

УДК 539.3

© 1996 г. В. И. МИГДАЛЬСКИЙ, В. В. РЕУТ

## ЗАДАЧА О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ КОРОБЧАТОЙ ОБОЛОЧКИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ТРЕЩИНОЙ, ВЫХОДЯЩЕЙ НА РЕБРО

Рассматривается напряженное состояние коробчатой оболочки, образованной двумя полубесконечными пластинами, состыкованными под прямым углом. Пластины имеют разные толщины  $h_j$  ( $j = 1, 2$ ) и различные упругие постоянные  $E_j$ ,  $\nu_j$  ( $j = 1, 2$ ). Оболочка ослаблена конечной трещиной единичной длины, выходящей на ребро оболочки. Предполагается, что трещина перпендикулярна ребру, а также, что параметр  $\epsilon = \max h_j \ll 1$ , что позволяет рассматривать задачу в асимптотической постановке [1, 2]. К берегам трещины прикладывается как плоская нагрузка, так и изгибающие нагрузки. После применения интегрального преобразования Меллина проблема сводится к решению задачи Римана, допускающей точное решение в квадратурах. Исследуется зависимость коэффициента интенсивности напряжений в вершине трещины от отношения толщин и упругих постоянных пластин. Получены инженерные формулы для вычисления коэффициента интенсивности и указаны границы их применения.

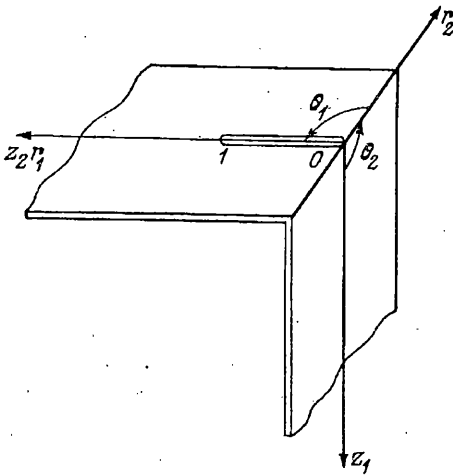
Задача о напряженном состоянии коробчатой оболочки, образованной двумя полубесконечными пластинами, рассматривались в [4—7]. При этом предполагалось, что нагрузка приложена к ребру оболочки и решение строилось при помощи интегрального преобразования Фурье. Коробчатые оболочки прямоугольного профиля с помощью метода однородных решений исследовались в [8, 9]. В [3] предложен новый подход, основанный на сведении задачи к совместному плоскоизгибному напряженному состоянию пластин с дефектом.

В [1, 2] показано, что задачу при  $\epsilon \ll 1$  можно свести к последовательно решаемым задачам, чисто изгибной, основанной на допущении о чисто изгибном напряженном состоянии пластин конструкции, в предположении, что ребра оболочки не искривляются и играют роль жестких опор, и чисто плоской в постановке Папковича, в которой предполагается, что каждая пластинка находится в условиях плоского напряженного состояния и взаимодействует с соседней только посредством касательных усилий. При этом, если к какой-либо полке оболочки приложена нагрузка, нормальная срединной поверхности, то максимальные напряжения, вызванные изгибающим моментом,  $\sigma_f$  имеют порядок малости  $O(\epsilon^{-2})$ , а плоские напряжения  $\sigma_p \sim O(\epsilon^{-1})$ . В случае нагрузки, приложенной в срединной плоскости полки оболочки, соответствующие напряжения имеют порядок малости  $\sigma_f = O(\epsilon)$ ,  $\sigma_p = O(1)$ .

