

УДК 531.36 : 515.126.2

© 1996 г. А. П. МАРКЕЕВ

О СОХРАНЯЮЩИХ ПЛОЩАДЬ ОТОБРАЖЕНИЯХ И ИХ ПРИМЕНЕНИИ В ДИНАМИКЕ СИСТЕМ С СОУДАРЕНИЯМИ

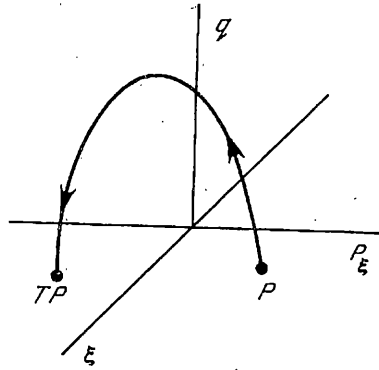
Получены условия устойчивости и неустойчивости неподвижной точки отображения, сохраняющего площадь. В основе метода исследования лежит упрощение (нормализация) отображения при помощи канонических преобразований с последующим применением второго метода Ляпунова и теоремы Мозера об инвариантных кривых к нормализованному отображению. В качестве динамического приложения дано решение задачи об устойчивости одного частного движения однородного шара в поле тяжести при наличии его соударений с цилиндрической поверхностью, образующая которой горизонтальна.

1. Введение. Предварительная классификация отображений. Метод поверхностей сечения Пуанкаре [1] является эффективным методом изучения нелинейных колебаний. При помощи этого метода исследование движений, близких к периодическому движению автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, приводится к изучению сохраняющих площадь отображений T плоскости в себя. Основы теории таких отображений созданы трудами Биркгофа [2—4], Леви — Чивита [5], Зигеля [6], Мозера [7].

Получение отображения — довольно сложная задача. В случае системы с двумя степенями свободы при наличии одной идеальной неударивающей связи оно может быть найдено следующим образом. Пусть q, ξ — обобщенные координаты, а связь задается неравенством $q \geq 0$. При ослабленной связи ($q > 0$) движение описывается уравнениями с гамильтонианом $H(q, \xi, p, p_\xi)$. При $q = 0$ (связь напряжена) в системе происходит абсолютно упругий удар без трения. Пусть существует периодическое движение с соударениями, для которого $\xi = p_\xi = 0$. Обозначим через c_0 значение постоянной интеграла энергии $H = \text{const}$, отвечающее этому движению и будем рассматривать величины ξ, p_ξ, q как прямоугольные координаты в трехмерном пространстве, определяемом изоэнергетическим уровнем $H(q, \xi, p, p_\xi) = c_0$. В качестве поверхности сечения удобно принять плоскость $q = 0$. Движение системы изображается в пространстве ξ, p_ξ, q кривой, лежащей в области $q \geq 0$. Периодическому движению отвечают точки оси $\xi = p_\xi = 0$. При $q = 0$ происходят соударения. Отображение T находится путем рассмотрения двух последовательных соударений (фиг. 1). Это отображение сохраняет площадь, так как при соударении величины ξ, p_ξ остаются неизменными [8], а в промежутках между соударениями на изоэнергетическом уровне $H = c_0$ движение описывается уравнениями Уиттекера (имеющими гамильтонову форму) с независимой переменной q [9], и сохранение площади следует из теоремы Лиувилля о сохранении фазового объема.

Задача об орбитальной устойчивости рассматриваемого периодического движения эквивалентна задаче об устойчивости неподвижной точки $\xi = p_\xi = 0$ отображения T .

Устойчивость неподвижных точек отображений, сохраняющих площадь, исследовалась в [5, 6, 10]. В данной работе метод исследования отличается от [5,



Фиг. 1

6, 10]: не проводится непосредственный анализ итераций отображения (как в [5, 6]) и не строятся дифференциальные уравнения Гамильтона, порождающие отображение (как в [10]). Метод исследования основывается на нормализации отображения при помощи канонических преобразований, приводимых ниже теоремах второго метода Ляпунова и теореме Мозера об инвариантных кривых, примененных к нормализованному отображению.

Теорема 1 (теорема Ляпунова). Пусть P_* — неподвижная точка отображения T и пусть некоторая непрерывная функция V обращается в нуль в точке P_* и знакопеременна в ее окрестности, а разность $\Delta = V(TP) - V(P)$ определенно-положительна в некоторой окрестности точки P_* . Тогда неподвижная точка P_* неустойчива [11].

Теорема 2 (теорема Четаева). Пусть P_* — неподвижная точка отображения T и пусть возможно найти такую непрерывную функцию V , что: 1) $V(P_*) = 0$, 2) в сколь угодно малой окрестности точки P_* существует область $V > 0$, на границе которой $V = 0$, 3) во всех точках P области $V > 0$ разность $\Delta = V(TP) - V(P)$ положительна. Тогда неподвижная точка P_* неустойчива [12].

Пусть T — сохраняющее площадь отображение плоскости в себя, имеющее начало координат своей неподвижной точкой. Достаточное условие устойчивости этой точки может быть получено, как следствие теоремы Мозера о кривых, инвариантных при отображениях кольца, сохраняющих площадь [7, 13].

Теорема 3 (теорема Мозера). Пусть отображение T задано в виде

$$\rho_1 = \rho + \varphi(\rho, \theta), \quad \theta_1 = \theta + \alpha + a\rho^m + \psi(\rho, \theta) \quad (1.1)$$

и $\rho = 0$ — его неподвижная точка. Величины α, a, m постоянны, $m > 0$. Функции φ и ψ достаточно гладкие, 2π -периодические по θ и при малых ρ допускают оценки вида $\varphi = O(\rho^\beta)$, $\psi = O(\rho^\gamma)$, причем $\beta > m$, $\gamma > m$. Тогда неподвижная точка отображения устойчива.

Далее предполагается, что отображение T плоскости x, y в себя аналитично в окрестности неподвижной точки $x = y = 0$. Зададим его равенствами

$$x_1 = f(x, y), \quad y_1 = g(x, y) \quad (1.2)$$

$$f(x, y) = ax + by + O_2, \quad g(x, y) = cx + dy + O_2 \quad (1.3)$$

Здесь и далее через O_k обозначается сходящийся степенной ряд, начинающийся с членов, степень которых не ниже k . Условие сохранения площади означает, что имеет место тождество

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} = 1 \quad (1.4)$$

Отсюда следует, что коэффициенты рядов (1.3) не вполне произвольны, а связаны некоторыми соотношениями, вытекающими из (1.4).

Линеаризованное отображение (1.2) имеет вид

$$x_1 = ax + by, \quad y_1 = cx + dy \quad (1.5)$$

В силу (1.4) определитель матрицы этого отображения равен единице, и характеристическое уравнение будет таким

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0 \quad (2A = a + d) \quad (1.6)$$

Приведем отображение (1.5) к вещественной нормальной форме. Можно убедиться непосредственным вычислением, что любое линейное вещественное невырожденное преобразование не меняет свойство отображения T сохранять площадь. В зависимости от значений величин a, b, c, d возможны следующие случаи.

$|A| > 1$. Тогда корни ρ_1, ρ_2 уравнения (1.6) вещественны. Обозначим их через ρ и ρ^{-1} , где $\rho = A + (A^2 - 1)^{1/2}$.

Нормальная форма отображения (1.5) имеет вид

$$q_1 = \rho q, \quad p_1 = \rho^{-1} p \quad (1.7)$$

Нормализующую замену переменных, приводящую (1.5) к форме (1.7), можно выбрать следующим образом. Если $b \neq 0$, то

$$x = -bq - bp, \quad y = (a - \rho)q + (a - \rho^{-1})p$$

а если $b = 0$, то

$$x = (a - d)q, \quad y = cq + p$$

$A = 1$. В этом случае $\rho_1 = \rho_2 = 1$. Если $b = c = 0$, то нормализация не требуется, так как тогда $a = d = 1$ и отображение (1.5) уже имеет нормальную форму

$$x_1 = x, \quad y_1 = y$$

Если же хотя бы одна из величин b или c отлична от нуля, то нормальная форма отображения (1.5) будет такой

$$q_1 = q + p, \quad p_1 = p$$

При этом нормализующая замена переменных может быть выбрана так. Если $b \neq 0, c = 0$, то

$$x = |b|^{1/2} q, \quad y = \sigma |b|^{-1/2} p \quad (\sigma = \text{sign } b) \quad (1.8)$$

Если $b = 0, c \neq 0$, то

$$x = \sigma |c|^{-1/2} p, \quad y = |c|^{1/2} q \quad (\sigma = \text{sign } c) \quad (1.9)$$

Если $bc \neq 0$, то

$$x = bq, \quad y = (1 - a)q + p \quad (1.10)$$

$A = -1$. Здесь $\rho_1 = \rho_2 = -1$. И если $b = c = 0$, то отображение (1.5) уже имеет нормальную форму

$$x_1 = -x, \quad y_1 = -y$$

Если же хотя бы одна из величин b или c отлична от нуля, то нормальной формой отображения (1.5) будет отображение

$$q_1 = -q + p, \quad p_1 = -p$$

При этом нормализующая замена имеет вид (1.8) при $b \neq 0, c = 0$, вид (1.9) при $b = 0, c \neq 0$ и вид

$$x = bq, \quad y = -(a + 1)q + p$$

при $bc \neq 0$.

