

УДК 539.3

© 1996 г. В. И. ПОЖУЕВ, И. А. СКРЫПНИК, А. Д. ШАМРОВСКИЙ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ АНТИПЛОСКОЙ САМОУРАВНОВЕШЕННОЙ УПРУГОЙ ВОЛНЫ ОТ ГРАНИЦЫ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Рассматривается антиплоская задача о распространении нестационарных упругих волн от границы полупространства. Для задач такого рода обычным является метод решения с применением интегральных преобразований (см. например, [1]). Однако в [2, 3] показано, что для исследования прифронтовых зон эффективным является метод, основанный на совместном применении аппаратов теории непрерывных групп и асимптотического анализа.

Здесь тот же подход применяется для полного исследования волнового процесса во всей возмущенной зоне и для любых моментов времени. Построены три итерационных процесса, соответствующие трем различным зонам распространяющегося возмущения: прифронтовой, приграничной и промежуточной. Решение уравнений производится при помощи теории инвариантно-групповых свойств дифференциальных уравнений [4].

1. Постановка задачи. Пусть x_1, y_1, z_1 — декартовы координаты, а t_1 — время. Положим в динамических уравнениях пространственной теории упругости равными нулю перемещения вдоль осей x_1 и y_1 , а перемещение вдоль оси z_1 не зависящим от z_1 : $w = w(x_1, y_1, t_1)$. Тогда придем к уравнениям

$$\mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} \right) - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} = 0, \quad \tau_{xz} = G \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad \tau_{yz} = G \frac{\partial w}{\partial y_1} \quad (1.1)$$

Рассматривая полупространство $x_1 \geq 0$, представим искомые величины в виде

$$w = u(x_1, t_1) \cos \lambda y_1, \quad \tau_{xz} = \sigma_{xz}(x_1, t_1) \cos \lambda y_1 \quad (1.2)$$

$$\tau_{yz} = \sigma_{yz}(x_1, t_1) \sin \lambda y_1$$

получим из (1.1) уравнение

$$\partial_x^2 u - \partial_t^2 u - u = 0 \quad (1.3)$$

$$T = \partial_x u, \quad \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad T = \frac{\sigma_{xz}}{\lambda G}, \quad x = \lambda x_1, \quad t = \lambda \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} t_1$$

Рассмотрим уравнение (1.3), как описывающее распространение упругой самоуравновешенной волны от границы полупространства $x_1 \geq 0$. Поскольку вдоль линий с уравнениями вида $y_1 = \pm (k\pi/\lambda)$ ($k = 0, 1, \dots$) будет $\tau_{yz} = 0$, то решения, справедливые для полупространства с нагруженной границей $x = 0$, будут справедливы и для полос, ограниченных прямой $x = 0$ и двумя прямыми вида $y_1 = \pm k\pi/\lambda$ (при различных целых k) при отсутствии напряжений на этих боковых границах.

2. Асимптотико-групповой анализ. Рассмотрим уравнение (1.3), известное как уравнение Клейна — Гордона. Для оценки весов его членов применим методику асимптотического анализа. Поскольку уравнение (1.3) не содержит малого параметра, будем использовать формально введенный малый параметр $\delta < 1$.

Выполним преобразования растяжений [4], подвергая им аргументы искомой функции

$$x^* = \delta^{\beta_1} x, \quad t^* = \delta^{\beta_2} t, \quad u^* = u \quad (2.1)$$

Потребуем, чтобы в результате преобразований (2.1) стали справедливыми соотношения

$$\partial_x^* \sim 1, \quad \partial_t^* \sim 1, \quad u^* \sim 1 \quad (2.2)$$

Этого всегда можно добиться локально, т.е. в окрестности некоторых значений \tilde{x}, \tilde{t} . Функция u не преобразуется, поскольку уравнение (1.3) инвариантно относительно растяжений этой функции.

Преобразования (2.1) позволяют выявить веса членов уравнения (1.3), поскольку, в силу (2.2), эти веса теперь полностью определяются приобретенными после преобразований коэффициентами.

