МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1996

УДК 539.214; 539.374

© 1996 г. М. А. АРТЁМОВ

ОБ ОДНОМ ПРЕДЕЛЬНОМ ВИДЕ УСЛОВИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Рассматривается возможное изменение свойств пластических материалов в зависимости от среднего давления.

1. Условие предельного состояния в общем случае плоской задачи записывается в виде

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 0 \tag{1.1}$$

где σ_x, σ_y, τ_{xy} — компоненты тензора напряжения.

Введем замену переменных

$$\sigma_x = \sigma + \Sigma\cos 2\varphi, \sigma_y = \sigma - \Sigma\cos 2\varphi, \ \tau_{xy} = \Sigma\sin 2\varphi \tag{1.2}$$

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y), \ \Sigma = \left[\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2\right]^{1/2}, \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{1.3}$$

Используя (1.2), соотношение (1.1) перепишем в виде

$$f(\sigma, \Sigma, \varphi) = 0 \tag{1.4}$$

Ниже рассмотрим случай, когда условие (1.4) не зависит от Σ, тогда

$$f(\sigma, \varphi) = 0 \tag{1.5}$$

Соотношение (1.5) перепишем в виде

$$\varphi = \varphi(\sigma) \tag{1.6}$$

Подставляя соотношение (1.2) в уравнение равновесия

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = 0 \tag{1.7}$$

и учитывая зависимость (1.6), получим

$$\left(1 - 2\Sigma\sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial x} + 2\Sigma\cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial y} +$$

$$+ \cos 2\varphi\frac{\partial\Sigma}{\partial x} + \sin 2\varphi\frac{\partial\Sigma}{\partial y} = 0 \tag{1.8}$$

$$2\Sigma\cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x} + \left(1 + 2\Sigma\sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial y} +$$

$$+ \sin 2\varphi\frac{\partial\Sigma}{\partial x} - \cos 2\varphi\frac{\partial\Sigma}{\partial y} = 0$$

Два уравнения (1.8) относительно двух неизвестных имеют характеристики

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{\cos 2\varphi \pm [1 - 4 (\chi\Sigma)^2]^{1/2}}{2\chi\Sigma - \sin 2\varphi}, \quad \chi = \frac{d\varphi}{d\sigma} \tag{1.9}$$

При $\chi = 0$ из (1.9) следует ортогональность характеристик. Соотношения вдоль характеристик (1.9) имеют вид

$$d\Sigma = \pm \sqrt{1 - 4 (\chi\Sigma)^2}\, d\sigma \tag{1.10}$$

Согласно (1.9) уравнения (1.8) принадлежат к гиперболическому типу при

$$\Sigma < \frac{1}{2}\, d\sigma/d\varphi \tag{1.11}$$

Предположим, что $\sigma = 2k\varphi$, $k = \mathrm{const}$, тогда, согласно (1.11), имеет место $\Sigma < k$.

2. Не умаляя общности, условие (1.5) запишем в виде

$$F(\xi, \sigma) = 0, \quad \xi = \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{2.1}$$

Используя (2.1) в качестве пластического потенциала, учитывая (1.2), получим

$$\varepsilon_x = -\mu (\sin 2\varphi + 2\chi\Sigma), \quad \varepsilon_y = \mu (\sin 2\varphi - 2\chi\Sigma)$$

$$\varepsilon_{xy} = \mu \cos 2\varphi$$

$$\mu = \frac{\lambda}{2\Sigma \cos^2 2\varphi} \frac{\partial F}{\partial \xi}, \quad \lambda > 0 \tag{2.2}$$

Из (2.2) следует

$$\frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \tag{2.3}$$

Компоненты тензора скорости деформации связаны с компонентами скорости перемещения соотношениями

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.4}$$

Из соотношений (2.2), (2.4) получим систему уравнений для определения компонент скорости перемещения

$$(\sin 2\varphi - 2\chi\Sigma) \frac{\partial u}{\partial x} + (\sin 2\varphi + 2\chi\Sigma) \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.5}$$

$$\cos 2\varphi \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \sin 2\varphi \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$$

Система уравнений имеет своими характеристиками выражения (1.9). Вдоль характеристик имеют место условия

$$du\,dx + dv\,dy = 0 \quad \left(\frac{dy}{dx} = -\frac{du}{dv}\right) \tag{2.6}$$

Из (2.6) следует, что приращение вектора скорости ортогонально касательной и характеристике, приращения скорости вдоль характеристики отсутствуют, поэтому для скорости вдоль характеристик имеют место соотношения Гейрингер [1, 2].

