МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1996

УДК 539.375

 Е. И. ШЕМЯКИН

ЗАДАЧА О «ХРУПКОМ ШАРНИРЕ»

Представление о хрупком разрушении твердых тел обычно связывается с переходом из упругого состояния в некоторое другое после достижения критических (предельных) значений напряжениями или деформациями (или энергии упругого деформирования). При этом рассматриваются решения упругих задач, в которых ни сами критерии разрушения (предельные или критические значения инвариантов), ни модели поведения твердой среды при разрушении не рассматриваются. В публикуемой работе вводится модель разрушения среды, которая вела себя упруго до достижения критических (предельных) значений инвариантов напряженного и деформированного состояний. В качестве основной задачи избраны квазистатическая задача о трещине в упругой среде в условиях антиплоской деформации — случай, в котором удается избежать математических приближений и построить решение задачи, свободное от дополнительных предположений. Автор взял на себя ответственность назвать исследование области перехода из упругого состояния в состояние разрушения (разделение тела на части) задачей о «хрупком шарнире».

1. В условиях антиплоской деформации в известных обозначениях отличными от нуля являются компоненты деформации [1, 2]: $\varepsilon_{xz} = \partial W/\partial x$, $\varepsilon_{yz} = \partial W/\partial y$ ($W(x, y)$ — перемещение вдоль оси OZ) и компоненты тензора напряжений, которые связаны в упругом состоянии законом Гука

$$\tau_{xz} = \mu\varepsilon_{xz}, \quad \tau_{yz} = \mu\varepsilon_{yz} \tag{1.1}$$

где μ — модуль упругого сдвига; величина τ_{xz} и τ_{yz} удовлетворяют единственному уравнению равновесия (в проекции на ось z):

$$\partial\tau_{xz}/\partial x + \partial\tau_{yz}/\partial y = 0 \tag{1.2}$$

где массовые силы отсутствуют. В этой задаче $W(x, y)$ — гармоническая функция и в качестве решения упругой задачи для полуплоскости $y > 0$ с разрезом по вещественной оси $x \le a$ предлагается известное решение

$$W(x, y) = A\sqrt{r}\sin(\theta/2) \tag{1.3}$$

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x-a}, \quad 0 \le \theta \le \pi$$

где A, a — произвольные постоянные. Это решение имеет известные недостатки. Гармоническая функция $W(x, y)$ удовлетворяет смешанным граничным условиям при $y = 0$: при $x \ge a$ смещение $W(x, y)$ непрерывно и равно нулю, при $x \le a$ напряжение $\tau_{yz} = 0$. В этих условиях напряжения и деформации имеют известные корневые особенности:

$$\tau_{xz} = \mu\varepsilon_{xz} = -\frac{A\mu}{2\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2}, \quad \tau_{yz} = \mu\varepsilon_{yz} = \frac{A\mu}{2\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2} \tag{1.4}$$

а перемещение $W(x, y)$ описывает параболическую форму раскрытия разреза с вершиной в точке $(a, 0)$.

Кроме того, в задаче обычно не рассматриваются, но это важно отметить, что отличны от нуля две компоненты вектора поворота:

$$2\omega_x = \partial W/\partial y = \varepsilon_{yz}, \quad 2\omega_y = -\,\partial W/\partial x = -\,\varepsilon_{xz}$$

при этом в силу условий задачи (разрез проведен по оси x, $x \le a$) поворот ω_y имеет особый смысл: в упругой задаче ω_y обращается в бесконечность вместе с ε_{xz} в особой точке ($x=a$, $y=0$), что противоречит гипотезам, положенным в основу линейной модели упругости.

Известно [2, 3], что величина максимального касательного напряжения

$$T = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} \tag{1.5}$$

остается постоянной на окружностях $r = \text{const}$. В частности, при $r=a$ имеем соотношение

$$T = A\mu/(2\sqrt{a}) = T_e = \text{const} \tag{1.6}$$

связывающее произвольные постоянные A и a; разрыв перемещения при $x=0$, $y=0$:

$$[W] = W_+ - W_- = 2A\sqrt{a} \tag{1.7}$$

Для описания поведения упругой среды перед разрушением укажем площадки максимального касательного напряжения и главного сдвига, которые в упругом состоянии среды совпадают. Главные значения нормальных напряжений

$$\sigma_1 = T, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\,T \tag{1.8}$$