Исследуем возможные значения β_1, β_2 . Подвергая уравнение (1.3) преобразованиям (2.1), получим уравнение

$$\delta^{2\beta_1} \partial_x^2 u - \delta^{2\beta_2} \partial_t^2 u - \delta^0 u = 0 \quad (2.3)$$

Будем рассматривать случаи минимального упрощения, соответствующие равным весам каких-либо двух из трех членов уравнения (1.3) и меньшему весу третьего члена. Соотношения

$$2\beta_1 = 2\beta_2 < 0 \quad (2.4)$$

задают однопараметрическую группу преобразований

$$x^* = \delta^{\beta_1} x, \quad t^* = \delta^{\beta_1} t, \quad u^* = u \quad (2.5)$$

и соответствуют быстрому изменению искомой функции u (и T) по x и t и преобладанию в (1.3) и (2.3) первых двух членов по сравнению с третьим, т. е. упрощенному уравнению

$$\partial_x^2 u - \partial_t^2 u = 0 \quad (2.6)$$

Соотношения

$$2\beta_1 = 0 < 2\beta_2 \quad (2.7)$$

задают однопараметрическую группу преобразований

$$x^* = x, \quad t^* = \delta^{\beta_2} t, \quad u^* = u \quad (2.8)$$

и соответствуют медленному изменению по t и преобладанию первого и третьего членов уравнений (1.3) и (2.3) по сравнению со вторым, т. е. уравнению

$$\partial_x^2 u - u = 0 \quad (2.9)$$

Наконец, соотношения

$$2\beta_2 = 0 < 2\beta_1 \quad (2.10)$$

задают однопараметрическую группу преобразований

$$x^* = \delta^{\beta_1} x, \quad t^* = t, \quad u^* = u \quad (2.11)$$

и соответствуют медленному изменению по x и преобладанию второго и третьего членов над первым, т. е. уравнению

$$\partial_t^2 u + u = 0 \quad (2.12)$$

3. Процедура последовательных приближений. Для построения процедуры последовательных приближений представим искомую функцию в виде ряда

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad (3.1)$$

Преобразования (2.1) и соотношения (2.2) заменим преобразованиями

$$x^* = \delta^{\beta_1} x, \quad t^* = \delta^{\beta_2} t, \quad u_k^* = \delta^{1-k} u_k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.2)$$

приводящими к соотношениям

$$\partial_x^* \sim 1, \quad \partial_t^* \sim 1, \quad u_k^* \sim \delta^{\gamma} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.3)$$

при произвольном γ .

В преобразованных переменных ряд (3.1) принимает вид

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^* \delta^{k-1} \quad (3.4)$$

причем, в соответствии с (3.3), коэффициенты при различных степенях δ этого ряда есть величины одного порядка.

Подставим (3.1) в (1.3), выполним преобразования (3.2) и произведем расщепление по одинаковым степеням δ , соответствующее выбранным β_1, β_2 , получая вместо (1.3) бесконечную рекуррентную систему уравнений, которая инвариантна относительно преобразований (3.2), поскольку процедура расщепления объединяет в каждое из уравнений системы члены, приобретающие после преобразований (3.2) одинаковые степени γ . Инвариантность рекуррентной системы уравнений относительно этих преобразований позволяет, не меняя вида этой системы, вернуться от преобразованных к исходным уравнениям и получить окончательное решение в виде ряда (3.1), члены которого удовлетворяют соответствующей рекуррентной системе уравнений, и при этом ни ряд ни уравнения не содержат формально введенного малого параметра δ .

Рассмотрим следующие значения β_1, β_2 , соответствующие наименьшим целым степеням δ в (2.3).

1. $\beta_1 = \beta_2 = -0,5$. Рекуррентная система дифференциальных уравнений для поиска u_k имеет вид

$$\partial_x^2 u_k - \partial_t^2 u_k = u_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.5)$$

$$u_{k-1} = 0 \quad \text{при } k = 1.$$

2. Значениям $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0,5$ соответствует рекуррентная система

$$\partial_x^2 u_k - u_k = \partial_t^2 u_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.6)$$

3. При $\beta_1 = 0,5, \beta_2 = 0$ рекуррентная система имеет вид

$$\partial_t^2 u_k + u_k = \partial_x^2 u_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.7)$$

Бесконечные рекуррентные системы уравнений (3.5), (3.6) и (3.7) инвариантны относительно преобразований

$$x^* = x, \quad t^* = t, \quad u_k^* = \delta^{\gamma} u_k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.8)$$

