МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1996

УДК 539.3

© 1996 г. И. А. КИЙКО, А. Д. ЧАРУХЧЕВ

ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМЫ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, ИЗГИБАЕМОЙ В ОБЛАСТИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Исследуется изгиб прямоугольной шарнирно опертой пластины переменной толщины; считается, что за пределом текучести поведение материала описывается теорией малых упругопластических деформаций. Оптимальная толщина пластины определяется из условия минимума работы поперечной нагрузки. Показано, что существует решение, которое получается простым пересечением из решения некоторой фиктивной упругой задачи, при этом оптимальное распределение толщины оказывается не зависящим от механических свойств материала пластины.

1. Прямоугольная пластина переменной толщины $2h(x, y)$ занимает в плоскости xOy область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le \delta a$; края пластины шарнирно оперты. Материал пластины считается несжимаемым, его свойства описываются теорией малых упругопластических деформаций. Соотношение теории пластин при сделанных допущениях хорошо известны [1]; выпишем поэтому без вывода основное уравнение изгиба

$$F(h^3, w) - F(3h^3\varphi(u)/u^3, w) = q(x, y)$$

$$F(v, w) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(v\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(v\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(v\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right) \qquad (1.1)$$

Здесь введены безразмерные величины: координаты x, y отнесены к a, прогиб w — к приведенной толщине H, которая определяется из соотношения $V_0 = 2Ha^2$ при фиксированной величине V_0, нагрузка q — к величине $8EH^4/9a^4$. Кроме того, обозначено

$$\varphi(u) = \int_1^u \omega(\varepsilon_3\tau)\,\tau^2 d\tau, \quad u = \frac{h}{z_s}, \quad \frac{1}{z_s} = \frac{H^2 P}{a^2\varepsilon_s} \equiv \lambda P$$

$$P = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right)^{1/2} \qquad (1.2)$$

где ω — функция А. А. Ильюшина, ε_s — предел упругих деформаций.

Уравнение (1.1) следует дополнить граничными условиями шарнирного опирания

$$x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = \delta,\ w = 0$$

$$x = 0,\ x = 1,\ h^3\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0;\ y = 0,\ y = \delta \qquad (1.3)$$

$$h^3\,\partial^2 w/\partial y^2 = 0$$

Оптимальное распределение толщины $h(x, y)$ будем искать из требования минимума «работы внешних сил»

$$\iint\limits_S q\,(x, y)\, w\,(x, y)\, ds \to \min_h \tag{1.4}$$

при условии, что объем пластины фиксирован

$$\iint\limits_S h\,(x, y)\, ds = 1 \tag{1.5}$$

2. Сформулированную задачу предлагается решать методом последовательных («упругих») приближений. Положим в нулевом приближении $\omega_0 = 0$; тогда $\varphi_0 = 0$, и дело сводится к упругой задаче, которую, вследствие ее важности для дальнейшего, разберем подробно.

Имеем

$$F\,(h_0^3, w_0) = q, \quad \iint\limits_S q w_0 ds \to \min_{h_0}, \quad \iint\limits_S h_0 ds = 1 \tag{2.1}$$

функции нулевого приближения, как и всех последующих, подчиняются граничным условиям (1.3).

Составим обобщенный функционал Лагранжа

$$J = \iint\limits_S q w_0 ds + \iint\limits_S (F\,(h_0^3, w_0) - q)\, X_0 ds + 3\beta_0^2 \left(\iint\limits_S h_0 ds - 1 \right)$$

в котором X_0 — сопряженная переменная. Если X_0 подчинить граничным условиям (1.3), то нетрудно показать, что требование стационарности J приведет к условиям оптимальности

$$X_0 = -\, w_0, \quad h_0 P_0 = \beta_0 \tag{2.2}$$

Здесь P_0 находится по (1.2) заменой w на w_0.