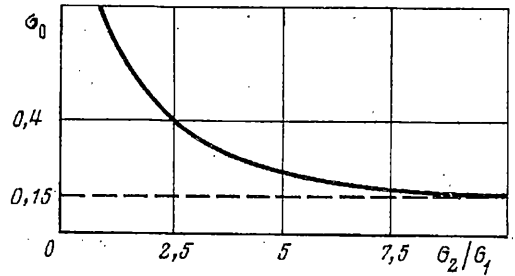
1. Рассмотрим коробчатую оболочку, образованную двумя полубесконечными пластинами, состыкованными под прямым углом. Пластины имеют различные толщины  $h_1$  и  $h_2$ , модули Юнга  $E_1$  и  $E_2$  и коэффициенты Пуассона  $\nu_1$  и  $\nu_2$ . В одной из пластин имеется трещина единичной длины, выходящая под прямым углом на ребро оболочки. К берегам трещины приложена нагрузка, действующая в плоскости пластины.

Введем локальные цилиндрические системы координат для каждой из пластин (фиг. 1). Будем обозначать  $u^{(j)}$ ,  $v^{(j)}$  — радиальные и тангенциальные перемещения,  $w^{(j)}$  — прогибы,  $\sigma_r^{(j)}$ ,  $\sigma_\theta^{(j)}$ ,  $\tau_{r\theta}^{(j)}$  соответствующие напряжения в пластинках.

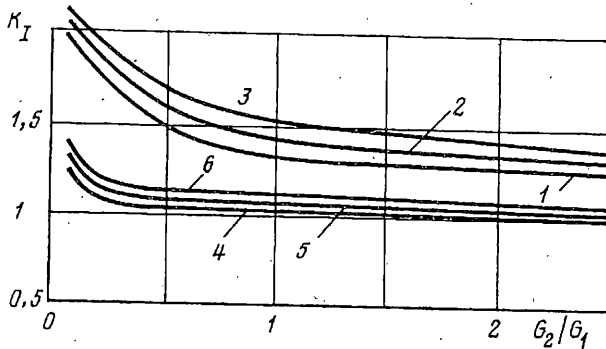
В случае  $\epsilon = \max \{h_j\} \ll 1$  ( $j = 1, 2$ ) при плоском нагружении, как показано [1, 2], можно перейти к постановке Папковича [10]. Тогда следуя идее работы



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

[3] задачу можно свести к исследованию плоского напряженного состояния составной бесконечной плоскости с дефектом, описывающим ребро оболочки. При этом при переходе через дефект касательные напряжения и смещения непрерывны, а нормальные напряжения равны нулю.

Математически такая задача в случае нагрузки, симметричной относительно трещины, сводится к отысканию решения уравнений плоской теории упругости

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} = 0 \quad (1.1)$$

$$\Delta (\sigma_\theta + \sigma_r) = 0, \quad -1/2\pi < \theta < 1/2\pi \quad (0 < r < \infty)$$

удовлетворяющих условиям стыковки

$$\langle u \rangle = 0, \quad \langle h\tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \sigma_\theta^{(1)} = \sigma_\theta^{(2)} = 0, \quad \theta = 0, \quad (0 < r < \infty) \quad (1.2)$$

условиям на трещине

$$\sigma_\theta = f(r), \quad \tau_{r\theta} = g(r), \quad \theta = -1/2\pi \quad (0 < r < 1) \quad (1.3)$$

условиям симметрии задачи

$$\tau_{r\theta} = 0, \quad v = 0, \quad \theta = -1/2\pi \quad (1 < r < \infty), \quad \theta = 1/2\pi \quad (0 < r < \infty) \quad (1.4)$$

Здесь  $u, v$  — соответственно радиальные и тангенциальные перемещения точек плоскости,  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  — нормальные и касательные напряжения

$$\langle h\tau_{r\theta} \rangle = h_1 \tau_{r\theta} |_{\theta=-0} - h_2 \tau_{r\theta} |_{\theta=+0}$$

$$\langle u \rangle = u |_{\theta=-0} - u |_{\theta=+0}$$

$$(h, v, E) = \begin{cases} (h_1, v_1, E_1), & \theta < 0 \\ (h_2, v_2, E_2), & \theta > 0 \end{cases}$$