Кроме того, системы уравнений (3.5), (3.6) и (3.7) допускают, соответственно, преобразования

$$x^* = \delta^{-0,5} x, \quad t^* = \delta^{-0,5} t, \quad u_k^* = \delta^{1-k} u_k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.9)$$

$$x^* = x, t^* = \delta^{0,5}t, u_k^* = \delta^{1-k}u_k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.10)$$

$$u^* = \delta^{0,5}x, t^* = t, u_k^* = \delta^{1-k}u_k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.11)$$

4. Инвариантно-групповые решения. Появление добавочных преобразований растяжений, относительно которых инвариантны упрощенные уравнения и соответствующие рекуррентные системы уравнений, позволяет значительно упростить задачу решения уравнений с одновременной проверкой соблюдения тех асимптотических соотношений, в рамках которых строились упрощенные уравнения. Применим здесь соответствующую методику [2, 3].

Рассмотрим суперпозицию преобразований (3.8) и (3.9), относительно которых инвариантна система уравнений (3.5)

$$x^* = \delta^{-0,5}x, t^* = \delta^{-0,5}t, u_k^* = \delta^{\gamma+1-k}u_k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (4.1)$$

Инвариантами преобразований (4.1) являются

$$J = t/x, I_k = x^{2\gamma+2-2k}u_k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (4.2)$$

Поэтому инвариантное решение можно искать в виде

$$I_k = I_k(J) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (4.3)$$

или

$$u_k = x^{2k-2-2\gamma}I_k(t/x) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (4.4)$$

Подстановка (4.2) в (3.5) приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно искомых функций (4.3):

$$(J^2 - 1) I_k'' - 2(2k - 3 - 2\gamma) J I_k' + (2k - 2 - 2\gamma)(2k - 3 - 2\gamma) I_k = I_{k-1} \quad (4.5)$$

где штрих обозначает дифференцирование по J ($k = 1, 2, \dots$). При $k=1$ решение уравнения (4.5) имеет вид

$$I_1 = A_1 |J - 1|^{-2\gamma} + A_2 |J + 1|^{-2\gamma} \quad (4.6)$$

Отсюда получим

$$u_1 = A_1 x^{-2\gamma} |t/x - 1|^{-2\gamma} + A_2 x^{-2\gamma} |t/x + 1|^{-2\gamma} \quad (4.7)$$

Решение

$$u_1 = \begin{cases} A_1 (t - x)^{-2\gamma}, & x \leq t \\ 0, & x > t \end{cases} \quad (4.8)$$

соответствует рассмотрению предварительно покоящегося полупространства, по которому от границы $x = 0$ в положительном направлении оси x распространяется возмущение, захватывающее за время t область $x \leq t$. Значение $x = t$ соответствует фронту распространяющегося возмущения. Решение (4.8) удовлетворяет асимптотическим оценкам $\partial_x \sim \partial_t > 1$ при $t - x < |2\gamma|$, т. е. при небольших расстояниях от фронта, а именно в прифронтовой зоне.

Аналогично ищутся и решения уравнений последующих приближений. Выражение для u_k имеет вид

$$u_k = \sum_{i=1}^k u_k x^{k-i} (t - x)^{-2\gamma+k+i-2} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (4.9)$$

Оно определено при $x \leq t$ и равно нулю при $x > t$.

Коэффициенты $u_{k,i}$ определяются из рекуррентных соотношений, которые получаются после подстановки (4.9) в (3.5) и имеют вид

$$u_{k,i} = \frac{(k-i+1)(k-i)u_{k,i-1} - u_{k-1,i}}{2(k-i)(-2\gamma+k+i-2)} \quad (4.10)$$

$$(k=2, 3, \dots), (i=1, 2, \dots, k-1)$$

$$u_{k,i-1} = 0 \text{ при } i=1$$

Коэффициенты $u_{k,k}$ из (4.10) не определяются; они являются произвольными постоянными и находятся из граничных условий.