Окончательно нулевое (упругое) решение w_0, h_0, β_0 находится из системы

$$F\,(h_0^3, w_0) = q, \quad h_0 P_0 = \beta_0, \quad \iint\limits_S h_0 ds = 1 \tag{2.3}$$

Первое и все последующие приближения строятся в соответствии с алгоритмом:

$$F\,(h_k^3, w_k) - F\,(3\varphi_{k-1} h_k^3 / u_{k-1}^3, w_k) = q$$

$$\varphi_{k-1} = \varphi\,(u_{k-1}), \quad \iint\limits_S q w_k ds \to \min_{h_k}, \quad \iint\limits_S h_k ds = 1 \tag{2.4}$$

Рассмотрим первое приближение. Поскольку $h_0 P_0 = \beta_0 = \mathrm{const}$, постольку $u_0 = \lambda P_0 h_0 = \lambda\beta_0 = \mathrm{const}$, следовательно, $\varphi_0 = \varphi\,(u_0) = \mathrm{const}$. Обозначив $\Omega_0 = 1 - 3\varphi_0 / u_0^3$, из (2.4) для первого приближения получим:

$$\Omega_0 F\,(h_1^3, w_1) = q, \quad \iint\limits_S q w_1 ds \to \min_{h_1}, \quad \iint\limits_S h_1 ds = 1$$

если ввести приведенный прогиб $\overline{w}_1 = \Omega_0 w_1$, то для него из предыдущих соотношений следует

$$F\,(h_1^3, \overline{w}_1) = q, \quad \iint\limits_S q \overline{w}_1 ds \to \min_{h_1}, \quad \iint\limits_S h_1 ds = 1$$

Эта система тождественна с системой упругой задачи (2.3), поэтому

$$\overline{w}_1 = w_0, \quad h_1 = h_0, \quad \beta_1 = \beta_0, \quad h_1 \overline{P}_1 = \beta_1 = \beta_0$$

$$u_1 = \lambda h_1 \overline{P}_1 = \lambda h_0 P_0 / \Omega_0 = \lambda\beta_0 / \Omega_0$$

здесь $\overline{P}_1$ вычисляется по (1.2) заменой w на $\overline{w}$.

Далее вычислим $\Omega_1 = 1 - 3\varphi_1/u_1^3$, введем приведенный прогиб $\overline{w}_2 = \Omega_1 w_2$ и для него, аналогично предыдущему, получим задачу, тождественную с (2.3). Следовательно, будет $\overline{w}_2 = w_0$, $h_2 = h_0$, $h_2\overline{P}_2 = \beta_0$, $u_0 = \lambda\beta_0/\Omega_1$.

Теперь очевидно, что обнаруженное свойство последовательности (w_k, h_k) будет справедливо в любом приближении

$$\overline{w}_k = w_0, \quad h_k = h_0, \quad h_k\overline{P}_k = \lambda\beta_0 \tag{2.5}$$

$$u_k = \lambda\beta_0/\Omega_{k-1}, \quad \Omega_{k-1} = 1 - 3\varphi(u_{k-1})/u_{k-1}^3$$

Очевидно и то, что вопрос о сходимости этой последовательности эквивалентен вопросу о сходимости последовательности Ω_n или, что то же, u_n, $n = 0, 1, 2 \ldots$. Положительный ответ на этот вопрос состоит в утверждении о том, что могут быть указаны достаточные условия, при которых последовательность u_n сходится; при этом предельные значения u^* и Ω^* также находятся.

