МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1996

УДК 531.38

© 1996 г. Л. Ю. АНАПОЛЬСКИЙ

ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ОСЬЮ

Для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси и находящегося под действием только управляющего момента, реализующего широтно-импульсную модуляцию (без зоны нечувствительности) по линейной комбинации угла поворота и его угловой скорости, решается задача стабилизации его положения равновесия.

1. Постановка задачи. Рассматривается твердое тело, вращающееся вокруг оси x. Предполагается, что сумма моментов всех заданных сил, кроме управляющих, относительно x равна нулю, а момент управляющих сил — M^y. Уравнение движения тела представляется в виде $I\nu^{\cdot\cdot} = M^y$, где I и $\nu^{\cdot\cdot}$ — соответственно момент инерции тела и его угловое ускорение (ν — угол поворота тела) относительно оси x. Формируемый широтно-импульсным регулятором управляющий момент определяется соотношением $M^y = Mu(\sigma(t))$, $M = \text{const} > 0$, тогда уравнения движения тела записываются в виде

$$\nu^{\cdot} = \omega, \quad \omega^{\cdot} = qu(\sigma(t)), \quad \sigma = -\rho(\omega + \alpha\nu) \tag{1.1}$$

где ω — угловая скорость тела, $q = M/I$, а ρ, $\alpha = \text{const} > 0$ — параметры регулятора. Если $T = \text{const} > 0$ — период повторения широтно-импульсного регулятора [1], то при $t \in [nT, (n+1)T)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Функция $u(t)$ определяется так

$$u(\sigma(T)) = \begin{cases} \operatorname{sign}\sigma(nT): & t \in [nT, nT + \tau(n)) \\ 0: & t \in [nT + \tau(n), (n+1)T) \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\tau(\sigma) = |\sigma|: \ |\sigma| \le T, \quad \tau(\sigma) = T: \ |\sigma| > T \tag{1.3}$$

где $\sigma(nT)$ — значение функции $\sigma(T)$ при $t = nT$, $\tau(n) = \tau(\sigma(nT))$, а функция $\tau(\sigma)$ — закон широтно-импульсной модуляции первого рода [1].

Согласно (1.1)—(1.3) вращающееся вокруг оси x твердое тело управляется генерируемыми широтно-импульсным регулятором прямоугольными импульсами, ширина $\tau(n)$, которых на любом промежутке $[nT, (n+1)T)$ зависит от его фазовых координат ν, $\nu^{\cdot} = \omega$. Если $\nu(0)$, $\omega(0)$ известны, то вычисляя с помощью (1.1)—(1.3) $\sigma(0) = -\rho(\omega(0) + \alpha\nu(0))$, $\tau(0) = \tau(\sigma(0))$, $u(\sigma(t))$ при $t \in [0, T)$ и интегрируя (1.1), получаются величины $\nu(t)$, $\omega(t)$ при $t \in [0, T)$. Проводя непрерывное припасовывание и повторяя описанный процесс для $t \in [T, 2T)$, находятся на этом полуинтервале функции $\nu(t)$, $\omega(t)$ и т. д. Таким образом, однозначно строится решение уравнений (1.1)—(1.3) на любом временном промежутке.

Система (1.1)—(1.3) имеет единственное положение равновесия

$$\nu = 0, \quad \omega = 0 \tag{1.4}$$

Ставится задача: выделить в пространстве положительных параметров ρ, α области, для которых положение равновесия (1.4) системы (1.1)—(1.3) обладает свойством глобальной равномерной асимптотической устойчивости (ГРАУ). В известной литературе [1] по устойчивости широтно-импульсных систем рассматриваемый случай, когда матрица линейной части системы (1.1) имеет двукратное нулевое собственное значение, не изучен и представляет теоретический интерес. Кроме того, поставленная задача одновременной широтно-импульсной стабилизации равновесия вращающегося твердого тела актуальна в проблематике управления движением спутников. Подобные вопросы в случаях цифрового и частотно-импульсного регуляторов рассмотрены в [2—5].