При этом перемещения и напряжения в полках оболочки связаны с решением задачи (1.1) — (1.4) следующими соотношениями:

$$(u^{(1)}, v^{(1)}, \sigma_r^{(1)}, \sigma_\theta^{(1)}, \tau_{r\theta}^{(1)}) = (u, v, \sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}) |_{\theta < 0} \quad (1.5)$$

$$(u^{(2)}, v^{(2)}, \sigma_r^{(2)}, \sigma_\theta^{(2)}, \tau_{r\theta}^{(2)}) = (u, v, \sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}) |_{\theta > 0}$$

$$w^{(1)} = w^{(2)} = 0$$

В случае задания нагрузки кососимметричной относительно трещины, постановка задачи изменится только за счет условий (1.4), вместо которых

$$\sigma_\theta = 0, \quad u = 0, \quad \theta = -1/2\pi \quad (1 < r < \infty), \quad \theta = 1/2\pi \quad (0 < r < \infty) \quad (1.6)$$

Для простоты в дальнейшем рассматривается только случай симметричной нагрузки, причем  $g(r) = 0, 0 < r < 1$ .

Обозначим

$$\varphi(r) = \frac{\partial u}{\partial r} |_{\theta=-1/2\pi}, \quad \varphi(r) \equiv 0 \quad \text{при } r > 1 \quad (1.7)$$

и потребуем удовлетворения условия замкнутости трещины [11]:

$$\int_0^1 \varphi(\xi) d\xi = 0 \quad (1.8)$$

Применяя интегральные преобразования Меллина и используя аппарат одномерных разрывных краевых задач [12] (1.1) — (1.4) сводится к сингулярному интегральному уравнению на конечном промежутке с ядром типа свертки Меллина

$$\int_0^1 \varphi(\xi) K\left(\frac{r}{\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi} = f(r) \quad (0 < r < 1) \quad (1.9)$$

$$K(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L W(p) t^{-p} dp, \quad L \in \{\operatorname{Re} p \in (0, 1), \operatorname{Im} p \in (-\infty, +\infty)\} \quad (1.10)$$

$$W(p) = a_0 \frac{1}{\sin \pi p} \left( \cos \pi p + \sum_{k=1}^3 a_k \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(1-p)(k-1)!} \right)$$

$$a_0 = 4G_1(1 + \kappa_1)^{-1}, \quad a_1 = 2\Omega - 1$$

$$a_2 = a_1 + 1, \quad a_3 = -2a_2$$

$$\Omega = (1/\delta + \eta G_1/G_2)^{-1} \eta G_1/G_2, \quad \eta = (1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1)^{-1}, \quad \delta = h_1/h_2,$$

$$G_k = 1/2 E_k (1 + \nu_k)^{-1}$$

где  $G_k$  — модуль сдвига,  $\kappa_k$  — упругая постоянная пластины ( $k=1, 2$ ).

2. Введя стандартные обозначения

$$[\varphi_-(r), f_-(r)] = \begin{cases} [\varphi(r), f(r)] & (0 < r < 1) \\ 0 & (r > 1) \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\psi_+(r) = \begin{cases} \int_0^{\infty} \varphi_-(\xi) K\left(\frac{r}{\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi} & (r > 1) \\ 0 & (0 < r < 1) \end{cases}$$

доопределим уравнение (1.9) на всю полуось

$$\int_0^{\infty} \varphi_-(\xi) K\left(\frac{r}{\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi} = f_-(r) + \psi_+(r) \quad (0 < r < \infty) \quad (2.2)$$

Следуя [12, 13], после применения интегрального преобразования Меллина, сведем (2.2) к краевой задаче Римана

$$W(p) \Phi_-(p) = F_-(p) + \Psi_+(p), \quad p \in L \quad (2.3)$$

$$\{\Phi_-(p), F_-(p), \Psi_+(p)\} = \int_0^{\infty} \{\varphi_-(r), f_-(r), \psi_+(r)\} r^{p-1} dr$$

При этом контур  $L \in \{\operatorname{Re} p \in (0, 1), \operatorname{Im} p \in (-\infty, +\infty)\}$ ,  $\Phi_-(p), F_-(p)$  аналитически продолжим в  $D^-$ ,  $\Psi_+(p)$  в  $D^+$  где  $D^+$  и  $D^-$  соответственно левая и правая полуплоскости относительно контура  $L$ .