определяют состояние чистого кручения с площадкой $\tau_{\max} = 1/2(\sigma_1-\sigma_3) = T$, проходящей через второе главное направление, а первое главное направление образует угол $\varphi(x, y)$ с осью x (фиг. 1):

$$\tau_{xz}/\tau_{yz} = -\,\mathrm{tg}\,\varphi \tag{1.9}$$

Площадка главного сдвига проходит через то же второе главное направление, а первое главное направление тензора деформаций образует угол ψ с осью x:

$$\varepsilon_{xz}/\varepsilon_{yz} = -\,\mathrm{tg}\,\psi \tag{1.10}$$

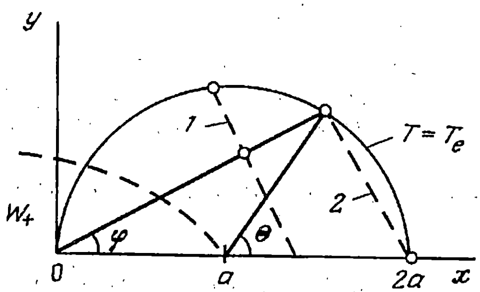
Естественно для антиплоской деформации отсутствие изменений объема

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0, \quad \varepsilon_1 = \tfrac{1}{2}\Gamma, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = -\,\tfrac{1}{2}\Gamma, \quad \Gamma = \sqrt{\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^1} \tag{1.11}$$

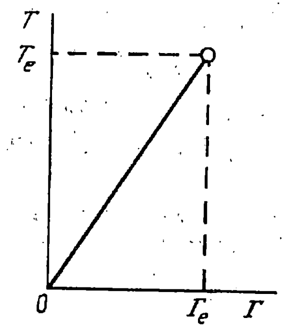
что отвечает состоянию чистого сдвига, и изменений первого инварианта тензора напряжений $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + 0$. Площадки действия $\tau_{\max}$ и Γ составляют угол $\varphi = \pm\,\tfrac{1}{4}\pi$ и $\psi = \pm\,\tfrac{1}{4}\pi$ с осью x.

2. При описании перехода из упругого состояния в разрушенное (разделение тела на части) основным для представления о хрупком разрушении является диаграмма связи инвариантов T и Γ (фиг. 2), которую представляют на плоскости в виде линейного графика (упругость) вплоть до точки (T_e, Γ_e), в которой наступает разрушение; единственной упругой характеристикой для состояния чистого сдвига — кручения является модуль сдвига μ.

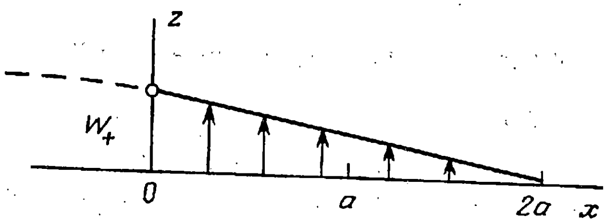
Введение предельного упругого сдвига $\Gamma=\Gamma_e$ в качестве независимого и дополнительного критерия разрушения — перехода от упругого состояния в состояние разрушения — подсказано современными опытами на «жестких» машинах [3, 4]. В этих опытах обнаруживается весьма своеобразное поведение материала; продолжается рост деформаций (удлинений или углов сдвига) при уменьшении напряжений; в опытах проявляется масштабный эффект. Это поведение может отвечать новому состоянию материала, отличному от сплошного упругого: материал разделяется на блоки, которые скользят друг по другу и поворачиваются



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

вплоть до разделения образца на отдельные части, что называют разрушением [5—7].

В обсуждении разделим достижение состояния в точке (T_e, Γ_e) диаграммы на два этапа, что позволяет сделать статическая определимость задачи. Сначала рассмотрим достижение напряженным состоянием предельных значений максимального касательного напряжения $T = T_e$, что происходит на площадке максимального касательного напряжения. Рассматривая сразу решение задачи о существовании двух областей — упругой при $r \geq a$ и области подготавливаемого разрушения $r \leq a$, находим, что существует единственное решение уравнения равновесия (1.2) при условии (1.6) в области $r \leq a$, в котором напряжения описываются при выполнении условий непрерывности на границе с упругой областью.

Это решение квазилинейного уравнения

$$\cos \varphi \, (\partial\varphi/\partial x) + \sin \varphi \, (\partial\varphi/\partial y) = 0 \tag{2.1}$$

следующего из (1.2) и (1.6) для напряжений

$$\tau_{xz} = -T_e \sin \varphi, \quad \tau_{yz} = T_e \cos \varphi \tag{2.2}$$

Уравнение (2.1) имеет известные характеристики

$$dy/dx = \operatorname{tg} \varphi \tag{2.3}$$

вдоль которых значение $\varphi(x, y) = \text{const}$, т. е. напряжения остаются постоянными вдоль лучей, проходящими, в частности, через начало координат (O, O) и равными на границе соответствующему значению φ при $r = a$ (фиг. 1):

$$\varphi|_{r=a} = \frac{1}{2}\,\theta|_{r=a} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}\frac{y}{x-a}\right]_{r=a}, \quad 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \tag{2.4}$$

Итак, первое условие разрушения $T = T_e$ привело к краевой задаче для напряжений, вполне идентичной для задачи идеальной пластичности (в напряжениях) при $r \le a$.