В уравнения (1.1)—(1.3) входят четыре положительных параметра ρ, α, q, T, однако, полагая $\omega = (T/\rho)\,\omega^*$, $\nu = (T/\rho\alpha)\,\nu^*$, $\sigma = T\sigma^*$, $\tau = T\tau^*$, $t = Tt^*$, где $\nu^*, \omega^*, \sigma^*, \tau^*, t^*$ — новые переменные, и обозначая

$$a = \rho q, \quad b = \alpha T \tag{1.5}$$

получим для новых переменных уравнения (далее звездочка у новых переменных опускается):

$$\nu^{\cdot} = b\omega, \quad \omega^{\cdot} = au\,(\sigma\,(t)), \quad \sigma = -\,(\nu + \omega) \tag{1.6}$$

$$u\,(\sigma\,(t)) = \begin{cases} \operatorname{sign} \sigma\,(n): & t \in [n, n + \tau\,(n)) \\ 0: & t \in [n, \tau\,(n), n + 1) \end{cases} \tag{1.7}$$

$$\tau\,(\sigma) = |\sigma|: \ |\sigma| \leq 1, \quad \tau\,(\sigma) = 1: \ |\sigma| > 1 \tag{1.8}$$

содержащие лишь два положительных параметра (1.5).

Полагая $\nu\,(n), \omega\,(n)$ известными, определяя $\sigma\,(n) = -\,(\omega\,(n) + \nu\,(n))$, $\tau\,(n) = \tau\,(\sigma\,(n))$, $u\,(\sigma\,(t))$ при $t \in [n, n + 1)$ согласно (1.6)—(1.8), интегрируя уравнения (1.6) на полуинтервале $[n, n + 1)$ и проводя доопределение

$$\omega\,(n + 1) = \lim_{t \to (n+1)-} \omega\,(t), \quad \nu\,(n + 1) = \lim_{t \to (n+1)-} \nu\,(t)$$

приходим к следующим разностным уравнениям:

$$\nu\,(n + 1) = \nu\,(n) + b\omega\,(n) + ab\tau\,(n) \operatorname{sign} \sigma\,(n)\,[1 - 0{,}5\tau\,(n)] \tag{1.9}$$

$$\omega\,(n + 1) = \omega\,(n) + a\tau\,(n) \operatorname{sign} \sigma\,(n)$$

Система (1.8), (1.9) имеет единственное положение равновесия $\nu = 0$, $\omega = 0$ и если оно обладает свойством ГРАУ, то таким же свойством [6] обладает положение равновесия (1.4) дифференциальной системы (1.1)—(1.3). Так что с точки зрения свойства ГРАУ можно вместо уравнений (1.1)—(1.3) (или (1.6)—(1.8)) изучать уравнения (1.8), (1.9). В уравнениях (1.9) делается еще переход от переменных ν, ω к переменным σ, ω, где $\sigma = -\,(\omega + \nu)$. Тогда вместо (1.9) получается система

$$\sigma(n + 1) = \sigma(n) - b\omega\,(n) - a(1 + b)\,\tau(n) \operatorname{sign} \sigma\,(n) + 0{,}5ab\tau^2(n) \operatorname{sign} \sigma\,(n) \tag{1.10}$$

$$\omega\,(n + 1) = \omega\,(n) + a\tau\,(n) \operatorname{sign} \sigma\,(n)$$

Исходная задача теперь редуцируется в следующую: выделить в пространстве положительных параметров a и b, определяемых (1.5), области, для которых положение равновесия $\sigma = 0$, $\omega = 0$ системы (1.8), (1.10) обладает свойством ГРАУ.

2. Диссипативность системы. В следующем утверждении устанавливаются условия устойчивости (в малом) уравнений (1.8), (1.10).

Утверждение 1. Для асимптотической устойчивости положения равновесия $\sigma = 0$, $\omega = 0$ системы (1.8), (1.10) достаточно, чтобы параметры (1.5) удовлетворяли неравенствам

$$0 < a < 4/(2 + b), \quad 0 < b \tag{2.1}$$

Доказательство. При $|\sigma| \leq 1$ согласно (1.8) $\tau(\sigma) = |\sigma|$, поэтому уравнения (1.10) в полосе $|\sigma| \leq 1$ имеют вид

$$\sigma(n+1) = [1 - a(1+b)]\sigma(n) - b\omega(n) + 0{,}5ab\,|\sigma(n)|\,\sigma(n)$$

$$\omega(n+1) = a\sigma(n) + \omega(n) \qquad (2.2)$$

Согласно теории Ляпунова об устойчивости по первому приближению [6], для асимптотической устойчивости нулевого решения нелинейной системы (2.2) достаточно асимптотической устойчивости нулевого решения ее уравнений первого приближения

$$\sigma(n+1) = [1 - a(1+b)]\sigma(n) - b\omega(n), \quad \omega(n+1) = a\sigma(n) + \omega(n) \qquad (2.3)$$