Воспользуемся приемом частичной факторизации [14]. Для этого коэффициент задачи Римана перепишем в виде

$$W(p) = -a_0 \operatorname{tg}(\frac{1}{2}\pi p) V(p) \quad (2.4)$$

$$V(p) = 1 + \Omega p(p-2)/\sin^2(\frac{1}{2}\pi p)$$

Тогда будем иметь [13]:

$$V(p) = X^+(p)/X^-(p) \quad (2.5)$$

$$X(p) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln V(s)}{s-p} ds \right\} \quad (2.6)$$

$$\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\pi p) = B^+(p)B^-(p)$$

$$B^+(p) = \Gamma(3/2 - p/2)/\Gamma(1 - p/2), \quad B^-(p) = \Gamma(p/2 - 1/2)/\Gamma(p/2)$$

$$B^\pm(p) = O(|p|^{\pm 1/2}), \quad |p| \rightarrow \infty \quad (2.7)$$

В результате (2.3) можно переписать в следующем виде:

$$-\frac{\Phi_-(p) B^-(p)}{X^-(p)} = \frac{F_-(p)}{a_0 B^+(p) X^+(p)} + \frac{\Psi_+(p)}{a_0 B^+(p) X^+(p)}, \quad p \in L \quad (2.8)$$

Представляя первое слагаемое как

$$F_-(p)/(a_0 B^+(p) X^+(p)) = Q_+(p) - Q_-(p)$$

$$Q(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F_-(s)}{a_0 B^+(s) X^+(s)} \frac{ds}{s-p} \quad (2.9)$$

решение краевой задачи Римана с учетом условия замкнутости трещины (1.8) имеет вид

$$\Phi_-(p) = -Q_-(p) X^-(p)/B^-(p) \quad (2.10)$$

где  $X^-, B^-$  определяются из (2.5) и (2.7).

3. Решение сингулярного интегрального уравнения (1.9) из (2.10) получается путем обращения интегрального преобразования Меллина

$$\varphi_-(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \Phi_-(p) \xi^{-p} dp \quad (3.1)$$

Основываясь на [12] и рассматривая поведение решения у правого конца трещины ( $\xi \rightarrow 1 + 0$ ) для случая задания нагрузки

$$f(r) = \beta r^\gamma, \quad 0 < r < 1 \quad (3.2)$$

$\beta, \gamma$  — некоторые константы, получим формулу для определения коэффициента интенсивности напряжения

$$K_{I(\xi \rightarrow 1+0)} = \frac{\beta}{a_0 \sqrt{\pi}} \frac{1}{B^+(-\gamma) X^+(-\gamma)} \quad (3.3)$$

$$[X^+(-\gamma)]^{-1} = \exp(-(1+\gamma)J(1+\gamma)/\pi)$$

$$J(t) = \int_0^\infty \frac{\ln V(1+i\tau)}{t^2 + \tau^2} d\tau \quad (3.4)$$

По формуле (3.3) были проведены вычисления, на основании которых построен график зависимости коэффициента интенсивности напряжения от отношения модулей сдвига пластин (фиг. 2). Вычисления проводились также для различных соединений материалов и отношения толщин. При этом кривые 1, 2, 3 построены при значениях параметра  $\gamma = 0$  и  $\delta = 0,5; 1; 2$ , а кривые 4, 5, 6 — при  $\gamma = 1$  и  $\delta = 0,5; 1; 2$ . Как видно из графика при  $G_2 \ll G_1$ , коэффициент интенсивности напряжения  $K_I$  совпадает со значением аналогичного коэффициента в вершине трещины, выходящей на границу свободной полуплоскости [11].