Для напряжений можно указать приращения при переходе от одной характеристики к другой:

$$\Delta\tau_{xz} = -T_e \cos\varphi\Delta\varphi$$

$$\Delta\tau_{yz} = -T_e \sin\varphi\Delta\varphi, \quad \Delta\tau_{xz}/\Delta\tau_{yz} = \mathrm{ctg}\,\varphi \tag{2.5}$$

т. е. главные направления тензора напряжений и тензора приращений ортогональны.

Таким образом, из (2.1) и (2.4) следует, что напряжение при $r \le a$, $y \ge 0$ описывается веером прямолинейных характеристик (и симметричным веером при $y < 0$), проходящими через начало координат (особая точка) и имеющими наклон $\varphi = \theta_0/2$. В отличие от упругого решения на оси $y = 0$ при $r \le 0$ компоненты напряжения $\tau_{xz} = 0$, а $\tau_{yz} = T_e$ (вместо $\tau_{yz} = 0$!) вплоть до особой точки, т. е. при замене упругого решения при $r \le a$ решением (2.2), разреза на этом участке нет.

В точках зоны направления площадок максимального касательного напряжения сохраняют свои значения, достигнутые со стороны упругой области при $r = a$, а вдоль характеристики (2.14) при $\varphi = \mathrm{const}$ «переносится» соответствующее значение напряжения. Естественно, что напряженное состояние в силу совпадения уравнений и краевых условий задачи не отличается от такового для идеально пластического тела при $r \le a$, при этом внешний параметр задачи (параметр нагружения A) и параметр a связаны условием (1.6); T_e и μ отражают свойства материала.

3. На следующем этапе построения решения необходимо рассмотреть второй критерий — достижение главным сдвигом значения

$$\Gamma = \sqrt{\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2}, \quad \Gamma = \Gamma_e = \mathrm{const} \tag{3.1}$$

Этот критерий, вообще говоря, независимый, так как в точках области $r \le a$ нет связи между компонентами напряжений и деформаций; известно только то, что инварианты могут быть вычислены один через другой: $T_e = \mu\Gamma_e$. Со стороны упругой области, в точках границы $r = a$ в силу соосности тензоров направления площадок максимального касательного напряжения и главного сдвига совпадают $\varphi = \psi$, а значение напряжений и деформаций связаны законом Гука (1.4).

Для изучения деформированного состояния при $r \le a$ ранее было выполнено исследование [8], в котором между упругим состоянием и состоянием с $\Gamma = \Gamma_e$ вводилось переходное состояние идеально пластического течения, в котором напряженное и деформированное состояния имели одни и те же главные оси — соосность тензоров напряжений и деформаций. Это казалось естественным еще и потому, что в материале при переходе через границу $r = a$ фиксировалось направление площадок максимального касательного напряжения, так что естественно было предположить, что сохраняются (и оказываются совпадающими) направления главных осей (совпадение площадок главного сдвига и максимального касательного напряжения). Важно при этом оценить совместность деформаций или определить связь с возможным возникновением трещин (разрывов перемещение), поэтому в [1, 8] в состоянии $r \le a$ исследовалось условие совместности деформаций как альтернативное условию соосности.

Рассмотрим уравнение (3.1), считая известными значение перемещений, деформаций и напряжений в упругой области $r \ge a$. Правила интегрирования нелинейных уравнений такого типа подробно рассмотрены в [9], что позволяет применить их к исследуемому объекту.

Уравнение (3.1) для неизвестной функции $W(x, y)$, которая определяет перемещение при $r \le a$, допускает полный интеграл

$$W(x, y) = \alpha (x - x_0) + \beta (y - y_0) + \gamma \tag{3.2}$$

$$\alpha = \frac{\partial W}{\partial x} = \varepsilon_{xz}, \quad \beta = \frac{\partial W}{\partial y} = \varepsilon_{yz}, \quad \gamma (x_0, y_0) = W_0$$

где первые два параметра α и β связаны между собой уравнением (3.1).