Характеристический полином линейной разностной системы (2.3) таков: $\lambda^2 - [2 - a(1+b)]\lambda + (1-a) = 0$, а условия принадлежности его корней внутренности единого круга комплексной плоскости, т. е. необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения (2.3), сводятся к неравенствам (2.1). Итак при условии (2.1) нулевое решение системы (2.2) асимптотически устойчиво, а поскольку точка $\sigma = 0$, $\omega = 0$ — внутренняя точка полосы $|\sigma| \leq 1$, то при условии (2.1) нулевое решение системы (1.8), (1.10) также асимптотически устойчиво. Что и требовалось.

Вводится в рассмотрение непрерывная положительно определенная функция

$$V(\sigma, \omega) = (b/2a)\,\omega^2 + |\omega + \sigma| \qquad (2.4)$$

с помощью которой в дальнейшем локализуется область диссипативности системы (1.8), (1.10).

Нетрудно установить, что если параметры a, b системы (1.8), (1.10) удовлетворяют условиям

$$0 < a < 4/(2+b), \quad 0 < b \leq 1 \qquad (2.5)$$

то первая разность ΔV функции $V(\sigma, \omega)$ в силу системы (1.10) при $|\sigma| \geq 1$ неположительна. Более того, показывается, что при выполнении условий

$$0 < a < 1, \quad 0 < b \leq 1 \qquad (2.6)$$

первая разность ΔV функции (2.4) в силу системы (1.10) неотрицательна во множестве Ω и неположительна во множестве $\{(\sigma, \omega)\colon\ |\sigma| \leq 1\}/\Omega$, где $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 = \{(\sigma, \omega)\colon 0 \leq \sigma \leq 1,\ Q_1 \leq 0,\ Q_3 \geq 0\}$, $\Omega_2 = \{(\sigma, \omega)\colon -1 \leq \sigma \leq 0,\ Q_1 \geq 0,\ Q_2 \geq 0\}$ $Q_1 = \omega + a\sigma$, $Q_2 = ab\sigma^2 + b\omega\sigma - (2-b)\,\omega - (2-ab)\,\tau$ $Q_3 = ab\sigma^2 + b\omega\sigma + (2-b)\,\omega + (2-ab)\,\sigma$.

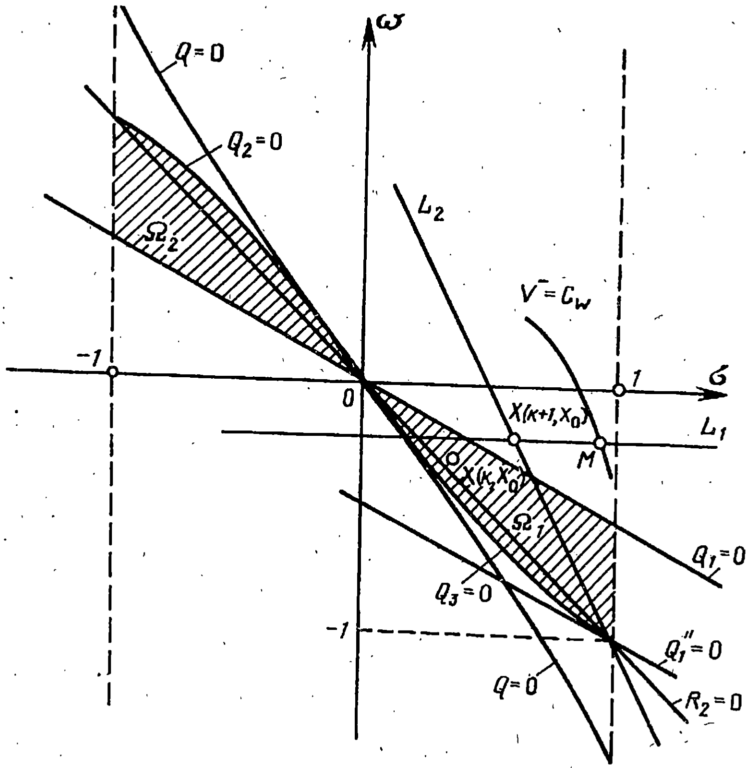
На фиг. 1 схематически показываются кривые $Q_j = 0$ $(j = \overline{1, 3})$, ограничивающие множества Ω_i $(i = 1, 2)$, $Q = (1-b)\,\omega + (1-ab)\,\sigma + 0{,}5ab\sigma\,|\sigma| = 0$ и $R_2 = \omega + \sigma = 0$, а множество Ω заштриховано.