$|A| < 1$. В этом случае корни уравнения (1.6) комплексно-сопряженные с модулем, равным единице

$$\rho_1 = \rho = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad \rho_2 = \bar{\rho} = \cos \alpha - i \sin \alpha \quad (1.11)$$

$$\cos \alpha = A, \quad \sin \alpha = (1 - A^2)^{1/2}$$

Нормализованное отображение (1.5) представляет собой поворот на угол α :

$$q_1 = \cos \alpha q + \sin \alpha p, \quad p_1 = -\sin \alpha q + \cos \alpha p$$

Нормализующую замену переменных можно взять в виде

$$x = -\sigma |b|^{1/2} (\sin \alpha)^{-1/2} q \quad (\sigma = \text{sign } b)$$

$$y = (|b| \sin \alpha)^{-1/2} (a - \cos \alpha) q - (\sin \alpha)^{1/2} |b|^{-1/2} p$$

В дальнейшем считаем, что нормализация линеаризованного отображения (1.2) уже осуществлена. И, применяя для новых переменных q, p старые обозначения x, y , будем рассматривать отличающиеся один от другого шесть случаев I — VI отображения (1.2). Эти случаи отличаются матрицами нормализованной линейной части отображения:

$$\text{I)} \left\| \begin{array}{cc} \rho & 0 \\ 0 & \rho^{-1} \end{array} \right\|, \quad \text{II)} \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|, \quad \text{III)} \left\| \begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right\|$$

$$\text{IV)} \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|, \quad \text{V)} \left\| \begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{array} \right\|, \quad \text{VI)} \left\| \begin{array}{cc} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{array} \right\|$$

В случае I величина ρ вещественна, $\rho \neq \pm 1$, а в случае VI число $\alpha\pi^{-1}$ не является целым.

2. Неустойчивость неподвижной точки в случае I. В случае I отображение (1.2) имеет вид

$$x_1 = \rho x + O_2, \quad y_1 = \rho^{-1} y + O_2 \quad (\rho \neq \pm 1)$$

Неподвижная точка $x = y = 0$ неустойчива [5, 6]. Для доказательства возьмем знакопеременную функцию V вида

$$V = (\rho^2 - 1)x^2 + (\rho^{-2} - 1)y^2$$

Для разности $\Delta = V(TP) - V(P)$ получаем выражение

$$\Delta = \rho^{-4} (\rho^2 - 1)^2 (\rho^4 x^2 + y^2) + O_3$$

Функция Δ определено-положительна. Следовательно, согласно теореме Ляпунова, неподвижная точка неустойчива.

3. Исследование устойчивости в случае II. Имеем отображение

$$x_1 = x + \sum_{m+n=2}^{\infty} a_{mn} x^m y^n, \quad y_1 = y + \sum_{m+n=2}^{\infty} b_{mn} x^m y^n \quad (3.1)$$

Теорема 4. Если правая часть хотя бы одного из равенств (3.1) действительно содержит члены второй степени, то неподвижная точка $x = y = 0$ отображения неустойчива.

Для доказательства воспользуемся теоремой Четаева. Предварительно перейдем к переменным φ, r по формулам

$$x = \sqrt{2r} \sin \varphi, \quad y = \sqrt{2r} \cos \varphi \quad (3.2)$$

Отображение (3.1) примет вид

$$r_1 = r - F'(\varphi) r^{3/2} + O(r^2), \quad \varphi_1 = \varphi + 3/2 F(\varphi) r^{1/2} + O(r) \quad (3.3)$$

$$F(\varphi) = a_1 \sin \varphi + b_1 \cos \varphi + a_3 \sin 3\varphi + b_3 \cos 3\varphi$$

$$a_1 = -\sqrt{2} (b_{20} + b_{02})/2, \quad b_1 = \sqrt{2} (a_{20} + a_{02})/2 \quad (3.4)$$

$$a_3 = \sqrt{2} (b_{20} - 3b_{02})/6, \quad b_3 = \sqrt{2} (a_{02} - 3a_{20})/6$$

Из условий теоремы 4 следует, что среди величин (3.4) есть отличная от нуля. Поэтому уравнение $F(\varphi) = 0$ имеет вещественные корни, причем существует такой корень $\varphi = \varphi_*$, что значение производной $F'(\varphi)$ при $\varphi = \varphi_*$ отрицательно. Пусть

$$V = r^{1/2} [\cos(\varphi - \varphi_*) - \cos \varepsilon] \quad (0 < \varepsilon \ll 1) \quad (3.5)$$

За область $V > 0$ примем область $\varphi_* - \varepsilon < \varphi < \varphi_* + \varepsilon$. Из (3.3) и (3.5) имеем такое выражение для разности $\Delta = V(TP) - V(P)$:

$$\Delta = 1/2 r \{ [\cos \varepsilon - \cos(\varphi - \varphi_*)] F'(\varphi) - 3F(\varphi) \sin(\varphi - \varphi_*) + O(r^{1/2}) \} \quad (3.6)$$

Но в области $V > 0$ справедливы равенства

$$\varphi = \varphi_* + \beta \varepsilon \quad (-1 < \beta < 1), \quad F(\varphi) = \varepsilon \beta F'(\varphi_*) + O(\varepsilon^2), \quad F'(\varphi) = F'(\varphi_*) + O(\varepsilon)$$

Поэтому (3.6) можно переписать в виде

$$\Delta = -1/4 F'(\varphi_*) r \{ [1 + 5\beta^2 + O(\varepsilon)] \varepsilon^2 + O(r^{1/2}) \} \quad (3.7)$$

Отсюда видно, что величину ε всегда можно задать такой, что при достаточно малых r функция Δ будет положительной в области $V > 0$. Теорема 4 доказана.

Пусть теперь правые части равенств (3.1) не содержат членов второй степени. В переменных φ, r , задаваемых формулами (3.2), отображение записывается так

$$r_1 = r - G'(\varphi) r^2 + O(r^{5/2}), \quad \varphi_1 = \varphi + 2G(\varphi) r + O(r^{3/2}) \quad (3.8)$$

$$G(\varphi) = b_0 + a_2 \sin 2\varphi + b_2 \cos 2\varphi + a_4 \sin 4\varphi + b_4 \cos 4\varphi$$

$$b_0 = (3a_{03} + 2a_{21} - 3b_{30})/8, \quad a_2 = a_{30} - b_{03}, \quad b_2 = (a_{03} + b_{30})/2 \quad (3.9)$$

$$a_4 = -(a_{30} + b_{03})/2, \quad b_4 = (a_{03} - 2a_{21} - b_{30})/8$$

Теорема 5. Если уравнение $G(\varphi) = 0$ не имеет вещественных корней, то неподвижная точка $x = y = 0$ отображения устойчива, если же существует такое значение $\varphi = \varphi_*$, что $G(\varphi_*) = 0$, а $G'(\varphi_*) \neq 0$, то неподвижная точка неустойчива.

Докажем сначала утверждение об устойчивости. Без ограничения общности считаем, что $G(\varphi) > 0$ при всех φ . Если бы это было не так, то следовало бы в (3.8) заменить φ на $-\varphi$. Вместо φ, r введем переменные θ, ρ при помощи канонического преобразования, задаваемого равенствами

$$\rho = \frac{H(2\pi)}{2\pi} r \sqrt{G(\varphi)}, \quad \theta = \frac{2\pi}{H(2\pi)} H(\varphi), \quad H(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{dx}{\sqrt{G(x)}}$$

В новых переменных отображение (3.8) принимает такую форму

$$\rho_1 = \rho + O(\rho^{3/2}), \quad \theta_1 = \theta + 8\pi^2 H^{-2}(2\pi) \rho + O(\rho^{3/2}) \quad (3.10)$$

Слагаемые $O(\rho^{5/2})$ и $O(\rho^{3/2})$ в (3.10) 2π -периодичны по θ и аналитичны по θ, ρ при $0 < \rho \ll 1$. Отображение (3.10) удовлетворяет теореме Мозера. Поэтому неподвижная точка $\rho = 0$ этого отображения (а в старых переменных точка $x = y = 0$) устойчива.

Утверждение теоремы 5 о неустойчивости докажем при помощи теоремы Четаева. Выбрав $\varphi = \varphi_*$ так, чтобы производная $G'(\varphi_*)$ была отрицательна, возьмем в качестве функции V функцию (3.5). Из (3.5) и (3.8) получим, что в области $V > 0$ функция Δ имеет вид

$$\Delta = -1/4 G'(\varphi_*) r^{3/2} \{ [1 + 7\beta^2 + O(\varepsilon)] \varepsilon^2 + O(r^{1/2}) \}$$

Выбором ε можно добиться, чтобы при достаточно малых r эта функция была положительна. Отсюда, согласно теореме Четаева, следует неустойчивость неподвижной точки. Теорема 5 доказана.