Определим диссипативную функцию

$$D = \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + 2\tau_{xy}\varepsilon_{xy} \qquad (2.7)$$

Подставляя в (2.7) выражения для компонент тензора скорости деформации из (2.2), получим

$$D = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma} \sigma \qquad (2.8)$$

Из (2.2) найдем

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \lambda\, \partial F/\partial \sigma \qquad (2.9)$$

Согласно (2.8), (2.9), получим

$$D = \sigma\varepsilon, \ \varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y \qquad (2.10)$$

Из (2.1) определим

$$\sigma = g(\xi) \qquad (2.11)$$

Принимая во внимание соотношения (2.1), (2.3), уравнение (2.11) можно переписать в виде

$$\sigma = g\left(\frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{2\varepsilon_{xy}}\right) \qquad (2.12)$$

Согласно (2.10), (2.12), окончательное выражение для диссипативной функции принимает вид

$$D = g\left(\frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{2\varepsilon_{xy}}\right) \varepsilon \qquad (2.13)$$

3. В качестве примера рассмотрим прямоугольную полосу под действием равномерных растягивающих и касательных усилий. Условие предельного состояния примем в виде (2.1).

Предположим, что полоса находится в состоянии равновесия под действием постоянных напряжений σ_x°, σ_y°, τ_{xy}°, удовлетворяющих соотношениям

$$F(\xi^\circ, \sigma^\circ) = 0, \ \xi^\circ = \frac{2\tau_{xy}^\circ}{\sigma_x^\circ - \sigma_y^\circ}, \ \sigma^\circ = \frac{1}{2}(\sigma_x^\circ + \sigma_y^\circ) \qquad (3.1)$$

Предположим, что напряженное состояние возмущается за счет малых изменений напряжений, которые, в частности, могут возникнуть за счет возмущений граничных условий, например, при рассмотрении пологих выточек и т. п. [3]. Представим напряженное состояние в виде

$$\sigma_x = \sigma_x^\circ + \sigma_x', \ \sigma_y = \sigma_y^\circ + \sigma_y', \ \tau_{xy} = \tau_{xy}^\circ + \tau_{xy}' \qquad (3.2)$$

Подставляя соотношение (3.2) в (3.1), проводя линеаризацию, получим

$$\alpha\sigma_x' + \beta\sigma_y' + 2\gamma\tau_{xy}' = 0 \qquad (3.3)$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \sigma^\circ}(\sigma_x^\circ - \sigma_y^\circ) - \frac{\partial F}{\partial \xi^\circ}\xi^\circ,$$

$$\beta = \frac{\partial F}{\partial \xi^\circ}\xi^\circ + \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \sigma^\circ}(\sigma_x^\circ - \sigma_y^\circ)$$

$$\gamma = \partial F/\partial \xi^\circ$$

Используя функцию напряжений

$$\sigma_x' = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y' = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy}' = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \tag{3.4}$$

из (3.3), (3.4) находим

$$\alpha\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2\gamma\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \beta\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \tag{3.5}$$

Когда $\gamma^2 - \alpha\beta > 0$, общее решение уравнения (3.5) будем искать в виде

$$U = U_1(x + c_1 y) + U_2(x + c_2 y) \tag{3.6}$$

$$c_{1,2} = (\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \alpha\beta})/\alpha$$

Согласно (3.4), (3.6), выражения для компонент тензора напряжений записываются в виде

$$\sigma_x' = c_1^2 g_1(\zeta) + c_2^2 g_2(\eta), \quad \sigma_y' = g_1(\zeta) + g_2(\eta)$$

$$\tau_{xy}' = -c_1 g_1(\zeta) - c_2 g_2(\eta), \quad \zeta = x + c_1 y, \quad \eta = x + c_2 y$$

$$g_1 = \partial^2 U_1/\partial \zeta^2, \quad g_2 = \partial^2 U_2/\partial \eta^2 \tag{3.7}$$

Решение (3.7) может быть использовано для определения напряженного состояния в растягиваемом образце с пологими выточками аналогично [4].

Автор благодарит Д. Д. Ивлева за предложенную тему исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
2. *Ивлев Д. Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1962. 231 с.
3. *Ивлев Д. Д., Ершов Л. В.* Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
4. *Григорьев Е. А., Ивлев Д. Д., Шитова Л. Б.* Об образовании шейки при течении анизотропной жесткопластической полосы//Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 2. С. 183—185.

Воронеж

Поступила в редакцию
8.IX.1994