Пусть на границе $x=0$ задано усилие

$$T(0, t) = f(t) \quad (4.11)$$

Из (4.9) получаем выражение для T :

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial u_k}{\partial x} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{k-1} (k-i) u_{k,i} x^{k-i-1} (t-x)^{-2\gamma+k+i-2} - \sum_{i=1}^k (-2\gamma+k+i-2) u_{k,i} x^{k-i} (t-x)^{-2\gamma+k+i-3} \right] \quad (4.12)$$

При $x=0$ имеем

$$T(0, t) = \sum_{k=1}^{\infty} [u_{k,k-1} - (-2\gamma+2k-2) u_{k,k}] t^{-2\gamma+2k-3} \quad (4.13)$$

Следовательно, функция $f(t)$ должна быть представлена в виде ряда

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k t^{-2\gamma+2k-3} \quad (k=1, 2, \dots) \quad (4.14)$$

Откуда

$$u_{k,k} = \frac{u_{k,k-1} - f_k}{-2\gamma+2k-2} \quad (k=1, 2, \dots) \quad (4.15)$$

Теоретически ряды (4.9) и (4.12) способны описать решения в пределах всей возмущенной зоны $0 \leq x \leq t$. Однако их практическое применение связано либо со сравнительно небольшими значениями t , либо при больших значениях t , с описанием только прифронтовой зоны $x \approx t$, поскольку с ростом расстояния от фронта $t-x$ и с ростом x возрастают трудности, связанные с вычислением степенных рядов.

Ряды (3.1), (4.9) и (4.12) допускают существенное улучшение.

Запишем полное выражение для u :

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^k u_{k,i} x^{k-i} (t-x)^{-2\gamma+k+i-2} \quad (k=1, 2, \dots) \quad (4.16)$$

и преобразуем его, перегруппировав слагаемые, к виду

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,i} x^{k-i} (t-x)^{-2\gamma+k+i-2} = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \quad (4.17)$$

$$v_i = \sum_{k=i}^{\infty} u_{k,i} x^{k-i} (t-x)^{-2\gamma+k+i-2} =$$

$$= (t-x)^{-2\gamma+2i-2} \sum_{k=i}^{\infty} u_{k,i} x^{k-i} (t-x)^{k-i} = (t-x)^{-2\gamma+2i-2} w_i(y) \quad (4.18)$$

$$w_i(y) = \sum_{k=i}^{\infty} u_{k,i} [x(t-x)]^{k-i}, \quad y = x(t-x) \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (4.19)$$

Таким образом, для u получаем выражение в виде ряда

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} (t-x)^{-2\gamma+2i-2} w_i(y), \quad y = x(t-x) \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (4.20)$$

Функции $w_i(y)$ можно было бы отыскивать при помощи рядов (4.19). Однако более удобные выражения для них можно найти, подставляя (4.20) в (1.3) и производя расщепление по одинаковым степеням $(t-x)$. При этом получаются дифференциальные уравнения относительно w_i :

$$\frac{d^2 w_i}{dz^2} + \frac{2(2i+m-1)+1}{z} \frac{dw_i}{dz} + w_i = \frac{1}{z^2} \frac{d^2 w_{i-1}}{dz^2} - \frac{1}{z^2} \frac{dw_{i-1}}{dz} \quad (4.21)$$

$$(i = 1, 2, \dots), \quad z = \sqrt{2y}, \quad m = -(2\gamma + 1)$$

Используя обозначения для Лямбда-функций

$$\Lambda_\nu(z) = \Gamma(\nu+1) J_\nu(z)/(z/2)^\nu \quad (4.22)$$

где Γ — гамма-функция, J_ν — функция Бесселя действительного аргумента, можно записать решение уравнений (4.21) в виде

$$w_i = \sum_{j=1}^i w_{i,j} \Lambda_{i+j+m-1}(z) \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (4.23)$$

Решение вида (4.23) соответствует исходному представлению (4.19) для w_i . Другие решения уравнений (4.21), не соответствующие (4.19) (решения с особенностями), здесь не рассматриваются.

Таким образом, приходим к решению уравнения (3.5) в виде

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} (t-x)^{2i+m-1} \sum_{j=1}^i w_{i,j} \Lambda_{i+j+m-1}(\sqrt{2x(t-x)}) \quad (4.24)$$

Коэффициенты $w_{i,j}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям, которые можно найти после подстановки (4.23) в (4.21):

$$w_{i,j} = \frac{w_{i-1,j}}{4(i-j)(i+j+m-1)} \quad (j = 1, \dots, i-1) \quad (4.25)$$

Коэффициенты типа $w_{i,i}$ соотношениями (4.25) не определяются, являясь константами интегрирования. Для их нахождения вновь воспользуемся представлением (4.14) для силы, заданной на границе $x=0$. С учетом обозначения $m = -(2\gamma + 1)$ вместо (4.14) можно записать

$$T(0, t) = P(t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i t^{2i+m-2} \quad (4.26)$$