4. Случай III. Отображение (1.2) имеет вид

$$x_1 = -x + \sum_{m+n=2}^{\infty} a_{mn} x^m y^n, \quad y_1 = -y + \sum_{m+n=2}^{\infty} b_{mn} x^m y^n \quad (4.1)$$

Исследование устойчивости точки $x = y = 0$ в рассматриваемом случае можно свести к случаю II, рассмотренному в п. 3. Для этого вместо отображения T , задаваемого равенствами (4.1), рассмотрим его вторую степень T^2 .

В отображении T^2 члены второй степени полностью отсутствуют и оно представляется рядами вида

$$x_2 = x + a_{30}' x^3 + a_{21}' x^2 y + a_{12}' x y^2 + a_{03}' y^3 + O_4 \quad (4.2)$$

$$y_2 = y + b_{30}' x^3 + b_{21}' x^2 y + b_{12}' x y^2 + b_{03}' y^3 + O_4$$

$$a_{30}' = -2a_{30} - 2a_{20}^2 + 2b_{20}b_{02}, \quad a_{21}' = -2a_{21} + 2a_{20}b_{02} - 2a_{02}b_{20}$$

$$a_{12}' = -2a_{12} + 2a_{20}a_{02} - 2b_{02}^2, \quad a_{03}' = -2a_{03}$$

$$b_{30}' = -2b_{30}, \quad b_{21}' = -2b_{21} - 2a_{20}^2 + 2b_{20}b_{02} \quad (4.3)$$

$$b_{12}' = -2b_{12} + 2a_{20}b_{02} - 2a_{02}b_{20}, \quad b_{03}' = -2b_{03} + 2a_{20}a_{02} - 2b_{02}^2$$

Для отображения (4.2) справедлива теорема 5. Только при вычислении функции $G(\varphi)$ нужно в (3.9) величины a_{mn} , b_{mn} заменить на величины a_{mn}' , b_{mn}' из (4.3).

5. Исследование случая IV. Имеем отображение

$$x_1 = x + y + \sum_{m+n=2}^{\infty} a_{mn} x^m y^n, \quad y_1 = y + \sum_{m+n=2}^{\infty} b_{mn} x^m y^n \quad (5.1)$$

Ниже будет доказано следующее утверждение.

Теорема 6. Если $b_{20} \neq 0$, то неподвижная точка $x = y = 0$ неустойчива. Если же $b_{20} = 0$, то при выполнении неравенства $2b_{30} + b_{11}^2 < 0$ имеет место устойчивость, а при $2b_{30} + b_{11}^2 > 0$ — неустойчивость.

Исследование свойств отображения удобнее осуществить, если предварительно привести его к простейшей (нормальной) форме [3, 7]. При этом целесообразно упрощать не два равенства (5.1), задающие отображение, а одну функцию $\Gamma(x, y)$, являющуюся производящей функцией этого отображения, а нелинейную нормализующую замену переменных $x, y \rightarrow u, v$ осуществить при помощи универсального канонического преобразования с производящей функцией $S(u, v)$.

Производящая функция отображения (5.1) имеет вид

$$\Gamma = xy + \frac{1}{2} y^2 + \sum_{k=3}^{\infty} \Gamma_k(x, y), \quad \Gamma_k = \sum_{m+n=k} \gamma_{mn} x^m y^n \quad (5.2)$$

Коэффициенты γ_{mn} выражаются через коэффициенты рядов (5.1). В частности $\gamma_{30} = -1/3 b_{20}$, $\gamma_{40} = -1/4 (b_{30} - b_{20}b_{11})$. Отображение (5.1) задается неявно соотношениями

$$x_1 = x + y_1 + \frac{\partial \Gamma_3}{\partial y_1} + \frac{\partial \Gamma_4}{\partial y_1} + O_4, \quad y = y_1 + \frac{\partial \Gamma_3}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_4}{\partial x} + O_4 \quad (5.3)$$

Вместо x, y введем новые переменные u, v при помощи производящей функции

$$S = uy + \sum_{k=3}^{\infty} S_k(u, y), \quad S_k = \sum_{m+n=k} s_{mn} u^m y^n \quad (5.4)$$

и соотношений

$$x = u + \frac{\partial S_3}{\partial y} + \frac{\partial S_4}{\partial y} + O_4, \quad v = y + \frac{\partial S_3}{\partial u} + \frac{\partial S_4}{\partial u} + O_4 \quad (5.5)$$

В новых переменных имеем отображение $u, v \rightarrow u_1, v_1$, задающееся производящей функцией

$$W(u, v_1) = uv_1 + \frac{1}{2} v_1^2 + \sum_{k=3}^{\infty} W_k(u, v_1), \quad W_k = \sum_{m+n=k} w_{mn} u^m v_1^n \quad (5.6)$$

и соотношениями

$$u_1 = u + v_1 + \frac{\partial W_3}{\partial v_1} + \frac{\partial W_4}{\partial v_1} + O_4, \quad v = v_1 + \frac{\partial W_3}{\partial u} + \frac{\partial W_4}{\partial u} + O_4 \quad (5.7)$$

Подберем формы S_3, S_4, \dots в функции S так, чтобы максимально упростить формы W_3, W_4, \dots в функции W . Из (5.3), (5.5) и (5.7) находим, что

$$W_3(u, v_1) \equiv \Gamma_3(u, v_1) + S_3(u, v_1) - S_3(u + v_1, v_1) \quad (5.8)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях u, v_1 , получаем отсюда такие равенства:

$$w_{30} = \gamma_{30}, \quad w_{21} = \gamma_{21} - 3s_{30} \quad (5.9)$$

$$w_{12} = \gamma_{12} - 3s_{30} - 2s_{21}, \quad w_{03} = \gamma_{03} - s_{30} - s_{21} - s_{12}$$

Пусть $b_{20} \neq 0$. Тогда выбором коэффициентов формы S_3 можно уничтожить все коэффициенты формы W_3 , кроме $w_{30} = \gamma_{30} = -1/3 b_{20}$. Согласно (5.9), для этого достаточно положить

$$s_{30} = 1/3 \gamma_{21}, \quad s_{21} = 1/2 (\gamma_{12} - \gamma_{21}), \quad s_{12} = \gamma_{03} + 1/6 \gamma_{21} - 1/2 \gamma_{12}, \quad s_{03} = 0 \quad (5.10)$$

При таком выборе S_3 нормализованная в членах третьей степени производящая функция (5.6) имеет вид

$$W = uv_1 + 1/2 v_1^2 + \gamma_{30} u^3 + O_4$$

а нормализованное в членах второй степени отображение $u, v \rightarrow u_1, v_1$ имеет такую форму:

$$u_1 = u + v + b_{20} u^2 + O_3, \quad v_1 = v + b_{20} u^2 + O_3 \quad (5.11)$$

Докажем утверждение теоремы 6 о неустойчивости при $b_{20} \neq 0$ при помощи теоремы Четаева. Предварительно сделаем замену переменных $u = b_{20}^{-1} \xi$, $v = b_{20}^{-1} \eta$. В новых переменных отображение (5.11) принимает более простой вид

$$\xi_1 = \xi + \eta + \xi^2 + O_3, \quad \eta_1 = \eta + \xi^2 + O_3 \quad (5.12)$$

Пусть $V = \xi\eta$, а область $V > 0$ задается неравенствами $\xi > 0, \eta > 0$. Для разности $\Delta = V(TP) - V(P)$ получаем из (5.12) такое выражение

$$\Delta = \eta^2 (1 + O_2) + \xi^3 (1 + O_1) + \xi^2\eta (2 + O_1)$$

При достаточно малых ξ, η функция Δ положительна в области $V > 0$. Неустойчивость при $b_{20} \neq 0$ доказана.

Пусть теперь $b_{20} = 0$. Тогда выбором коэффициентов формы S_3 в соответствии с формулами (5.10) форма W_3 уничтожается полностью. При $W_3 \equiv 0$ из (5.3), (5.5) и (5.7) получаем тождество

$$W_4(u, v_1) \equiv \Gamma_4(u, v_1) + K_4(u, v_1) + S_4(u, v_1) - S_4(u + v_1, v_1) \quad (5.13)$$

$$K_4 = \frac{\partial \Gamma_3(u, v_1)}{\partial u} \frac{\partial S_3(u, v_1)}{\partial v_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_3(u + v_1, v_1)}{\partial u} \right)^2 \equiv \sum_{m+n=4} k_{mn} u^m v_1^n$$

Коэффициенты k_{mn} выражаются через коэффициенты форм второй степени в отображении (5.1). В частности, нужный в дальнейшем коэффициент $k_{40} = -1/8 b_{11}^2$.