Далее показывается, что при условиях

$$1 < a < 4/(2+b), \quad 0 < b \leq 1 \qquad (2.7)$$

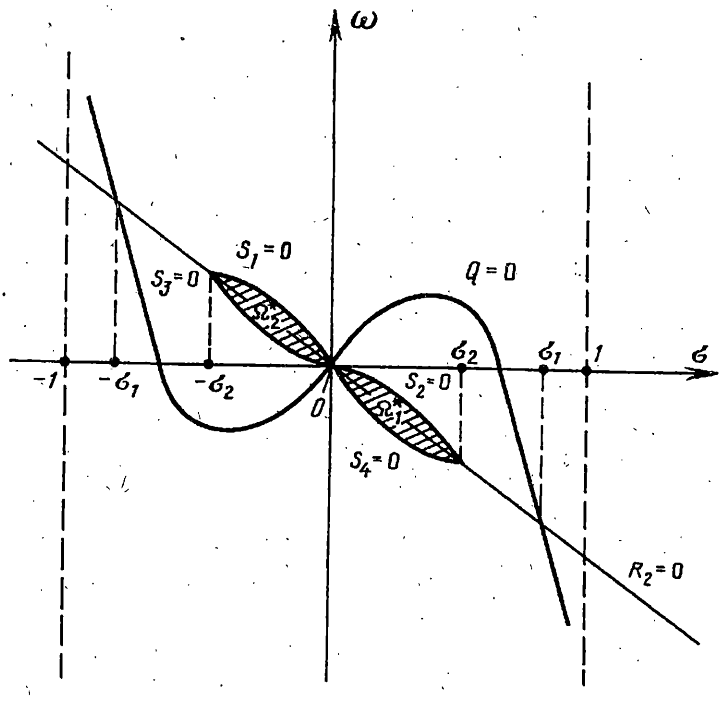
первая разность ΔV функции (2.4) в силу системы (1.10) неотрицательна во множестве Ω^* и неположительна во множестве $\{(\sigma, \omega);\ |\sigma| \leq 1\}\backslash\Omega^*$, где $\Omega^* = \Omega_1^* \cup \Omega_2^*$, $\Omega_1^* = \{(\sigma, \omega) : 0 \leq \sigma \leq 1,\ S_2 \geq 0,\ S_4 \geq 0\}$, $\Omega_2^* = \{(\sigma, \omega)\colon -1 \leq \sigma \leq 0,\ S_1 \geq 0,\ S_3 \geq 0\}$, $S_1 = \omega\sigma - \omega - a\sigma$, $S_2 = b\omega\sigma - (2-b)\,\omega - (2-ab)\,\sigma$, $S_3 = b\omega\sigma + (2-b)\,\omega + (2-ab)\,\sigma$, $S_4 = \omega\sigma + \omega + a\sigma$.

На фиг. 2 схематически изображаются кривые $S_j = 0$ $(j = \overline{1, 4})$, ограничивающие множества Ω_i^* $(i = 1, 2)$, множество Ω^* заштриховано, а $\sigma_1 = 2(a-1)/a$, $\sigma_2 = a - 1$.



ω
Q=0
$Q_2=0$
L_2
Ω_2
$V^-=C_W$
-1
1
σ
0
$X(k+1,X_0)$
L_1
M
$X(k,X_0)$
Ω_1
$Q_1=0$
$Q_3=0$
-1
$Q_1''=0$
Q=0
$R_2=0$

Фиг. 1



ω
$S_1=0$
$S_3=0$
Q=0
Ω_2^*
σ_2
σ_1
1
σ
-1
$-\sigma_1$
$-\sigma_2$
0
$S_2=0$
Ω_1^*
$S_4=0$
$R_2=0$

Фиг. 2

Анализ кривых $Q_j = 0$ (соответственно $S_j = 0$), ограничивающих множество Ω (соответственно Ω^*), описанное выше, показывает, что его «размеры уменьшаются до нуля» при $a \to 1$. Более того, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 2. Пусть в системе (1.8), (1.10) параметры a и b удовлетворяют условиям

$$a = 1, \quad 0 < b \le 1 \tag{2.8}$$

Тогда ее решение $\sigma = 0$, $\omega = 0$ обладает свойством ГРАУ.