Из структуры выражений (2.5) видно, что u_k — это последовательные значения корней трансцендентного уравнения

$$u\Omega \equiv (1 - 3\varphi(u)/u^3)\, u = \lambda\beta_0 \tag{2.6}$$

вычисляемые итерациями

$$u_k = \lambda\beta_0/\Omega(u_{k-1}) \equiv f(u_{k-1}) \tag{2.7}$$

известно [2], что метод итераций сходится в области, где $|f'(u)| < 1$. Принимая во внимание, что

$$\varphi'(u) = \omega(\varepsilon_s u)\, u^2, \quad \varphi(u) = \omega(\delta_1\varepsilon_s u)(u^3 - 1)/3, \quad 0 < \delta_1 < 1$$

будем иметь вследствие известных свойств функции ω:

$$f'(u) = 3\lambda\beta_0 \frac{\omega(\varepsilon_s u)}{u}\left(1 - \frac{\omega(\delta_1\varepsilon_s u)}{\omega(\varepsilon_s u)}\frac{u^3 - 1}{u^3}\right) \times$$

$$\times \left(1 - \omega(\delta_1\varepsilon_s u)\frac{u^3 - 1}{u^3}\right)^{-2} \leq 3\lambda\beta_0 \frac{\omega(\varepsilon_s u)}{u} \times$$

$$\times \left(1 - \frac{\omega(\delta_1\varepsilon_s u)}{\omega(\varepsilon_s u)}\frac{u^3 - 1}{u^3}\right)^{-1} \leq 3\lambda\beta_0 \frac{\omega(\varepsilon_s u)}{u}$$

Достаточное условие сходимости теперь запишется в виде

$$3\lambda\beta_0\omega(\varepsilon_s u) < u, \quad u > 1 \tag{2.8}$$

поскольку ω монотонно возрастает от нуля в области $u \geq 1$, всегда найдется такая окрестность точки $u = 1$, где (2.8) будет выполнено.

Сформулируем окончательный результат: поставленная задача оптимального проектирования в области малых упругопластических деформаций $u \gtrsim 1$ имеет решение; оптимальное распределение толщины находится из упругого решения, прогиб вычисляется пересчетом из упругого

$$w = w_0/\Omega^* = w_0 u^*/\lambda\beta_0$$

где u^* — корень уравнения (2.6).

3. Если условие равнонапряженности $hP = \mathrm{const}$ ввести в постановку задачи как дополнительную гипотезу, то в соответствии с результатами предыдущего пункта мы придем к упругому решению для приведенного прогиба $\overline{w}$ и истинной толщины h, причем истинный прогиб получается простым пересчетом $w = \overline{w}/\Omega^*$, здесь $\Omega^* = 1 - 3\varphi(u^*)/(u^*)^3$, а u^* — корень уравнения (2.6).

Внешнюю нагрузку $q(x; y)$ в соответствии с теоремой о простом нагружении представим в форме $q(x, y) = p\psi(x, y)$, где p — монотонно возрастающий параметр. Задача теперь может быть сформулирована следующим образом: зададим $u = u^0$, т. е. допустимый уровень напряжений в точках лицевых поверхностей пластины $|z| = h$; тем самым определены значения $\Omega^0 = \Omega(u^0)$ и $\beta_0^0 = u^0\Omega^0/\lambda$. Решением задачи определяется допустимая интенсивность нагрузки p^0.

Выясним, в заключение, механический смысл параметра β_0. Уравнение упругого равновесия, записанное для фиктивного прогиба $\overline{w}$, домножим на $\overline{w}$ и проинтегрируем по площади пластины; получим в результате

$$\iint_S q\overline{w}ds = \iint_S F(h^3, \overline{w})\,\overline{w}ds = \iint_S h^3\overline{P}^2 ds = \iint_S h\beta_0^2 ds = \beta_0^2$$

слева в этом равенстве стоит минимизируемый функционал, следовательно, β_0 определяет минимальное значение «работы внешней нагрузки».

Заметим, что в задаче об изгибе стержня аналогичные результаты получены в [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
2. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. Т. 2. М.: Физматгиз, 1959. 620 с.
3. *Кийко И. А., Чарухчев А. Д.* Оптимизационные задачи в изгибе и устойчивости упругопластических стержней//Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 6. С. 170—175.

Москва

Поступила в редакцию
19.XI.1991