Общий интеграл (3.2) находится как огибающая развертывающихся поверхностей

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = x - x_0 - \frac{\alpha}{\sqrt{\Gamma_e^2 - \alpha^2}} (y - y_0) = 0$$

откуда следует

$$\alpha = \frac{x - x_0}{[(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2]^{1/2}} \tag{3.3}$$

$$W(x, y) = \Gamma_e [(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2]^{1/2} + W_0 (x_0, y_0)$$

Подчинение $W(x, y)$ начальным условиям на окружности $r = a$:

$$x_0 = a + a \cos t, \quad y_0 = a \sin t \tag{3.4}$$

$$W_0 = 2a\Gamma_e \sin (t/2), \quad 0 \le t \le \pi$$

требует выполнения условия разрешимости [9]:

$$W_0' = p_0 x_0' (t) + q_0 y_0' (t)$$

$$p_0 = (\partial W/\partial x)_{r=a}, \quad q_0 = (\partial W/\partial y)_{r=a} \tag{3.5}$$

где p_0 и q_0 также подчиняются (3.1). Из этих условий определяются при $r = a$:

$$p_0 = -\Gamma_e \sin \psi_1, \quad q_0 = \Gamma_e \cos \psi_1 \tag{3.6}$$

где $\Psi_1 = t/2$ в рассматриваемом промежутке изменения t. Последние выражения означают также непрерывность деформаций как следствие (3.1) и условия непрерывности перемещений на границе $r = a$.

Если всюду в области $r \le a$ деформации представить соотношениями (3.6), то условие их совместности

$$\partial\varepsilon_{xz}/\partial y = \partial\varepsilon_{yz}/\partial x$$

$$p = \varepsilon_{xz} = -\Gamma_e \sin \psi_1 (x, y), \quad q = \varepsilon_{yz} = \Gamma_e \cos \psi_1 (x, y) \tag{3.7}$$

приводит к уравнению

$$\sin \psi_1 \partial\psi_1/\partial x - \cos \psi_1 \partial\psi_1/\partial y = 0 \tag{3.8}$$

с характеристиками

$$\partial y/\partial x = -\operatorname{ctg} \psi_1, \quad \psi_1 (x, y) = \mathrm{const} \tag{3.9}$$

ортогональными таковым для напряженного состояния (2.3). В этом непосредственно можно убедиться, сравнивая (2.1) и (3.8) при $\psi = \varphi + \pi/2$. На характеристиках (3.9) (штриховая линия *1* на фиг. 1) деформации остаются постоянными, так что для их определения в некоторой точке нужно перенести значение соответствующей деформации с окружности в данную точку по характеристике (3.9) (прямая *2* на фиг. 1 определяется соотношением $[(x_0 - 2a)^2 + y_0^2]^{1/2}$.

Аналогичное построение можно выполнить и при $y < 0$, $-\pi \le t \le 0$, тогда

$$W(x, y) = -\Gamma_e\,[(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2]^{1/2} + 2a\Gamma_e \sin(t/2) \tag{3.10}$$

Результаты (3.3) и (3.10) позволяют вычислить все перемещения и деформации при $r \le a$.

Следует отметить, что при $y=0$, $0 \le x \le 2a$ перемещение разрывно и имеет равные, но противоположные по знаку значения, а величина «разрыва»

$$[W] = W_+ - W_- = 2\Gamma_e(2a - x) \tag{3.11}$$

достигает максимального значения в точке ($x=0$, $y=0$) и равна

$$[W]_* = 4a\Gamma_e \tag{3.12}$$

Следует также обратить внимание на тот факт, что тензоры напряжения и деформаций при $r \le a$ не являются соосными: в точках границы главные направления тензора деформаций поворачиваются так, чтобы деформации остались совместными. При этом приращения деформации $\Delta\varepsilon_{xz}$ и $\Delta\varepsilon_{yt}$, точнее их изменения при повороте площадки скольжения, и деформации ε_{xz}, ε_{yz} имеют взаимно ортогональные главные направления

$$\Delta\varepsilon_{xz} = -\cos\psi_1\Delta\psi_1$$

$$\Delta\varepsilon_{yz} = -\sin\psi_1\Delta\psi_1, \quad \Delta\varepsilon_{xz}/\Delta\varepsilon_{yz} = \operatorname{ctg}\psi_1 \tag{3.13}$$

Совместность деформаций (3.7) позволяет не детализировать альтернативное исследование, как это сделано в [1, 8], хотя внимательное обсуждение этого пути еще предстоит сделать на задачах, более общих, чем антиплоская деформация [4, 10].