У вершины трещины, расположенной на линии сшивки двух полуплоскостей ( $\xi \rightarrow -0$ ), следуя [13], можно записать асимптотическое представление

$$\varphi_-(\xi) = N\xi^{-\sigma_0} + O(\xi^{-\sigma_0}) \text{ при } \xi \rightarrow 0 \quad (3.5)$$

где  $\sigma_0$  — наибольший корень уравнения  $W(\sigma) = 0$  при  $\sigma \in (\sigma_*, 1)$ . В данном случае

$$N = \frac{\beta \sin(\pi\sigma_0)}{a_0 (\sigma_0 + \gamma)} \frac{B^+(\sigma_0) X^+(\sigma_0)}{B^+(-\gamma) X^+(-\gamma)} \frac{1}{[\pi \sin(\pi\sigma_0) + 4\Omega(\sigma_0 - 1)]}$$

Значение коэффициента интенсивности напряжений у вершин трещины, расположенной на ребре оболочки, можно записать в виде

$$K_{I(\xi \rightarrow 0)} = Nz ((\sigma_0 - 1) d_1 + (3 - 2\sigma_0) d_2) / (d_1 d_2 \sin(\pi\sigma_0)) \quad (3.6)$$

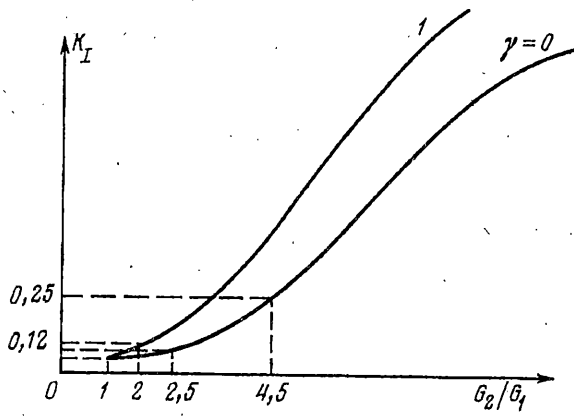
$$z = E_2/E_1, \quad d_1 = z(1 + \nu_2) + 3 - \nu_1, \quad d_2 = z(3 - \nu_2) + 1 + \nu_1$$

На фиг. 3 изображен график зависимости  $\sigma_0$  (порядка поведения решения при  $\xi \rightarrow 0$ ) от отношения модулей сдвига пластин  $G_2/G_1$ . Значение коэффициента интенсивности, полученное по формуле (3.6) (фиг. 4), близко к результатам [13] задачи о трещине, выходящей на линию сшивки составной плоскости.

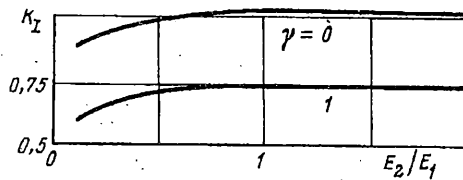
В случае задания на берегах трещины постоянной нагрузки для коэффициента интенсивности напряжений из (3.3) следует приближенная формула

$$K_{I(\xi \rightarrow 1+0)} = \beta \frac{1 + \kappa_1}{2G_1} \frac{1}{\pi \sqrt{\pi}} \exp(2\Omega/\pi) \quad (3.7)$$

где  $\kappa_1, G_1$  — упругая постоянная и модуль сдвига пластины. При этом относительная погрешность вычисления  $K_I$  по формуле (3.7) к точному значению коэффициента интенсивности (3.3) не превосходит 20%.



Фиг. 4



Фиг. 5

4. В случае изгибного нагружения берегов трещины, как показано [1—3] можно перейти к постановке [16, 17], т. е. задача сводится к исследованию напряженного состояния составной бесконечной пластинки, шарнирно опертой вдоль ребра оболочки.

Предполагается, что нагрузка симметрична относительно берегов трещины. Вводя неизвестную функцию  $W$  — прогиб пластинки

$$\varphi(r) = \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{-1} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta = -\pi/2} \quad (4.1)$$

задачу можно свести к интегральному уравнению (1.9) с ядром (1.10), в котором  $f(r)$  — интенсивность приложения к берегам трещины моментов,  $a_0 = 2\kappa_1(1 - \nu_1)/(1 + \kappa_1)$ ,  $a_1 = -(\eta_2 + \eta_2\kappa_1^2 + 2\eta_1\kappa_1)/(2\kappa_1(\eta_1 + \eta_2))$ ,  $a_2 = -2\eta_2/(\kappa_2(\eta_1 + \eta_2))$ ,  $a_3 = -2a_2$ ,  $\eta_i = D_i(1 + \kappa_i)(1 - \nu_i)$  ( $i = 1, 2$ ), где  $D_i$ ,  $\nu_i$ ,  $\kappa_i$  — цилиндрическая жесткость, упругая постоянная и модуль упругости соответственно. Решение этого уравнения находится аналогично тому, как это было проделано в п. 1.