Доказательство. Поскольку множество параметров a, b, определяемое соотношением (2.8), содержится во множестве (2.1), то асимптотическая устойчивость (в малом) положения равновесия (0, 0) системы (1.8), (1.10) следует из утверждения 1. Для доказательства глобального равномерного притяжения точки (0, 0) воспользуемся дискретным аналогом известной теоремы Барбашина — Красовского. Для функции (2.4), которая является непрерывной и положительно определенной во всей плоскости $\sigma\omega$ и, очевидно, удовлетворяет условию $V(\sigma, \omega) \to +\infty$ при $|\sigma| + |\omega| \to +\infty$, выполняется с учетом вышесказанного также следующее: ее первая разность ΔV в силу системы (1.10) неположительна при всех σ, ω. Пусть $M = \{(\sigma, \omega)\colon \Delta V = 0\}$. Имеем $M = \bigcup\limits_{i=1}^{3} M_i$, где $M_1 = \{(\sigma, \omega)\colon R_2 = 0\}$, $M_2 = \{(\sigma, \omega)\colon R_2 \ge 0, \sigma \ge 1\}$, $M_3 = \{(\sigma, \omega)\colon R_2 \le 0, \sigma \le -1\}$. Предположим, что множество M содержит целые полутраектории системы (1.8), (1.10), кроме точки (0, 0). Каждая такая полутраектория лежит на линии уровня функции $V(\sigma, \omega) = (b/2a)\,\omega^2 + |\omega + \sigma| = C$, $C - \mathrm{const} > 0$. Учитывая вид кривых $V(\sigma, \omega) = C$ и множества M, легко показывается, что указанное предположение приводит к противоречиям. Пусть, например, $\forall n \ge 0$ $X(n, X_0) \in M_1$, $V(X(n, X_0)) = C < b/2$, где $X_0 = (\sigma_0, \omega_0) \ne 0$, а $X(n, X_0) = (\sigma(n, X_0), \omega(n, X_0))$ — решение системы (1.8), (1.10), начинающееся в точке X_0 в момент времени $n = 0$. Согласно системе (2.2) имеем $\omega(n+1) = \omega(n) + \sigma(n) = 0$, $\sigma(n+1) = 0{,}5b\sigma(n)\,|\sigma(n)| \ne 0$ и, значит, $X(n+1, X_0) \notin M_1$. Поэтому данный случай невозможен. Аналогично обстоит дело и в других логически мыслимых случаях. Таким образом, множество M не содержит целых полутраекторий системы (1.8), (1.10), кроме точки (0, 0). Выполняются все условия дискретного аналога теоремы Барбашина — Красовского и, значит, точка (0, 0) обладает свойством ГРАУ. Что и требовалось.

Пусть для параметров a и b удовлетворяются условия (2.6) (соответственно (2.7)) и, как описано выше, определяется множество Ω (соответственно Ω^*), заштрихованное на фиг. 1 (соответственно фиг. 2). Учитывая вид линий уровня функции (2.4), строятся множества

$$W = \{(\sigma, \omega)\colon V(\sigma, \omega) \le C_W\}, \quad W^* = \{(\sigma, \omega)\colon V(\sigma, \omega) \le C_W^*\} \tag{2.9}$$

где положительные постоянные C_W и C_W^* находятся однозначно из условий выполнения следующих включений $\Omega \subset W$, $\Omega^* \subset W^*$ и тем самым множества Ω и Ω^* локализуются соответственно множествами (2.9). Например, в случае (2.6) постоянная C_W такая, что $\Omega \subset W$ определяется выражением $C_W = \max\{b/(2a),\ 0{,}5\,(2 - 2a + ab)\}$.

Утверждение 3. Пусть в системе (1.8), (1.10) параметры a, b удовлетворяют неравенствам (2.6), тогда каждая ее траектория с течением времени входит и остается в инвариантном множестве W, определенном (2.9), т. е. W — область диссипативности системы (1.8), (1.10).