Задавая какую-либо нагрузку, например,

$$P = P_0 \cos \omega t \quad (4.27)$$

в виде ряда типа (4.26), можно, используя коэффициенты этого ряда, найти коэффициенты $w_{i,t}$ ряда (4.24)

$$w_{i,t} = - \left[f_i + \frac{w_{i-1,t-2}}{2(2i+m-3)} \right] / (2i+m-1) \quad (4.28)$$

Решение вида (4.24) обладает существенными достоинствами по сравнению с (4.16). В частности, с его помощью можно получить замкнутые асимптотические выражения для u и T , справедливые при $t \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow t$. При $m = 0$ (что соответствует и нагрузке вида (4.27)) имеем

$$u = - (t-x) \Lambda_1 (\sqrt{2x(t-x)}), \quad T = \Lambda_0 (\sqrt{2x(t-x)}) \quad (4.29)$$

Важным здесь является то, что решение в прифронтовой зоне полностью описывается первым членом разложения (4.14), т. е. зависит только от поведения нагрузки в начальный момент времени и не зависит от того, как изменяется нагрузка в дальнейшем.

5. Вспомогательные итерационные процессы. Рассмотрим рекуррентную систему (3.6). Здесь в каждом приближении решаются обыкновенные дифференциальные уравнения относительно u_k ($k = 1, 2, \dots$) как функций x , но с учетом того, что u_k зависят еще и от t как от параметра. В первом приближении имеем

$$u_1 = u_{1,1}(t) e^{-x}, \quad T_1 = - u_{1,1}(t) e^{-x} \quad (5.1)$$

Здесь удержано только слагаемое с e^{-x} , как локализованное вблизи границы полупространства $x \geq 0$, а слагаемое с e^x отброшено. Это решение справедливо при медленном изменении коэффициента $u_{1,1}(t)$ по t . Удовлетворяя при $x = 0$ нагрузке вида (4.27), имеем

$$u_{1,1} = - P_0 \cos \omega t \quad (5.2)$$

В уравнениях последующих приближений будем удовлетворять нулевым граничным условиям. В итоге для искомых функций во всех приближениях сохраняется зависимость от t , заданная нагрузкой.

Суммируя, получаем, что

$$u = U(x) \cos \omega t \quad (5.3)$$

Подставляя (5.3) в (1.3), имеем

$$d^2 U / dx^2 + (\omega^2 - 1) U = 0 \quad (5.4)$$

При $\omega < 1$ решение с учетом (5.3) и (4.27) будет

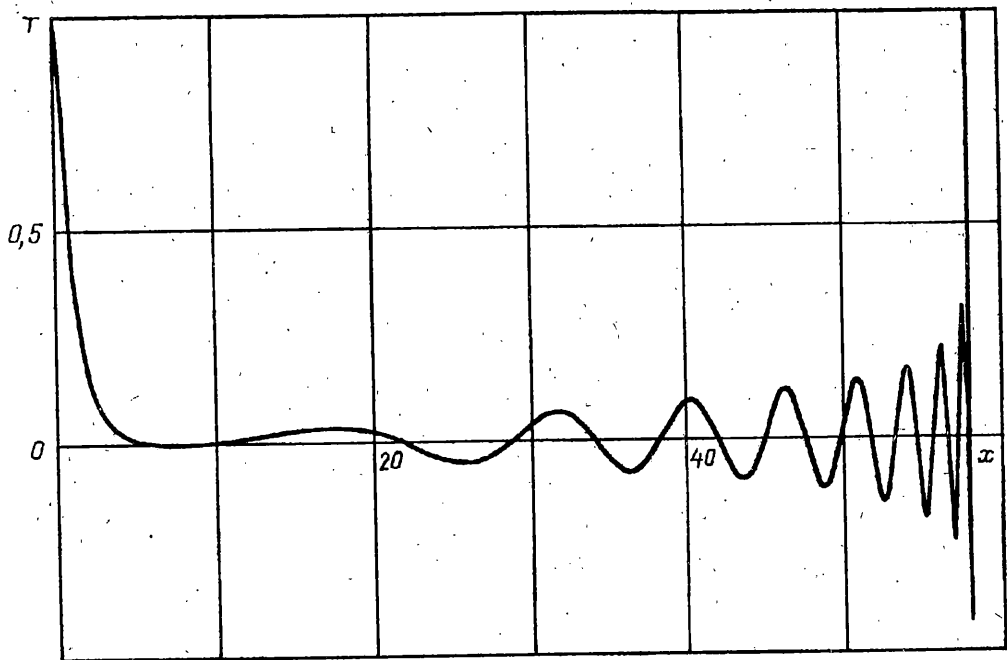
$$u = - \frac{P_0}{\kappa} e^{-\kappa x} \cos \omega t, \quad T = P_0 e^{-\kappa x} \cos \omega t, \quad \kappa = \sqrt{1 - \omega^2} \quad (5.5)$$