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях u, v_1 , получаем из (5.13) такие равенства

$$w_{40} = \gamma_{40} + k_{40}, \quad w_{31} = \gamma_{31} + k_{31} - 4s_{40}, \quad w_{22} = \gamma_{22} + k_{22} - 6s_{40} - 3s_{31} \quad (5.14)$$

$$w_{13} = \gamma_{13} + k_{13} - 4s_{40} - 3s_{31} - 2s_{22}, \quad w_{04} = \gamma_{04} + k_{04} - s_{40} - s_{31} - s_{22} - s_{13}$$

Выбором коэффициентов $s_{40}, s_{31}, s_{22}, s_{13}$ можно добиться выполнения равенств $w_{31} = w_{22} = w_{13} = w_{04} = 0$. Коэффициент же w_{40} уничтожить нельзя и нормализованная в членах третьей и четвертой степени производящая функция (5.6) будет иметь такой вид

$$W = uv_1 + 1/2 v_1^2 + w_{40}u^4 + O_5 \quad (5.15)$$

$$w_{40} = -1/8 (2b_{30} + b_{11}^2) \quad (5.16)$$

Докажем утверждение теоремы 6 о неустойчивости при выполнении неравенства $2b_{30} + b_{11}^2 > 0$ (то есть при $w_{40} < 0$). Если сделать замену переменных $u = 1/2 |w_{40}|^{-1/2} \xi, v = 1/2 |w_{40}|^{-1/2} \eta$, то нормализованное в членах второй и третьей степени отображение, задаваемое производящей функцией (5.15), запишется в виде

$$\xi_1 = \xi + \eta + \xi^3 + O_4, \quad \eta_1 = \eta + \xi^3 + O_4 \quad (5.17)$$

Функцию Четаева и область $V > 0$ выберем так же, как это сделано выше для отображения (5.12). Для функции Δ имеем выражение

$$\Delta = \eta^2 (1 + O_3) + \xi^4 (1 + O_1) + \xi^3\eta (2 + O_1)$$

При достаточно малых ξ, η функция Δ положительна в области $V > 0$. Отсюда, на основании теоремы Четаева, следует неустойчивость неподвижной точки отображения.

Пусть теперь $2b_{30} + b_{11}^2 < 0$. Покажем устойчивость неподвижной точки отображения. При доказательстве воспользуемся теоремой Мозера. Соответствующее отображение здесь целесообразнее получать не при помощи нормализованной производящей функции (5.15), а при помощи более сложной производящей функции. Именно, выберем $s_{40}, s_{31}, s_{22}, s_{13}$ в уравнениях (5.14) так, чтобы выполнялись соотношения $w_{31} = 2w_{40}, w_{22} = 2w_{40}, w_{13} = w_{40}, w_{04} = 1/5 w_{40}$. Очевидно,

что такой выбор всегда возможен. Тогда производящая функция отображения $u, v \rightarrow u_1, v_1$ будет такой:

$$W = uv_1 + 1/2 v_1^2 + w_{40} (u^4 + 2u^3v_1 + 2u^2v_1^2 + uv_1^3 + 1/5 v_1^4) + O_5 \quad (5.18)$$

Коэффициент w_{40} по-прежнему определен равенством (5.16).

Если в порождаемой функцией (5.18) отображении $u, v \rightarrow u_1, v_1$ сделать замену переменных $u = w_{40}^{-1/2} \xi, v = w_{40}^{-1/2} \eta$, то оно примет следующую форму:

$$\xi_1 = \xi + \eta - (2\xi^3 + 2\xi^2\eta + \xi\eta^2 + 1/5 \eta^3) + O_4 \quad (5.19)$$

$$\eta_1 = \eta - (4\xi^3 + 6\xi^2\eta + 4\xi\eta^2 + \eta^3) + O_4$$

Введем переменные θ, ρ при помощи канонического унивалентного преобразования вида

$$\xi = -(\delta\rho)^{1/3} \operatorname{cn}(\psi, k), \quad \eta = 2(\delta\rho)^{2/3} \operatorname{sn}(\psi, k) \operatorname{dn}(\psi, k) \quad (5.20)$$

Здесь $\operatorname{sn}, \operatorname{cn}, \operatorname{dn}$ — эллиптические функции Якоби, $\delta = 3/4 \pi K^{-1}(k)$, $\psi = 2K(k) \pi^{-1} \theta$, $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, $k = \sqrt{2}/2$.

В переменных θ, ρ отображение (5.19) принимает такую форму:

$$\rho_1 = \rho + O(\rho^{5/3}), \quad \theta_1 = \theta + 4/3 \delta^{4/3} \rho^{1/3} + O(\rho^{2/3}) \quad (5.21)$$

Величины $O(\rho^{5/3})$ и $O(\rho^{2/3})$ 2π -периодичны по θ и аналитичны по θ, ρ при $0 < \rho \ll 1$. Отображение (5.21) удовлетворяет теореме Мозера. Поэтому неподвижная точка устойчива.

Теорема 6 полностью доказана.

6. Случай V. Имеем отображение

$$x_1 = -x + y + \sum_{m+n=2}^{\infty} a_{mn} x^m y^n, \quad y_1 = -y + \sum_{m+n=2}^{\infty} b_{mn} x^m y^n \quad (6.1)$$

Исследование случая V можно свести к изученному в п. 5 случаю IV, если вместо отображения T рассмотреть его вторую степень. Линейная часть отображения T^2 имеет вид $x_2 = x - 2y, y_2 = y$. Если сделать замену переменных $x = \xi, y = -1/2 \eta$, то для второй степени отображения получим равенства, аналогичные (5.1):

$$\xi_2 = \xi + \eta + \sum_{m+n=2}^{\infty} a'_{mn} \xi^m \eta^n, \quad \eta_2 = \eta + \sum_{m+n=2}^{\infty} b'_{mn} \xi^m \eta^n \quad (6.2)$$

Коэффициенты a'_{mn}, b'_{mn} в (6.2) выражаются через коэффициенты исходного отображения (6.1). В частности, нужные для получения выводов об устойчивости коэффициенты будут такими: $b'_{20} = 0, b'_{30} = 4(b_{30} - b_{20}^2), b'_{11} = -2b_{20}$.

Из теоремы 6 теперь вытекает следующее утверждение об устойчивости неподвижной точки $x = y = 0$ отображения (6.1).

Теорема 7. При выполнении неравенства $2b_{30} - b_{20}^2 < 0$ неподвижная точка устойчива, если же $2b_{30} - b_{20}^2 > 0$, то имеет место неустойчивость.

7. Исследование случая VI. Отображение (1.2) записывается в виде

$$x_1 = \cos \alpha x + \sin \alpha y + \sum_{m+n=2}^{\infty} a_{mn} x^m y^n \quad (7.1)$$

$$y_1 = -\sin \alpha x + \cos \alpha y + \sum_{m+n=2}^{\infty} b_{mn} x^m y^n$$

Положив $z = x - iy$, $\rho = \cos \alpha + i \sin \alpha$, запишем отображение (7.1) в комплексной форме

$$z_1 = \rho z + \sum_{m+n=2}^{\infty} f_{mn} z^m \bar{z}^n, \quad \bar{z}_1 = \bar{\rho} \bar{z} + \sum_{m+n=2}^{\infty} \bar{f}_{mn} \bar{z}^m z^n \quad (7.2)$$

Пусть $f_{mn} = \mu_{mn} + i\nu_{mn}$. Для коэффициентов форм второй и третьей степени из (7.2) имеем такие выражения

$$\mu_{20} = 1/4 (a_{20} - a_{02} + b_{11}), \quad \nu_{20} = 1/4 (a_{11} - b_{20} + b_{02}), \quad \mu_{11} = 1/2 (a_{20} + a_{02}) \quad (7.3)$$

$$\nu_{11} = -1/2 (b_{20} + b_{02}), \quad \mu_{02} = 1/4 (a_{20} - a_{02} - b_{11}), \quad \nu_{02} = -1/4 (a_{11} + b_{20} - b_{02})$$

$$\mu_{30} = 1/8 (a_{30} - a_{12} + b_{21} - b_{03}), \quad \nu_{30} = 1/8 (a_{21} - a_{03} - b_{30} + b_{12})$$

$$\mu_{21} = 1/8 (3a_{30} + a_{12} + b_{21} + 3b_{03}), \quad \nu_{21} = 1/8 (a_{21} + 3a_{03} - 3b_{30} - b_{12}) \quad (7.4)$$

$$\mu_{12} = 1/8 (3a_{30} + a_{12} - b_{21} - 3b_{03}), \quad \nu_{12} = -1/8 (a_{21} + 3a_{03} + 3b_{30} + b_{12})$$

$$\mu_{03} = 1/8 (a_{30} - a_{12} - b_{21} + b_{03}), \quad \nu_{03} = -1/8 (a_{21} - a_{03} + b_{30} - b_{12})$$

Производящая функция $\Gamma(z, \bar{z}_1)$ отображения (7.2) имеет вид

$$\Gamma = \rho z \bar{z}_1 + \sum_{k=3}^{\infty} \Gamma_k(z, \bar{z}_1), \quad \Gamma_k = \sum_{m+n=k} \gamma_{mn} z^m \bar{z}_1^n \quad (7.5)$$