Доказательство. Покажем инвариантность множества W относительно системы (1.8), (1.10). Если $X(k, X_0) = (\sigma(k), \omega(k)) \in W \backslash \Omega$ для некоторого $k \ge 0$, то $X(k+1, X_0) \in W$, поскольку $V(X(k, X_0)) \le C_W$, $\Delta V(X(k, X_0)) \le 0$, а значит,

$V(X(k+1, X_0)) = V(X(k, X_0)) + \Delta V(X(k, X_0)) \leq V(X(k, X_0)) \leq C_W$. Пусть $X(k, X_0) = (\sigma(k), \omega(k)) \in \Omega$, а $X(k+1, X_0) \notin \Omega$ для некоторого целого $k \geq 0$, причем для определенности принимается $X(k, X_0) \in \Omega_1$ (фиг. 1). Через точку $(1, -1)$ плоскости $\sigma\omega$ проводится прямая Q_1'', параллельная прямой $Q_1 = 0$. Легко устанавливается, что множество Ω_1 лежит в параллелограмме, образованном прямыми $\sigma = 0$, $\sigma = 1$, $Q_1 = 0$, $Q_1'' = 0$. Из второго уравнения системы (2.2) вытекает, что точка $X(k+1, X_0)$ лежит на прямой L_1: $\omega = \omega(k) + a\sigma(k)$, где $\sigma(k)$, $\omega(k)$ — координаты точки $X(k, X_0) \in \Omega_1$, причем по построению $-(1-a) \leq \omega(k) + a\sigma(k) \leq 0$. Из (2.2) выводится соотношение $\sigma(k+1) + b\omega(k+1) = (1-a)\sigma(k) + 0{,}5ab\sigma^2(k)$, означающее, что точка $X(k+1, X_0)$ лежит на прямой L_2: $\sigma + b\omega = (1-a)\sigma(k) + 0{,}5ab\sigma^2(k)$ плоскости $\sigma\omega$. Поскольку прямые L_1 и L_2 пересекаются, то $X(k+1, X_0) \in L_1 \cap L_2$. При $1 - a + 0{,}5ab \geq b/(2a)$ имеем $C_W = 1 - a + 0{,}5ab$. Пусть M — точка пересечения параболы $V^-(\sigma, \omega) = V(\sigma, \omega)|_{R_2 \geq 0} = (b/2a)\omega^2 + \omega + \sigma = C_W$ с прямой L_1 (фиг. 1), для координаты σ_M которой из соотношений $(b/2a)\omega^2 + \omega + \sigma = C_W$, $\omega = \omega(k) + a\sigma(k)$ получается выражение

$$\sigma_M = C_W + Y - (b/2a)Y^2, \quad Y = -(\omega(k) + a\sigma(k)) \tag{2.10}$$

Координата $\sigma(k+1)$ точки $X(k+1, X_0)$ такова

$$\sigma(k+1) = (1-a)\sigma(k) + 0{,}5ab\sigma^2(k) - bY \tag{2.11}$$

Как отмечено выше, для любой точки $X(k, X_0) \in \Omega_1$ имеем $(1-a)\sigma(k) + 0{,}5ab\sigma^2(k) \leq 1 - a + 0{,}5ab$, поэтому с учетом (2.10), (2.11) для доказательства неравенства $\sigma(k+1) \leq \sigma_M$ достаточно доказать, что

$$f_1(Y) = Y - (b/2a)Y^2 \leq f_2(Y) = bY \quad \forall Y \in [0, 1-a] \tag{2.12}$$

Кривые $f_1(Y)$, $f_2(Y)$ пересекаются в точках $Y_1 = 0$, $Y_2 = 2a(1-b)b^{-1}$, причем $\forall Y \in [0, Y_2]$ $f_1(Y) \geq f_2(Y)$. Но в рассматриваемом случае $Y_2 \geq 1 - a$, поэтому имеет место (2.12) и, следовательно, $\sigma(k+1) \leq \sigma_M$. По построению $\sigma(k+1) > 0$, поэтому точка $X(k+1, X_0) \in W$. Инвариантность множества W тем самым установлена. При $1 - a + 0{,}5ab < b/(2a)$ аналогично показывается, что $X(k+1, X_0) \in W$. Следовательно, множество W инвариантно относительно системы (1.8), (1.10).

Для доказательства притяжения множества W применяется дискретный аналог теоремы Барбашина — Красовского по схеме, приведенной при доказательстве утверждения 1. Утверждение 3 тем самым установлено.

Подобные рассуждения позволяют также доказать еще одно утверждение.

Утверждение 4. Пусть в системе (1.8), (1.10) параметры a и b удовлетворяют условиям (2.7), тогда каждая ее траектория с течением времени входит и остается в инвариантном множестве

$$W' = \{(\sigma, \omega): V(\sigma, \omega) \leq C'\} \tag{2.13}$$

где $C' = C_W^* + 0{,}25b(a-1)^2$, а C_W^* — такая постоянная из (2.9), что $\Omega^* \subset W^*$, т. е. W' — область диссипативности системы (1.8), (1.10).