(удержаны только локализованные вблизи границы $x = 0$ слагаемые).

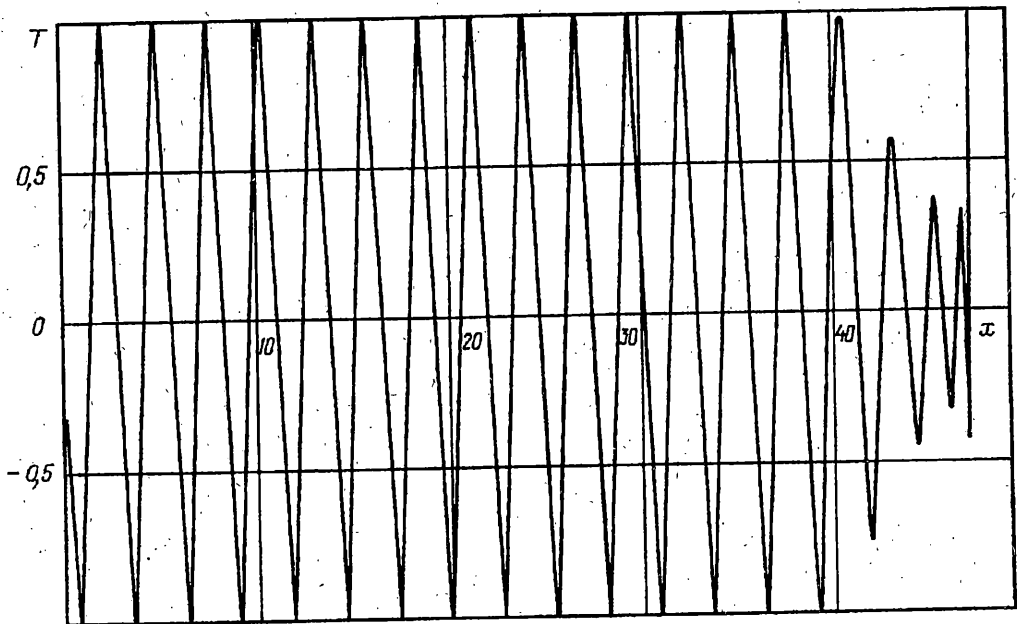
При $\omega > 1$ будет

$$u = - \frac{P_0}{\sqrt{\omega^2 - 1}} \sin(\omega t - \sqrt{\omega^2 - 1} x), \quad T = P_0 \cos(\omega t - \sqrt{\omega^2 - 1} x) \quad (5.6)$$

Таким образом, при $\omega < 1$, т. е. при относительно медленном изменении нагрузки во времени, получается решение, локализованное вблизи границы $x = 0$. При $\omega > 1$, т. е. при быстром изменении нагрузки во времени, решение принимает характер бегущей волны, излучаемой нагруженной границей.



Фиг. 1



Фиг. 2

Отдельно рассмотрим резонансный случай $\omega = 1$. При этом выражение для u будем искать в виде

$$u = U(x) \cos t + Ct \sin t \quad (5.7)$$

Подстановка (5.7) в (1.3) дает с учетом (4.27):

$$u = \left(\frac{A}{2} x^2 + P_0 x \right) \cos t + \frac{A}{2} t \sin t, \quad T = (Ax + P_0) \cos t \quad (5.8)$$

Решения вида (5.5), (5.6) и (5.8) описывают состояние вблизи нагруженной границы $x = 0$ после удаления от нее прифронтовой зоны. Их можно рассматривать как асимптотические решения при $t \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow 0$.