Для нужных в дальнейшем коэффициентов γ_{mn} имеем такие выражения:

$$\gamma_{30} = -1/3 \rho \bar{f}_{02}, \quad \gamma_{21} = f_{20}, \quad \gamma_{12} = -\rho^3 \bar{f}_{20}, \quad \gamma_{03} = 1/3 \rho^2 f_{02} \quad (7.6)$$

$$\gamma_{40} = -1/4 \rho \bar{f}_{03} - 1/2 f_{20} \bar{f}_{02}, \quad \gamma_{04} = 1/4 \rho^3 f_{03} - 1/2 \rho^4 f_{02} \bar{f}_{20} \quad (7.7)$$

$$\gamma_{22} = 1/2 \rho f_{21} - 1/2 \rho^2 f_{11} \bar{f}_{11} - \rho^2 f_{02} \bar{f}_{02}$$

В неявной форме отображение (7.2) задается равенствами

$$z_1 = \rho z + \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \bar{z}_1} + \frac{\partial \Gamma_4}{\partial \bar{z}_1} + O_4, \quad \bar{z}_1 = \bar{\rho} \bar{z} + \frac{\partial \Gamma_3}{\partial z} + \frac{\partial \Gamma_4}{\partial z} + O_4 \quad (7.8)$$

Для получения нормальной формы отображения (7.2) введем новые переменные $\zeta, \bar{\zeta}$ при помощи канонического преобразования с производящей функцией $S(\zeta, \bar{z})$:

$$S = \zeta \bar{z} + \sum_{k=3}^{\infty} S_k(\zeta, \bar{z}), \quad S_k = \sum_{m+n=k} s_{mn} \zeta^m \bar{z}^n \quad (7.9)$$

$$z = \zeta + \frac{\partial S_3}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial S_4}{\partial \bar{z}} + O_4, \quad \bar{\zeta} = \bar{z} + \frac{\partial S_3}{\partial \zeta} + \frac{\partial S_4}{\partial \zeta} + O_4 \quad (7.10)$$

В новых переменных отображение $\zeta, \bar{\zeta} \rightarrow \zeta_1, \bar{\zeta}_1$ задается при помощи производящей функции

$$W = \rho \zeta \bar{\zeta}_1 + \sum_{k=3}^{\infty} W_k(\zeta, \bar{\zeta}_1), \quad W_k = \sum_{m+n=k} w_{mn} \zeta^m \bar{\zeta}_1^n \quad (7.11)$$

средством равенств

$$\zeta_1 = \rho \zeta + \frac{\partial W_3}{\partial \bar{\zeta}_1} + \frac{\partial W_4}{\partial \bar{\zeta}_1} + O_4, \quad \bar{\zeta}_1 = \bar{\rho} \bar{\zeta} + \frac{\partial W_3}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_4}{\partial \zeta} + O_4 \quad (7.12)$$

Из (7.8), (7.10) и (7.12) получаем тождество

$$W_3(\zeta, \bar{\zeta}_1) \equiv \Gamma_3(\zeta, \bar{\zeta}_1) + S_3(\zeta, \rho \bar{\zeta}_1) - S_3(\rho \zeta, \bar{\zeta}_1) \quad (7.13)$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $\zeta, \bar{\zeta}_1$, получим равенства

$$w_{30} = \gamma_{30} + (1 - \rho^3) s_{30}, \quad w_{21} = \gamma_{21} + \rho(1 - \rho) s_{21} \quad (7.14)$$

$$w_{12} = \gamma_{12} - \rho(1 - \rho) s_{12}, \quad w_{03} = \gamma_{03} - (1 - \rho^3) s_{03}.$$

Пусть $\rho^3 = 1$, то есть имеет место резонанс третьего порядка ($3\alpha = 2\pi l$, l — целое число). Тогда s_{21} и s_{12} можно взять такими, чтобы величины w_{21} и w_{12} обратились в нуль. Величины же w_{30} и w_{03} уничтожить нельзя и форма W_3 в (7.11) будет иметь вид

$$W_3 = \gamma_{30} \zeta^3 + \gamma_{03} \bar{\zeta}_1^3$$

а нормализованное в членах второй степени отображение задается равенствами

$$\zeta_1 = \rho \zeta + f_{02} \bar{\zeta}^2 + O_3, \quad \bar{\zeta}_1 = \bar{\rho} \bar{\zeta} + \bar{f}_{02} \zeta^2 + O_3 \quad (7.15)$$

Теорема 8. Если $\rho^3 = 1$ и хотя бы одна из величин μ_{02} или ν_{02} из (7.3) отлична от нуля, то неподвижная точка $x = y = 0$ отображения (7.1) неустойчива.

Для доказательства предварительно несколько упростим отображение (7.15), введя новые переменные $\zeta^*, \bar{\zeta}^*$ по формулам

$$\zeta = \zeta^* e^{i\psi}, \quad \bar{\zeta} = \bar{\zeta}^* e^{-i\psi}$$

$$\mu_{02} = \delta \cos 3\psi, \quad \nu_{02} = \delta \sin 3\psi, \quad \delta = (\mu_{02}^2 + \nu_{02}^2)^{1/2}$$

В переменных $\zeta^*, \bar{\zeta}^*$ отображение (7.15) станет таким

$$\zeta_1^* = \rho \zeta^* + \delta \bar{\zeta}^{*2} + O_3, \quad \bar{\zeta}_1^* = \bar{\rho} \bar{\zeta}^* + \delta \zeta^{*2} + O_3 \quad (7.16)$$

Рассмотрим третью степень T^3 этого отображения

$$\zeta_3^* = \zeta^* + 3\delta \bar{\rho} \bar{\zeta}^{*2} + O_3, \quad \bar{\zeta}_3^* = \bar{\zeta}^* + 3\delta \rho \zeta^{*2} + O_3 \quad (7.17)$$

В вещественных переменных ξ, η ($\zeta^* = \xi - i\eta$) отображение (7.17) записывается в форме, аналогичной (3.1):

$$\xi_3 = \xi + 3\delta [(\xi^2 - \eta^2) \cos \alpha + 2\xi\eta \sin \alpha] + O_3 \quad (7.18)$$

$$\eta_3 = \eta + 3\delta [(\xi^2 - \eta^2) \sin \alpha - 2\xi\eta \cos \alpha] + O_3$$

Так как правые части равенств (7.18) при $\delta \neq 0$ содержат члены второй степени относительно ξ, η , то утверждение теоремы 8 вытекает из теоремы 4.

Пусть теперь $\rho^3 \neq 1$. В этом случае, согласно (7.14), коэффициенты s_{mn} в форме S_3 функции (7.9) можно выбрать так, чтобы полностью уничтожить форму W_3 в производящей функции (7.11). При таком выборе S_3 из (7.8), (7.10) и (7.12) следует тождество

$$W_4(\zeta, \bar{\zeta}_1) \equiv \Gamma_4(\zeta, \bar{\zeta}_1) + \bar{\rho} \frac{\partial \Gamma_3(\zeta, \bar{\zeta}_1)}{\partial \zeta} \frac{\partial S_3(\zeta, \rho \bar{\zeta}_1)}{\partial \bar{\zeta}_1} + S_4(\zeta, \rho \bar{\zeta}_1) - S_4(\rho \zeta, \bar{\zeta}_1) \quad (7.19)$$

Отсюда получаем следующие выражения для коэффициентов формы W_4 из (7.11):

$$w_{40} = \gamma_{40} + \frac{3\gamma_{30}\gamma_{21}}{\rho(\rho-1)} - (\rho^4 - 1) s_{40},$$

$$w_{31} = \gamma_{31} + \frac{2\gamma_{21}^2}{\rho(\rho-1)} - \frac{6\gamma_{30}\gamma_{12}}{\rho-1} - \rho(\rho^2 - 1) s_{31}$$

$$w_{22} = \gamma_{22} - \frac{9\rho^2 \gamma_{30} \gamma_{03}}{\rho^3 - 1} + \frac{(1 - 4\rho) \gamma_{21} \gamma_{12}}{\rho(\rho - 1)} \quad (7.20)$$

$$w_{13} = \gamma_{13} - \frac{2\gamma_{12}^2}{\rho - 1} - \frac{6\rho^2 \gamma_{03} \gamma_{21}}{\rho^3 - 1} + \rho(\rho^2 - 1) s_{13}, \quad w_{04} = \gamma_{04} - \frac{3\rho^2 \gamma_{03} \gamma_{12}}{\rho^3 - 1} + (\rho^4 - 1) s_{04}$$

Пусть помимо условия $\rho^3 \neq 1$ выполняется также условие $\rho^4 \neq 1$, то есть отсутствует и резонанс четвертого порядка ($2\alpha \neq l\pi$, l — целое число). Тогда, согласно (7.20), можно так выбрать s_{40} , s_{31} , s_{13} , s_{04} , что величины w_{40} , w_{31} , w_{13} , w_{04} обратятся в нуль. Коэффициент же w_{22} уничтожить нельзя и нормализованная до членов четвертой степени производящая функция (7.11) имеет вид

$$W = \rho \bar{\zeta} \bar{\zeta}_1 + w_{22} \bar{\zeta}^2 \bar{\zeta}_1^2 + O_5$$

Соответствующее нормализованное до членов третьей степени отображение будет таким:

$$\zeta_1 = \rho \bar{\zeta} + f_{21}^* \bar{\zeta}^2 \bar{\zeta} + O_4, \quad \bar{\zeta}_1 = \bar{\rho} \bar{\zeta} + \bar{f}_{21}^* \bar{\zeta}^2 \zeta + O_4 \quad (7.21)$$

где $f_{21}^* = 2\bar{\rho} w_{22}$. Из условия сохранения площади следует соотношение $\rho \bar{f}_{21}^* + \bar{\rho} f_{21}^* = 0$.

