таким образом, можно сделать важный промежуточный вывод о расположении траекторий центра пластинки на плоскости.

Предложение 6. Кривая $\gamma(t): \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x = x_2(t, \omega_0), y = y_2(t, \omega_0)\}$ на плоскости $\mathbb{R}^2 \{x, y\}$ замкнута тогда и только тогда, когда $\omega_0 \in K$.

Следствие 1. Для почти всех $\omega_0 \in (\omega_*, +\infty)$ и только для них траектория движения точки твердого тела на плоскости — незамкнутая кривая.

Следствие 2. Поскольку выполнено свойство (2.1), то либо кривая γ уходит на бесконечность, либо существует множество, в котором она всюду плотна.

Видно, что почти все траектории на плоскости $\mathbb{R}^2 \{x, y\}$ незамкнуты. Оказывается, последние траектории обладают интересным свойством устойчивости или плотности возле себя.

Предложение 7. Незамкнутая траектория, которая является проекцией на плоскость $\mathbb{R}^2 \{x, y\}$ интегральной траектории системы (2.2), (1.2), всюду плотна возле себя (устойчива по Пуассону).

Прежде чем доказывать это последнее важное утверждение, касающееся поведения центра пластинки на плоскости, докажем одну вспомогательную теорему, представляющую самостоятельный интерес.

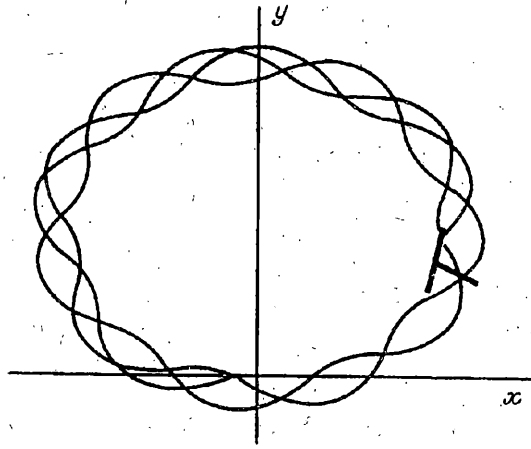
4. О плотности незамкнутых траекторий. Иногда в динамических системах существует бесконечное всюду плотное семейство замкнутых траекторий. При этом незамкнутые траектории в фазовом пространстве оказываются всюду плотными. Здесь наряду с понятием «всюду плотность во множестве» возникает более конкретное понятие всюду плотности возле себя. Последнее свойство траекторий имеет классическое название устойчивости по Пуассону.

Теорема. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

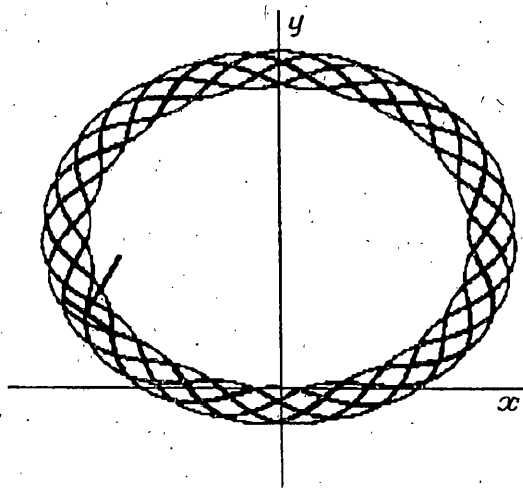
$$\dot{x} = f(t, x, \mu) \quad (4.1)$$

зависящую от параметра $\mu \in M \subseteq \mathbb{R}^1$ в области $D^\circ \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \{x, t\}$. Пусть для некоторых начальных условий $(x_0, t_0) \in D^\circ$ проекция интегральной траектории $(x_*(t), t)$ с данными начальными условиями и параметром $\mu = \mu_0$ на пространство $\mathbb{R}^n \{x\}$ является незамкнутой кривой и продолжаема на всю ось времени.