3. Решение основной задачи. В данном пункте выводятся критерии того, что положение равновесия $\sigma = 0$, $\omega = 0$ системы (1.8), (1.10) обладает свойством ГРАУ. Первый критерий основывается на использовании разностных неравенств, получаемых из разностных уравнений (1.10).

Утверждение 5. Пусть в системе (1.8), (1.10) для ее параметров a и b выполняются неравенства (2.6) и неравенство

$$b < a \tag{3.1}$$

Тогда ее положение равновесия $\sigma = 0$, $\omega = 0$ обладает свойством ГРАУ.

Второй критерий опирается на результаты теории абсолютной устойчивости. Система (1.10) переписывается так

$$\sigma(n+1) = a_{11}\sigma(n) + a_{12}\omega(n) + b_{11}f_1(\sigma(n)) + b_{12}f_2(\sigma(n)) \tag{3.2}$$

$$\omega(n+1) = a_{21}\sigma(n) + \omega(n) + b_{21}f_1(\sigma(n)) \tag{3.3}$$

$$a_{11} = 1 - a(1+b), \quad a_{12} = -b, \quad a_{21} = a$$

$$b_{11} = a(1+b), \quad b_{12} = 0{,}5ab$$

$$f_1(\sigma) = \sigma - \tau(\sigma)\,\mathrm{sign}\,\sigma, \quad f_2(\sigma) = \tau^2(\sigma)\,\mathrm{sign}\,\sigma$$

и представляет собой двумерную дискретную систему с устойчивой матрицей ее линейной части и двумя непрерывными нелинейными функциями $f_i(\sigma)$ ($i = 1, 2$) с одинаковым входом σ, имеющей единственное положение равновесия $\sigma = 0$, $\omega = 0$. Непосредственно применить известные критерии абсолютной устойчивости к системе (1.10) (или (3.2)) невозможно, поскольку она не является минимально устойчивой [7]. Однако, воспользовавшись доказанным в утверждениях 3, 4 свойством диссипативности системы (1.8), (1.10), можно следующим образом применить к ней известный квадратичный критерий абсолютной устойчивости [7, 8].

Пусть параметры a, b выбираются из области (2.5). При $0 < a < 1$ (соответственно при $1 < a < 4(2+b)$) согласно утверждению 3 (соответственно утверждению 4) инвариантное ограниченное множество W (соответственно W') является областью диссипативности системы (1.8), (1.10), для каждой точки которой выполняется неравенство

$$-\sigma_0 < \sigma < \sigma_0 \tag{3.4}$$

где σ_0 — положительная постоянная, зависящая от выбранных параметров a и b. Для нелинейных функций $f_i(\sigma)$, определяемых (3.3), при условии (3.4) выполняются следующие квадратичные связи ($\mu_i = \mathrm{const} > 0$):

$$f_i(\sigma)\,[\sigma - \mu_i^{-1} f_i(\sigma)] \geq 0 \quad (i = 1, 2) \tag{3.5}$$

зависящие от σ_0. Например, при $\sigma_0 > 1$, очевидно, можно задать $\mu_1 = (\sigma_0 - 1)/\sigma_0$, $\mu_2 = 1$. Передаточная матрица-строка $\chi(z)$ системы (3.2) от входа σ к выходу $(-f_1(\sigma), -f_2(\sigma))$ определяется соотношениями

$$\chi(z) = (\chi_1(z), \chi_2(z)) \tag{3.6}$$

$$\chi_1(z) = [a_{12}b_{12} + b_{11}(z-1)]\,[a_{12}a_{21} - (z-1)(z-a_{11})]^{-1}$$

$$\chi_2(z) = b_{12}(z-1)\,[a_{12}a_{21} - (z-1)(z-a_{11})]^{-1}$$

где z — комплексная переменная. Согласно квадратичному критерию абсолютной устойчивости [7] в данной ситуации получается следующий результат.