Положим $f_{21}^* = \mu_{21}^* + i\nu_{21}^*$. Из (7.6), (7.7) и (7.20) получаем такие выражения для величин μ_{21}^* и ν_{21}^* :

$$\mu_{21}^* = \mu_{21} + (3 + 4 \cos \alpha) (\mu_{20}^2 + \nu_{20}^2) - \frac{\mu_{02}^2 + \nu_{02}^2}{1 + 2 \cos \alpha} \quad (7.22)$$

$$\nu_{21}^* = \nu_{21} + \frac{\sin \alpha (1 - 4 \cos \alpha) (\mu_{20}^2 + \nu_{20}^2)}{1 - \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha (\mu_{02}^2 + \nu_{02}^2)}{(1 + 2 \cos \alpha) (1 - \cos \alpha)}$$

Входящие сюда величины μ_{mn} , ν_{mn} выражаются через коэффициенты отображения (7.1) по формулам (7.3), (7.4). Из условия сохранения площади следует, что величины μ_{21}^* , ν_{21}^* связаны тождеством

$$\cos \alpha \mu_{21}^* + \sin \alpha \nu_{21}^* = 0 \quad (7.23)$$

При отсутствии резонансов третьего и четвертого порядка справедливо следующее утверждение.

Теорема 9. Если $\mu_{21}^{*2} + \nu_{21}^{*2} \neq 0$, то неподвижная точка $x = y = 0$ отображения (7.1) устойчива.

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, запишем отображение (7.21) в вещественных переменных ρ , θ , вводимых равенствами

$$\zeta = -i \sqrt{2\rho} e^{i\theta}, \quad \bar{\zeta} = i \sqrt{2\rho} e^{-i\theta}$$

В переменных ρ , θ имеем отображение

$$\rho_1 = \rho + O(\rho^{5/2}), \quad \theta_1 = \theta + \alpha + 2(\cos \alpha \nu_{21}^* - \sin \alpha \mu_{21}^*) \rho + O(\rho^{3/2}) \quad (7.24)$$

Здесь величины $O(\rho^{5/2})$ и $O(\rho^{3/2})$ 2π -периодичны по θ и аналитичны по θ , ρ при $0 < \rho \ll 1$.

Если $\mu_{21}^{*2} + \nu_{21}^{*2} \neq 0$, то величина $\cos \alpha \nu_{21}^* - \sin \alpha \mu_{21}^*$ отлична от нуля в силу тождества (7.23). Следовательно для отображения (7.24) справедлива теорема Мозера и неподвижная точка $\rho = 0$ (а, следовательно, и $x = y = 0$) устойчива.

Рассмотрим теперь случай резонанса четвертого порядка, когда $\rho^4 = 1$. В этом случае величины s_{31} и s_{13} в (7.20) можно выбрать так, чтобы коэффициенты w_{31}

и w_{13} формы W_4 из (7.11) обратились в нуль. Коэффициент w_{22} по-прежнему нельзя уничтожить, а при $\rho^4 = 1$ нельзя также уничтожить коэффициенты w_{40} и w_{04} . Поэтому нормализованная до членов четвертой степени функция (7.11) будет такой:

$$W = \rho \zeta \bar{\zeta}_1 + w_{22} \zeta^2 \bar{\zeta}_1^2 + w_{40} \zeta^4 + w_{04} \bar{\zeta}_1^4 + O_5$$

Соответствующее отображение имеет вид

$$\zeta_1 = \rho \zeta + f_{21}^* \zeta^2 \bar{\zeta} + f_{03}^* \bar{\zeta}^3 + O_4 \quad (7.25)$$

$$\bar{\zeta}_1 = \bar{\rho} \bar{\zeta} + \bar{f}_{21}^* \bar{\zeta}^2 \zeta + \bar{f}_{03}^* \zeta^3 + O_4$$

где по-прежнему $f_{21}^* = 2\bar{\rho}w_{22} = \mu_{21}^* + i\nu_{21}^*$, а $f_{03}^* = 4\rho w_{04}$.

Положив $f_{03}^* = \mu_{03}^* + i\nu_{03}^*$ и учтя равенство $\rho^4 = 1$, получим из (7.20), (7.6) и (7.7) такие выражения для μ_{03}^* и ν_{03}^* :

$$\mu_{03}^* = \mu_{03} - 2(\mu_{20}\mu_{02} + \nu_{20}\nu_{02}), \quad \nu_{03}^* = \nu_{03} - 2(\mu_{20}\nu_{02} - \mu_{02}\nu_{20}) \quad (7.26)$$

Величины μ_{mn}^* , ν_{mn}^* выражаются через коэффициенты отображения (7.1) по формулам (7.3), (7.4).

Далее, при $\rho^4 = 1$ имеем $\cos \alpha = 0$. Поэтому из тождества (7.23) следует, что при резонансе четвертого порядка величина ν_{21}^* равна нулю. Величина же μ_{21}^* , вычисленная по формуле (7.22), будет такой:

$$\mu_{21}^* = \mu_{21} + 3(\mu_{20}^2 + \nu_{20}^2) - (\mu_{02}^2 + \nu_{02}^2) \quad (7.27)$$

Теорема 10. При выполнении неравенства $\mu_{21}^{*2} > \mu_{03}^{*2} + \nu_{03}^{*2}$ неподвижная точка $x = y = 0$ отображения (7.1) устойчива. Если же $\mu_{21}^{*2} < \mu_{03}^{*2} + \nu_{03}^{*2}$, то имеет место неустойчивость.

Доказательство осуществляется применением теоремы 5 к четвертой степени T^4 отображения (7.25). Для этой цели сделаем сначала замену переменных

$$\zeta = \zeta^* e^{i\psi}, \quad \bar{\zeta} = \bar{\zeta}^* e^{-i\psi}$$

$$\mu_{03}^* = \kappa \cos 4\psi, \quad \nu_{03}^* = \kappa \sin 4\psi, \quad \kappa = (\mu_{03}^{*2} + \nu_{03}^{*2})^{1/2}$$

Отображение (7.25) принимает вид

$$\zeta_1^* = \rho \zeta^* + \mu_{21}^* \zeta^{*2} \bar{\zeta}^{*2} + \mu_{03}^* \bar{\zeta}^{*3} + O_4, \quad \bar{\zeta}_1^* = \bar{\rho} \bar{\zeta}^* + \mu_{21}^* \bar{\zeta}^{*2} \zeta^{*2} + \mu_{03}^* \zeta^{*3} + O_4$$

Для четвертой степени этого отображения имеем

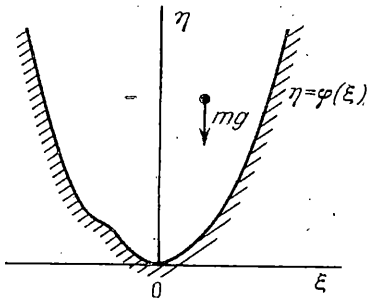
$$\zeta_4^* = \zeta^* + 4\bar{\rho} \mu_{21}^* \zeta^{*2} \bar{\zeta}^{*2} + 4\bar{\rho} \mu_{03}^* \bar{\zeta}^{*3} + O_4, \quad \bar{\zeta}_4^* = \bar{\zeta}^* + 4\rho \mu_{21}^* \bar{\zeta}^{*2} \zeta^{*2} + 4\rho \mu_{03}^* \zeta^{*3} + O_4 \quad (7.28)$$

Положив $\zeta^* = 1/2(\xi + i \sin \alpha \eta)$ ($\sin \alpha = \pm 1$), получим из (7.28) вещественную форму отображения, аналогичную (3.1) при отсутствии членов второй степени:

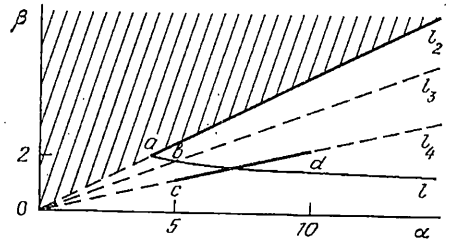
$$\xi_4 = \xi + \mu_{21}^* \eta (\xi^2 + \eta^2) + \kappa \eta (\eta^2 - 3\xi^2) + O_4 \quad (7.29)$$

$$\eta_4 = \eta - \mu_{21}^* \xi (\xi^2 + \eta^2) - \kappa \xi (\xi^2 - 3\eta^2) + O_4$$

Для отображения (7.29) функция $G(\varphi)$ из п. 3 имеет вид $G(\varphi) = \mu_{21}^* + \kappa \cos 4\varphi$. Если $|\mu_{21}^*| > \kappa$, то уравнение $G(\varphi) = 0$, очевидно, не имеет вещественных корней, а, если $|\mu_{21}^*| < \kappa$, то существует корень $\varphi = \varphi_*$ такой, что $G'(\varphi_*) < 0$. Отсюда и из теоремы 5 следует справедливость теоремы 10.