Тогда если в любой окрестности U точки $\mu = \mu_0 \in M$ существует значение μ такое, что проекция интегральной траектории $x(t, \mu)$ с произвольными на-



Фиг. 3



Фиг. 4

чальными условиями $(x_1, t_1) \in (x_*(t), t)$ на пространство $\mathbb{R}^n \{x\}$ — замкнутая кривая, то кривая $x_*(t)$ в пространстве $\mathbb{R}^n \{x\}$, $t \in \mathbb{R}$ — всюду плотна возле себя (устойчива по Пуассону).

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку x_1 проекции незамкнутой интегральной кривой $x_*(t)$ и проекцию решения системы (4.1) с начальным условием $(x_1, t_1) \in (x_*(t), t_1)$ при $\mu = \mu_0$. Поскольку это решение продолжаемо на всю ось времени, по теореме о непрерывной зависимости решения от правых частей и параметра, для любого $\varepsilon > 0$ существуют достаточно близкое значение μ_1 к значению μ_0 , а также положительное число T_1 такие, что при $t_1 \leq t \leq T_1$ выполнено условие $|x_*(t) - x^\circ(t)| < \varepsilon$.

Здесь $x_*(t)$ — решение системы (4.1) при $\mu = \mu_0$, с начальным условием (x_1, t_1) , а $x^\circ(t)$ — решение системы (4.1) при $\mu = \mu_1$ с тем же начальным условием. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ в ε — окрестности U точки $x_1 \in \mathbb{R}^n \{x\}$ существует решение системы (4.1) при $\mu = \mu_0$ и при некотором $T > 0$. Отсюда вытекает плотность траектории $x_*(t)$ возле себя в пространстве $\mathbb{R}^n \{x\}$ как проекции пространства $\mathbb{R}^{n+1} \{x, t\}$. Теорема доказана.

Замечание. Под замкнутыми кривыми в пространстве $\mathbb{R}^n \{x\}$ следует понимать проекции периодических решений системы (4.1) как интегральных кривых из пространства $\mathbb{R}^{n+1} \{x\}$ в пространство $\mathbb{R}^n \{x\}$.

Теперь докажем предложение 7.

Доказательство. Рассматриваемая траектория продолжаема на всю ось времени, поскольку величина скорости центра пластинки обладает свойством (2.1). Два уравнения системы (1.2) можно переписать в виде, подобном (3.4):

$$\dot{x} = \cos(\alpha_2(t, \omega_0) - \varphi_2(t, \omega_0))$$

$$\dot{y} = \sin(\alpha_2(t, \omega_0) - \varphi_2(t, \omega_0))$$

Получим неавтономную систему уравнений в $\mathbb{R}^3 \{x, y, t\}$, зависящую от параметра $\omega_0 \in (\omega_*, +\infty)$. В силу нескольких последних утверждений, полностью попадаем в условия теоремы. Тем самым предложение 7 доказано.

Можно показать, что в данном случае траектория точки твердого тела заполняет ограниченную область — кольцо на плоскости. На фиг. 3 и 4 показаны траектории точки на малых и больших временах соответственно.

Итак, вывод о движении твердого тела на плоскости для некоторого типичного класса начальных условий можно сформулировать так: твердое тело совершает вращение в одну сторону с периодически меняющейся угловой скоростью, при этом траектория центра пластинки почти всегда устойчива по Пуассону, т. е. всюду плотна возле себя. Более того, она заполняет кольцеобразную область.

Автор выражает благодарность С. В. Цыпцыну и В. А. Самсонову за помощь в написании работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 94-01-01547) и программы «Университеты России».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чаплыгин С. А. Избранные труды. М.: Наука, 1976. 495 с.
2. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
3. Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1989. № 3. С. 51—54.
4. Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о движении тела в среде со струйным обтеканием // Отчет НИИ механики МГУ. 1990. № 3969. 80 с.
5. Shatolin M. V. Global qualitative analysis of the nonlinear systems on the problem of a body motion in a resisting medium // 4th Colloq. on the Qualitative Theory of Differential Equations, Bolyai Institute, Regional Committee of the Hungarian Academy of Sciences. Szeged; Hungary, 1993. P. 54.