Для изучения переходного режима, возникающего при не слишком удаленном от границы фронте волны, рассмотрим третью рекуррентную систему уравнений (3.7). Здесь в каждом приближении снова решаются обыкновенные дифференциальные уравнения относительно u_k как функций на этот раз t , а x служит параметром. В первом приближении имеем

$$u_1 = u_{1,1}^c(x) \cos t + u_{1,1}^s(x) \sin t \quad (5.9)$$

Это решение справедливо при медленном изменении коэффициентов $u_{1,1}^c$ и $u_{1,1}^s$ по x . Поскольку оно может удовлетворять только начальным условиям, т. е. описывает свободные колебания, вызванные начальным возмущением, то будем описывать формы колебаний на промежутке $0 \leq x \leq t$ в виде обычных членов разложения Фурье, что соответствует идее, высказанной ранее в [1]:

$$u_{1,1}^c = A_c \cos \gamma x + B_s \sin \gamma x, \quad u_{1,1}^s = C_c \cos \gamma x + D_s \sin \gamma x \quad (5.10)$$

В следующих приближениях такие зависимости от x сохраняются, в итоге для u и T в сумме имеем

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} (u_{mc} \cos \alpha t + u_{ms} \sin \alpha t) \cos \gamma x \quad (5.11)$$

$$T = - \sum_{m=1}^{\infty} \gamma (u_{mc} \cos \alpha t + u_{ms} \sin \alpha t) \sin \gamma x$$

$$\gamma = m\pi/t, \quad \alpha = \sqrt{1 + \gamma^2}$$

Вид решения (5.11) подобран так, чтобы при $x=0$ оно соответствовало нулевым граничным условиям.

Решения вида (5.5), (5.6) и (5.8) удовлетворяют только граничным условиям, а решение (5.11) — только начальным. Суммируя их (отдельно для $\omega < 1, \omega > 1$ и $\omega = 1$), получаем решения, удовлетворяющие как дифференциальному уравнению (1.3), так и всем граничным и начальным условиям. При этом коэффициенты u_{mc} и u_{ms} находятся как обычные коэффициенты рядов Фурье.

При $t \rightarrow \infty$ коэффициенты $u_{mc} \rightarrow 0$ и $u_{ms} \rightarrow 0$ ($m = 0, \dots$). Следовательно, решение (5.11) с ростом времени асимптотически стремится к нулю. Окончательно получаем, что решение уравнения (1.3), удовлетворяющее всем граничным и начальным условиям, получается либо как итог первого итерационного процесса (3.5), либо как совместный итог второго и третьего итерационных процессов (3.6) и (3.7). При малых значениях t полную картину напряженно-деформированного состояния полупространства одинаково хорошо описывают оба вида решений. Но при больших t первое решение лучше описывает прифронтовую зону, а второе — приграничную и промежуточную. Для полного описания волнового процесса можно часть картины описывать решением одного вида, а часть — другого. При $t \rightarrow \infty$ решение вида (5.11) исчезает, а прифронтовая и приграничная зоны описываются соответствующими простыми асимптотическими формулами.

На фиг. 1, 2 показаны соответствующие картины распространения волнового процесса, иллюстрирующие полученные результаты для значения времени $t = 17\pi$.

При $\omega = 0$ (фиг. 1) выделяется быстроосциллирующая прифронтовая зона, затухающая с удалением от фронта, и локализованная плавноизменяющаяся приграничная зона, между которыми со временем устанавливается невозмущенная зона. Для $0 \leq x \leq 0,8t$ график строился с использованием формул (5.5) и (5.11),

а для $0,8t \leq x \leq t$ — с использованием рядов (4.24). При этом наблюдается достаточно обширный участок полного совпадения решений обоого вида.

При $\omega = 2,5$ (фиг. 2) прифронтная зона переходит в стационарный волновой процесс. И здесь решение вида (5.6) и (5.11) хорошо стыкуется, на некотором удалении от фронта, с решением вида (4.24).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 374 с.
2. Шамровский А. Д. Распространение упругих волн от края кругового выреза в цилиндрической оболочке типа Тимошенко//Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 4. С. 69—79.
3. Шамровский А. Д. Исследование прифронтных зон в задаче о распространении упругих волн от края кругового выреза в цилиндрической оболочке типа Тимошенко//Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 6. С. 59—67.
4. Овсянников Л. Г. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

Запорожье

Поступила в редакцию
20.I.1994