Фиг. 2



Фиг. 3

8. Об устойчивости периодического движения шара над цилиндрической поверхностью. Рассмотрим однородный шар, движущийся в поле тяжести над неподвижным абсолютно гладким желобом с цилиндрической поверхностью, образующая которой горизонтальна. Движение отнесем к неподвижной системе координат $O\xi\eta\zeta$, ось $O\eta$ которой вертикальна, а ось $O\xi$ направлена вдоль образующей желоба. Поверхность желоба задается уравнением $\eta = \varphi(\xi)$.

При движении шар время от времени соударяется с поверхностью желоба. Удар считаем абсолютно упругим. В сделанных предположениях проекция скорости центра масс шара на ось $O\xi$ во все время движения остается постоянной. Без ограничения общности будем считать ее равной нулю, и если пренебречь размерами шара, то приходим к задаче о движении тяжелой материальной точки в плоскости $\zeta = 0$ над кривой $\eta = \varphi(\xi)$ (фиг. 2).

Будем предполагать, что кривая $\eta = \varphi(\xi)$ в начале координат $\xi = \eta = 0$ касается оси $O\xi$, а функция $\varphi(\xi)$ аналитична при достаточно малых $|\xi|$.

Существует периодическое движение точки, когда ее траектория лежит на вертикальной оси $O\eta$, а сама точка в результате соударений с кривой $\eta = \varphi(\xi)$ в начале координат $\xi = \eta = 0$ периодически подскакивает на некоторую высоту h .

Обозначим через a_k значение k -й производной функции $\varphi(\xi)$ при $\xi = 0$ и введем обозначения $\kappa_0 = a_2 h$, $\kappa_1 = a_3 h^2$, $\kappa_2 = a_4 h^3$, ... Тогда функция $\varphi(\xi)$ запишется в виде такого степенного ряда:

$$\varphi(\xi) = \frac{\kappa_0}{2h} \xi^2 + \frac{\kappa_1}{6h^2} \xi^3 + \frac{\kappa_2}{24h^3} \xi^4 + \dots \quad (8.1)$$

Цель данного раздела работы — получение условий орбитальной устойчивости упомянутого периодического движения точки вдоль вертикали в зависимости от высоты подскока h и от формы кривой $\eta = \varphi(\xi)$ в окрестности начала координат (то есть от безразмерных параметров $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \dots$). Некоторые частные результаты решения этой задачи получены ранее в [14]. Анализ основывается на результатах п. 1—7 по устойчивости неподвижных точек сохраняющих площадь отображений.

8.1. *Отображение.* Примем величины ξ и $q = \eta - \varphi(\xi)$ за обобщенные координаты. Во все время движения $q \geq 0$. Пусть mg — вес материальной точки. Введем импульсы

$$p_\xi = m\dot{\xi} + m(\dot{q} + \varphi'(\xi))\varphi', \quad p = m\dot{\eta} = m(\dot{q} + \varphi'(\xi)) \quad (8.2)$$

Функция Гамильтона свободного движения точки (когда $q > 0$) имеет вид

$$H = \frac{1}{2m}(1 + \varphi'^2)p^2 - \frac{1}{m}\varphi'pp_\xi + \frac{1}{2m}p_\xi^2 + mg(q + \varphi(\xi)) \quad (8.3)$$

При ударе (когда $q = 0$) импульс p_ξ не изменяется [9], а до и послеударные значения p^- и p^+ импульса p связаны соотношением, получающимся из интеграла $H = \text{const}$ или из равенства $\dot{q}^+ = -\dot{q}^-$. Имеем

$$p^+ = -p^- + \frac{2\varphi'}{1 + \varphi'^2} p_\xi \quad (8.4)$$

На рассматриваемом периодическом движении точки вдоль вертикали $H = mgh$. Возмущенное движение будем рассматривать на этом же уровне энергии.

Пусть непосредственно перед первым соударением $\xi = hx$, $p_\xi = m\sqrt{2gh}y$. При этом $q = 0$, значение p отрицательно и определяется из интеграла $H = mgh$:

$$p^- = m\sqrt{2gh} [-1 + 1/4 (2\kappa_0^2 + \kappa_0) x^2 + \kappa_0 xy + 1/2 y^2 + 1/2 (\kappa_1 + 6\kappa_0\kappa_1) x^3 + 1/2 \kappa_1 x^2 y] + O_4$$

Из (8.4) находим значение импульса p непосредственно после удара:

$$p^+ = m\sqrt{2gh} [1 - 1/4 (2\kappa_0^2 + \kappa_0) x^2 + \kappa_0 xy - 1/2 y^2 - 1/12 (\kappa_1 + 6\kappa_0\kappa_1) x^3 + 1/2 \kappa_1 x^2 y] + O_4 \quad (8.5)$$

Обозначим нижним индексом «нуль» значения величин ξ , η , $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$ непосредственно после удара. Используя (8.1), (8.2), находим

$$\begin{aligned} \xi_0 &= hx, \quad \eta_0 = (1/2\kappa_0 x^2 + 1/6 \kappa_1 x^3) h + O_4, \quad \dot{\eta}_0 = m^{-1} p^+ \\ \dot{\xi}_0 &= \sqrt{2gh} [-\kappa_0 x + y - 1/2 \kappa_1 x^2 + 1/12 (6\kappa_0^3 + 3\kappa_0^2 - 2\kappa_2) x^3 - \kappa_0^2 x^2 y + 1/2 \kappa_0 xy^2] + O_4 \end{aligned} \quad (8.6)$$

После соударения начинается свободный полет материальной точки, во время которого

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \dot{\xi}_0 t + \xi_0, \quad \dot{\xi}(t) = \dot{\xi}_0 \\ \eta(t) &= -1/2 gt^2 + \dot{\eta}_0 t + \eta_0, \quad \dot{\eta}(t) = -gt + \dot{\eta}_0 \end{aligned} \quad (8.7)$$

Через промежуток времени t_1 точка снова попадет на кривую $\eta = \varphi(\xi)$ и произойдет второе соударение. Непосредственно перед ним имеем $\xi = hx_1$, $p_\xi = m\sqrt{2gh}y_1$. Величины x_1 , y_1 будут аналитическими функциями от x , y . Они и задают искомое отображение T .

Величина t_1 есть наименьший положительный корень уравнения $\eta(t_1) = \varphi(\xi(t_1))$. Учитывая (8.1), (8.5)–(8.7), находим t_1 в виде степенного ряда относительно x , y :

$$t_1 = 1/2 (2h/g)^{1/2} [4 - \kappa_0 (8\kappa_0^2 - 2\kappa_0 + 1) x^2 + 16\kappa_0^2 xy - 2(4\kappa_0 + 1) y^2] + O_3 \quad (8.8)$$

Подставив это значение $t = t_1$ в (8.7) и учтя (8.2) и (8.6), получим искомое отображение в виде

$$x_1 = ax + by + \sum_{m+n=2}^3 k_{mn} x^m y^n + O_4, \quad y_1 = cx + dy + \sum_{m+n=2}^3 l_{mn} x^m y^n + O_4 \quad (8.9)$$

$$a = 1 - 4\kappa_0, \quad b = 4, \quad c = -2\kappa_0 (1 - 2\kappa_0), \quad d = 1 - 4\kappa_0$$

$$k_{20} = -2\kappa_1, \quad k_{11} = 0, \quad k_{02} = 0$$

$$l_{20} = -\kappa_1 (8\kappa_0^2 - 6\kappa_0 + 1), \quad l_{11} = -4\kappa_1 (1 - 4\kappa_0), \quad l_{02} = -8\kappa_1$$

$$k_{30} = 2/3 [3\kappa_0^3 (4\kappa_0^2 + 1) - \kappa_2], \quad k_{21} = -\kappa_0 (24\kappa_0^2 + 2\kappa_0 + 1)$$

$$k_{12} = 4\kappa_0 (6\kappa_0 + 1), \quad k_{03} = -2(4\kappa_0 + 1)$$

$$l_{30} = -1/2 \kappa_0^2 (48\kappa_0^3 - 20\kappa_0^2 + 8\kappa_0 - 1) + 2\kappa_1^2 (1 - 4\kappa_0) -$$

$$- 1/3 \kappa_2 (1 - 4\kappa_0) (8\kappa_0^2 - 4\kappa_0 + 1)$$

$$l_{21} = 2 [\kappa_0^2 (36\kappa_0^2 - 8\kappa_0 + 1) + 4\kappa_1^2 - \kappa_2 (1 - 4\kappa_0)^2]$$

$$l_{12} = -\kappa_0 (72\kappa_0^2 - 2\kappa_0 - 1) - 8\kappa_2 (1 - 4\kappa_0)$$

$$l_{03} = 4\kappa_0 (1 + 6\kappa_0) - 32/3 \kappa_2$$

Исследование орбитальной устойчивости периодического движения материальной точки сводится к исследованию устойчивости неподвижной точки $x = y = 0$ отображения (8.9).