Далее сделаем два замечания. Первое относится к изучению перемещений и напряжений на участке $0 \le x \le 2a$ оси $y=0$. На фиг. 3 указана форма, которую принимает «разрез» в области $r \le a$ с описанием возможности разрушения в области с параметрами T_e, Γ_e. На всем упомянутом отрезке напряжения $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = T_e$, перемещение имеет равные по величине, но противоположные значения со скачком

$$[W] = W_+ - W_- \tag{3.14}$$

который нарастает от нуля до предельного значения $[W]_* = 4a\Gamma_e$ в точке (0, 0). Можно определить это состояние в области $r \le a$ с нарастающим скачком перемещения и постоянством T_e как «хрупкий шарнир» — переход от упругого состояния к разделению тела на части — разрушению при критическом раскрытии трещины. При этом постоянство T_e можно интерпретировать как постоянство сил сцепления на участке $0 \le x \le 2a$, удерживающих берега вместе до раскрытия трещины при достижении скачка $[W]_* = 4a\Gamma_e$ [6].

Можно представить себе работу хрупкого шарнира следующим образом. С ростом значения параметра «нагружения» (таким параметром является величина A^2, пропорциональная перемещению на некотором расстоянии от разреза) начинает расти a — радиус окружности, внутри которой инварианты напряженно-деформированного состояния достигли критических значений — это целая область $r \le a$ подготовки разрушения. С дальнейшим ростом A^2 растет не только a, но и скачок перемещения в особой точке (0, 0). Как только этот скачок достигнет критической величины $[W]^* = 4a\Gamma_e$, вершина разреза со скачком перемещения $[W]_*$ может переместиться. Так что дополнительное задание к параметрам среды T_e и Γ_e кинематической величины — предельного раскрытия трещины (или размера области $a = 1/4[W_*]/\Gamma_e)$ необходимо для характеристики процесса движения разреза.

Если после некоторого роста A^2 программу нагружения задать так, чтобы A^2 уменьшалось, то запасенная в области $r \leq a$ упругая энергия будет возвращена, разрез не двигается с места. Это оправдывает термин «шарнир». Конечно, последующие исследования, включающие реологию и учет физико-химических процессов, позволяет оценить эффекты «заживления» подготавливаемых трещин; особенно это интересно в связи с изучением усталостных явлений.

Второе замечание связано с интерпретацией работы по созданию (открытию) трещины как поверхностной энергии. Хрупкий шарнир — это целая область, окружающая будущую трещину $|y| \leq a$ и содержащая элементы с упругой энергией $\sim T_e\Gamma_e/2$ в единице объема. Часть этой энергии высвободится при продвижении разреза на длину L_0 и израсходуется на создание новой поверхности (две поверхности) $2L_0T_eW_* = 2L_0 4aT_e\Gamma_e$, где T_eW_* — поверхностная энергия (на единицу поверхности). Из этого выражения следует, что если даже вся упругая энергия в хрупком шарнире $\sim \frac{1}{2}\pi a^2 T_e\Gamma_e$ перейдет в энергию разрушения, то и в этом случае ее не хватит на создание трещины длиной $L_0 = 2a$, так что часть энергии должна быть подведена из упругой области $r > a$ к хрупкому шарниру и через него переведена на открытие трещины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шемякин Е. И.* Напряженно-деформированное состояние в вершине разреза при антиплоской деформации горных пород//Физ.-техн. проблемы разраб. полез. ископаемых. 1973. № 1. С. 3—8.
2. *Макклинток Ф., Аргон А.* Деформация и разрушение материалов. М.: Мир, 1970. 443 с.
3. *Ревуженко А. Ф., Стажевский С. Б., Шемякин Е. И.* О деформировании сыпучих материалов при больших сдвигах//ФТПРПИ. 1974. № 3. С. 130—133.
4. *Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И.* Плоская деформация упрочняющегося и разрушающегося материала//ПСТФ. 1977. № 3. С. 156—174.
5. *Костров Б. В., Никитин Л. В.* Применение методов теории разрушения к изучению очагов землетрясений//Физические основания поисков методом прогноза землетрясений. М.: Наука, 1970. С. 9—27.
6. *Леонов М. Я., Панасюк В. В.* Развиток найдрібніших тріщин в твердому тілі//Прикл. механіка. 1959. Т. 5. № 4. С. 391—401.
7. *Слепян Л. И.* Механика трещин. Л.: Судостроение, 1990. 296 с.
8. *Шемякин Е. И.* Напряженно-деформированное состояние в вершине разреза при антиплоской деформации упругопластических тел//ПМТФ. 1974. № 2. С. 110—116.
9. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 4. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 804 с.
10. *Христианович С. А., Шемякин Е. И.* О плоской деформации пластического материала при сложном нагружении//Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 5. С. 138—149.

Москва

Поступила в редакцию
10.X.1995