Утверждение 6. Пусть параметры a, b системы (1.8), (1.10) удовлетворяют (2.5) и частотному условию: существуют постоянные $\tau_i \geq 0$, $i = 1, 2$, $\tau_1 + \tau_2 > 0$, что для всех комплексных z таких, что $|z| = 1$, выполняются неравенства

$$\mu_2^{-1} + \mathrm{Re}\,\chi_2(z) > 0 \tag{3.7}$$

$$\tau_1\tau_2\,[\mu_2^{-1} + \mathrm{Re}\,\chi_2(z)]\,[\mu_1^{-1} + \mathrm{Re}\,\chi_1(z)] -$$

$$-0{,}25\,[\tau_1\chi_2(z) + \tau_2\chi_1(z)]\,[\tau_1\chi_2^*(z) + \tau_2\chi_1^*(z)] > 0 \tag{3.8}$$

где (*) означает комплексное сопряжение, $\chi_i(z)$ определяются (3.6). Тогда положение равновесия $\sigma = 0$, $\omega = 0$ системы (1.8), (1.10) обладает свойством ГРАУ.

Каждое из условий (3.7), (3.8) сводится к квадратичному неравенству относительно $\cos\omega$ вида

$$A_i \cos^2 \omega + B_i \cos \omega + C_i > 0, \ \forall \omega \in [0, 2\pi) \quad (i = 1, 2)$$

в которых коэффициенты A_i, B_i, C_i нелинейно зависят от параметров a, b. Проверка этих неравенств в множителе (2.5) проводилась численно на основе специального алгоритма и дала такой результат: неравенства (3.7), (3.8) выполняются «почти во всех» точках (2.5), за исключением тех ее точек, которые достаточно близки (расстояния точек от границы имеют порядок 10^{-4}) к граничным линиям $a = 0$, $a = 4/(2+b)$, $0 < b \leq 1$ множества (2.5).

Итак, получается следующее решение основной задачи: «почти все множество» (2.5) пространства параметров a и b таково, что в нем положение равновесия $\sigma = 0$, $\omega = 0$ системы (1.8), (1.10) обладает свойством ГРАУ.

Отметим, что закон широтно-импульсной модуляции берется в виде (1.3). Однако полученные результаты сохраняются, когда

$$\tau(\sigma) = \begin{cases} \tau^0 |\sigma|: & 0 \leq \sigma \leq \sigma_1 \\ T: & |\sigma| > \sigma_1 \end{cases}, \quad \tau^0(\sigma) = \tau^0(-\sigma)$$

где $\sigma_1 = \text{const} > 0$, а $\tau^0(\sigma)$ — монотонно возрастающая функция, дифференцируемая в точке $\sigma = 0$ справа.

В рассматриваемом случае не учитывается зона нечувствительности широтно-импульсного регулятора и поэтому оказывается возможной стабилизация положения равновесия (1.4) твердого тела. Если предположить существование отличной от нуля зоны нечувствительности широтно-импульсного регулятора, то система остается диссипативной, но в ее области диссипативности появляется неустойчивый «отрезок покоя», вокруг которого образуется достаточно богатый спектр автоколебаний. Здесь требуется дополнительное исследование. Аналогичные эффекты установлено в [2, 3, 5].

Автор признателен А. Л. Литвинову за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 93—013—16264).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гелиг А. Х.* Динамика импульсных систем и нейтронных сетей. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982. 191 с.
2. *Чеховой Ю. Н.* Применение прямого метода Ляпунова для синтеза частотно-импульсной системы автоматической стабилизации положения космического летательного аппарата//Автоматика и телемеханика. 1971. № 12. С. 55—62.
3. *Волосов В. В., Воронова Л. И., Радченко И. Ф., Чеховой Ю. Н.* Исследование частотно-импульсной системы управления ориентацией космического аппарата//Космич. исследования. 1973. Т. 11. Вып. 3. С. 360—368.
4. *Анапольский Л. Ю., Петрякова Е. А.* О поведении при $t \to \infty$ траекторий дискретно-непрерывных регулируемых систем//Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1988. С. 146—156.
5. *Анапольский Л. Ю., Петрякова Е. А.* Анализ дискретно-непрерывной системы с двукратным нулевым корнем//Проблемы аналитической механики, устойчивости и управления движением. Новосибирск: Наука, 1991. С. 25—35.
6. *Бромберг П. В.* Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. М.: Наука, 1967. 323 с.
7. *Якубович В. А.* К абстрактной теории абсолютной устойчивости нелинейных систем//Вестн. ЛГУ. Сер. Матем., мех. астр. 1977. № 13. С. 99—118.
8. *Якубович В. А.* Методы теории абсолютной устойчивости//Методы исследования нелинейных систем автоматического управления М.: Наука, 1975. С. 74—180.

Иркутск

Поступила в редакцию
30.XII.1993