8.2. *Результаты исследования устойчивости.* Не останавливаясь на несложных технических деталях, приведем сводку результатов исследования по алгоритмам п. 1—7.

Если $\kappa_0 > 1/2$, то неподвижная точка $x = y = 0$ отображения (8.9) неустойчива. Это означает, что для орбитальной неустойчивости периодического движения материальной точки вдоль вертикали достаточно, чтобы высота подскока точки была больше половины радиуса кривизны кривой (в начале координат, где происходит соударения в невозмущенном движении). Этот результат получается из анализа линейной части отображения, без привлечения членов второй и более высоких степеней в правых частях равенств (8.9).

Пусть κ_0 принадлежит отрезку $[0, 1/2]$. При выполнении неравенства

$$0 < \kappa_0 < 1/2 \tag{8.10}$$

неподвижная точка $x = y = 0$ устойчива в линейном приближении, а при $\kappa_0 = 0$ и $\kappa_0 = 1/2$ она в линейном приближении неустойчива. Для κ_0 из отрезка $[0, 1/2]$ линейного анализа недостаточно. Строгое исследование требует учета нелинейных членов в отображении (8.9). Получены следующие выводы.

Пусть $\kappa_0 = 0$ (при этом кривизна кривой $\eta = \varphi(\xi)$ в начале координат равна нулю). Тогда при $\kappa_1 \neq 0$ имеем неустойчивость; если же $\kappa_1 = 0$, то при $\kappa_2 < 0$ имеет место неустойчивость, а при $\kappa_2 > 0$ устойчивость (независимо от высоты подскока точки в невозмущенном движении).

Если $\kappa_0 = 1/2$, то при выполнении неравенства $\kappa_2 < 6\kappa_1^2 + 3/2$ неподвижная точка отображения устойчива; если же последнее неравенство выполняется с противоположным знаком, то имеет место неустойчивость.

Для значений κ_0 из области (8.10) результаты нелинейного анализа устойчивости таковы. Если $\kappa_0 \neq 3/8$ (нет резонанса третьего порядка) и $\kappa_0 \neq 1/4$ (нет резонанса четвертого порядка) и выполняется неравенство

$$\kappa_2 \neq 4\kappa_0^2 (\kappa_0 + 1) + \frac{\kappa_1^2 (5 - 16\kappa_0)}{\kappa_0 (3 - 8\kappa_0)}$$

то имеет место устойчивость.

Если $\kappa_0 = 3/8$, а $\kappa_1 \neq 0$, то неподвижная точка отображения неустойчива. Если же при $\kappa_0 = 3/8$ имеем $\kappa_1 = 0$, но при этом $\kappa_2 \neq 99/128$, то имеет место устойчивость.

Если $\kappa_0 = 1/4$ и либо $\kappa_2 > 12\kappa_1^2 + 15/32$, либо $\kappa_2 < 15/64$, то неподвижная точка отображения устойчива; если же $15/64 < \kappa_2 < 12\kappa_1^2 + 15/32$, то имеет место неустойчивость.

8.3. *Примеры.* Рассмотрим приложение полученных общих выводов об устойчивости в некоторых случаях движения материальной точки над конкретно заданной кривой $\eta = \varphi(\xi)$.

а) Дуга окружности $\xi^2 + (\eta - R)^2 = R^2$. Вертикальное периодическое движение орбитально устойчиво при $0 < h \leq 1/2 R$ и неустойчиво при $h > 1/2 R$.

б) Парабола $\varphi(\xi) = (2p)^{-1} \xi^2$. Если высота подскока больше расстояния от

вершины параболы до ее фокуса ($h > 1/2p$), то периодическое движение точки орбитально неустойчиво; если же $0 < h \leq 1/2p$, то устойчиво.

в) Дуга кривой $\eta = a(1 - \cos(\xi b^{-1}))$ ($a > 0, b > 0$). При $0 < h \leq b^2(2a)^{-1}$ имеет место орбитальная устойчивость, а при $h > b^2(2a)^{-1}$ — неустойчивость.

г) Дуга гиперболы $\xi^2 a^{-2} - (\eta + b)^2 b^{-2} + 1 = 0$. Если $0 < h \leq a^2(2b)^{-1}$, то периодическое движение орбитально устойчиво, если же $h > a^2(2b)^{-1}$, то неустойчиво.

д) Цепная линия $\varphi(\xi) = a \operatorname{ch}(\xi a^{-1}) - a$. При $0 < h \leq (2a)^{-1}$ движение орбитально устойчиво, а при $h > (2a)^{-1}$ — неустойчиво.

е) Дуга циклоиды $\xi = R(\tau + \sin \tau)$, $\eta = R(1 - \cos \tau)$. Здесь $\varphi(\xi) = \xi^2(2R)^{-1} + \xi^4(384R^3)^{-1} + \dots$. Если $0 < h \leq 2R$, то имеет место орбитальная устойчивость, а при $h > 2R$ — неустойчивость.

ж) Дуга эллипса $\xi^2 a^{-2} + (\eta - b)^2 b^{-2} = 1$. Результаты исследования удобно представить графически в плоскости безразмерных параметров $\alpha = a^2 b^{-2}$, $\beta = hb^{-1}$ (фиг. 3).

Если $\beta > 1/2\alpha$, то периодическое движение орбитально неустойчиво. На фиг. 3 прямая $\beta = 1/2\alpha$ обозначена через l_2 , область неустойчивости заштрихована.

Для значений α, β , лежащих на прямой $\beta = 1/2\alpha$, при $0 < \alpha < 4$ движение орбитально устойчиво, а при $\alpha > 4$ неустойчиво. Неисследованными остались значения α, β , отвечающие точке $a(4, 2)$, разделяющей на прямой $\beta = 1/2\alpha$ интервалы устойчивости и неустойчивости.

В области $\beta < 1/2\alpha$ вне прямых $\beta = 3/8\alpha$ и $\beta = 1/4\alpha$, на которых реализуются резонанс третьего и четвертого порядка соответственно (на фиг. 3 эти прямые обозначены через l_3 и l_4), имеет место устойчивость при всех α, β , кроме, быть может, значений α, β , принадлежащих кривой $\beta = 4\alpha(3\alpha - 4)^{-1}$ (на фиг. 3 эта кривая обозначена буквой l).

Для значений параметров α, β , принадлежащих прямой $\beta = 3/8\alpha$ периодическое движение материальной точки орбитально устойчиво всюду, кроме, быть может одной точки $b(44/9, 11/6)$, являющейся точкой пересечения этой прямой с кривой l .

На прямой $\beta = 1/4\alpha$ при $0 < \alpha < 5$ или $\alpha > 10$ имеет место орбитальная устойчивость, а при $5 < \alpha < 10$ — неустойчивость. Неисследованными остались точки $c(5, 5/4)$ и $d(10, 5/2)$, разделяющие указанные интервалы устойчивости и неустойчивости.

Строгое решение задачи об устойчивости для значений параметров α, β , отвечающих точкам a, b, c, d и точкам кривой l , лежащим в области $\beta < 1/2\alpha$ вне прямых l_3 и l_4 , требует учета в отображении (8.9) членов выше третьей степени относительно x, y .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00220).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пуанкаре А. Избр. тр. Т. 2. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1972. 999 с.
2. Birkhoff G. D. Dynamical systems with two degrees of freedom//Trans. Amer. Math. Soc. 1917. V. 18. № 2. P. 199—300.
3. Birkhoff G. D. Surface transformations and their dynamical applications//Acta Math. 1922. V. 43. March. P. 1—119.
4. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
5. Levi-Civita T. Sopra alcuni criteri di instabilita//Ann. di Mat. Pura et Appl. Ser. 3. 1901. V. 5. P. 221—307.
6. Зигель К. Л. Лекции по небесной механике. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 300 с.
7. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.

8. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
9. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1937. 500 с.
10. *Markeev A. A.* The Method of Pointwise Mappings in the Stability Problem of Two-Segment Trajectories of the Birkhoff Billiards. *Dynamical Systems in Classical Mechanics. Advances in the Mathematical Sciences.* Amer. Math. Soc. Ser. 2. V. 168. 1995. P. 211—226.
11. *Неймарк Ю. И.* Метод точечных преобразований в теории нелинейных колебаний. 1. // Изв. вузов. Радиофизика. 1958. Т. 1. № 1. С. 41—66.
12. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
13. *Мозер Ю.* О кривых, инвариантных при отображениях кольца, сохраняющих площадь // Математика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1962. Т. 6. Вып. 5. С. 51—67.
14. *Иванов А. П., Маркеев А. П.* О динамике систем с односторонними связями // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 4. С. 632—636.

Москва

Поступила в редакцию
14.11.1995