В этом случае коэффициент интенсивности напряжения у внутренней вершины трещины вычисляется по формуле

$$K_{I(r \rightarrow 1+0)} = \lim_{r \rightarrow 1+0} \sqrt{1 - 1} \sigma^*, \quad \sigma^* = 6M_0(r)/h_1^2 \quad (4.2)$$

Учитывая поведение решения во внутренней вершине трещины, формулу (4.2) можно свести к следующему виду:

$$K_{I(r \rightarrow 1+0)} = \frac{6\nu_1}{\sqrt{\pi} h_1^2} \frac{\beta \Gamma(1 + \gamma/2)}{a_0 \Gamma(3/2 + \gamma/2)} \exp(-(1 + \gamma)J(1 + \gamma)/\pi) \quad (4.3)$$

По этой формуле были проведены вычисления, на основании которых составлен график зависимости коэффициента интенсивности от отношения модулей упругости пластин (фиг. 5).

Авторы благодарят Г. Я. Попова за ценные замечания и постоянное внимание к работе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гришин В. А., Попов Г. Я., Реут В. В. Расчет коробчатых оболочек прямоугольного сечения//ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 605—612.
2. Попов Г. Я., Реут В. В. Асимптотический подход к задачам о напряженном состоянии коробчатых упругих тел//Аннот. докл. 7-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. М.: Ин-т пробл. механики АН СССР, 1991. С. 289—290.
3. Попов Г. Я., Реут В. В. Расчет коробчатых оболочек//Тр. 14-й Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Кутаиси; Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1987. Т. 2. С. 327—332.
4. Власов В. В., Колесников А. В. О местном напряженном и деформированном состоянии тонкостенной призматической конструкции от действия сосредоточенной нагрузки, приложенной к ребру//Тр. Моск. авиац. ин-та. 1978. № 467. С. 39—47.
5. Массажковский В. И., Куликов Д. В. Метод однородных решений для коробчатых оболочек при динамическом нагружении//Докл. АН УССР. Сер. А. 1987. № 1. С. 24—27.
6. Dundurs J., Samuchin M. G. Transmission of concentrated forces into prismatic shells/ I.//Intern. J. Solid and Struct. 1971. V. 7. № 12. P. 1627—1640.
7. Samuchin M. G., Dundurs J. Transmission of concentrated forces into prismatic shells/ II.//Intern. J. Solid and Struct. 1973. V. 9. № 2. P. 269—278.
8. Мусияка В. Г., Пошивалова Е. В. Применение однородных решений к исследованию напряженного состояния пластинчатых конструкций//Докл. АН УССР. Сер. А. 1980. № 8. С. 50—53.
9. Тихомиров В. В. Напряженное состояние коробчатой оболочки с поперечными трещинами//Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 11. С. 93—99.
10. Папкович П. Ф. Теория упругости. Л.; М.: Оборонгиз, 1939. 640 с.
11. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев.: Наук. думка, 1976. 444 с.
12. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
13. Ситник В. А. Об одном подходе к решению задачи о трещине в клиновидной составляющей плоскости//ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 699—703.
14. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 639 с.
15. Градштейн Н. С., Рыжик М. М. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
16. Смотров А. Ф., Флейшман Н. П., Шикаренко Г. А. Расчет пластинчатых конструкций методом конечных элементов//Тр. 10-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин, 1975. Тбилиси: Мецниереба, 1975. Т. 2. С. 660—666.

Одесса

Поступила в редакцию  
11.X.1993