МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1996

УДК 539.37

 И. Ю. ЦВЕЛОДУБ

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ НЕУПРУГИХ ПЛАСТИН

Рассматриваются геометрически линейные обратные задачи (*ОЗ*) о нахождении внешних воздействий (силовых или кинематических), обеспечивающих за заданное время после упругой («мгновенной») или неупругой («медленной») разгрузки требуемое остаточное формоизменение вязкоупругопластической пластины. Выделяются классы корректных ОЗ, для которых существует единственное обобщенное решение, непрерывно зависящее от данных задачи. Для каждой задачи обосновываются итерационные методы решения, даются оценки скорости сходимости к точному решению. В качестве примера рассмотрена одномерная задача в кинематической постановке (упругая разгрузка).

1. Рассмотрим вязкоупругопластическую пластину постоянной толщины h (хотя это предположение не является существенным и все рассуждения остаются справедливыми и в случае переменной толщины), занимающую область S в плоскости Ox_1x_2, ограниченную контуром γ. Ось z направим перпендикулярно этой плоскости. Считаем, что пластина деформируется таким образом, что ее прогиб $w = w(x_1, x_2, t)$ (t — время) мал в сравнении с толщиной h, так что для полных деформаций имеем [1]:

$$\varepsilon_{kl} = -zw_{,kl}, \quad |z| \le h/2 \tag{1.1}$$

где индекс после запятой означает производную по соответствующей координате. В (1.1) и всюду далее $k, l = 1, 2$.

Уравнения равновесия имеют вид [1]:

$$Q_k = M_{kl,l}, \quad Q_{k,k} = -q \tag{1.2}$$

$$Q_k = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{3k}\, dz, \quad M_{kl} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{kl} z\, dz$$

где Q_k, M_{kl} — перерезывающие силы и моменты, q — интенсивность внешней нагрузки, по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 2.

Для любых двух полей ε_{kl} и σ_{kl}, удовлетворяющих (1.1) и (1.2), имеет место равенство [1]:

$$\int_v \sigma_{kl}\varepsilon_{kl}\, dv = \int_S qw\, dS + \int_\gamma [(Q + \partial H/\partial s)\, w - G\, \partial w/\partial n]\, ds \tag{1.3}$$

$$Q = Q_k n_k, \quad H = M_{kl} n_k t_l, \quad G = M_{kl} n_k n_l$$

где n_k, t_k — компоненты единичных векторов нормали и касательной к контуру γ, s — длина его дуги.

$$\int_v U\, dv = \int_{-h/2}^{h/2} \int_S U\, dS\, dz$$

Соотношение (1.3) является аналогом известного уравнения виртуальных работ в пространственном случае [2]. Поля ε_{kl} и σ_{kl} в (1.3) могут быть не связанными между собой.

Определяющие уравнения деформирования материала пластины имеют вид [2]:

$$\varepsilon_{kl} = a_{klmn}\sigma_{mn} + \varepsilon^N_{kl} \tag{1.4}$$

где a_{klmn}, σ_{kl}, ε^N_{kl} — компоненты упругих податливостей, напряжений и неупругих деформаций. Последние складываются из пластических и вязких и удовлетворяют условиям [2]:

$$\int_0^t \Delta\dot{\varepsilon}^N_{kl}\Delta\sigma_{kl}\,dt \geq \lambda \int_0^t a_{klmn}\Delta\sigma_{kl}\Delta\sigma_{mn}\,dt \quad (\lambda = \lambda(t) > 0) \tag{1.5}$$

$$\int_0^t \Delta\dot{\varepsilon}^N_{kl}\Delta\sigma_{kl}\,dt \geq \lambda_1 \int_0^t b_{klmn}\Delta\dot{\varepsilon}^N_{kl}\Delta\dot{\varepsilon}^N_{mn}\,dt \quad (\lambda_1 = \lambda_1(t) > 0)$$

$$\Delta\sigma_{kl} = \sigma^{(1)}_{kl}(t) - \sigma^{(2)}_{kl}(t), \quad \Delta\varepsilon^N_{kl} = \varepsilon^{N(1)}_{kl}(t) - \varepsilon^{N(2)}_{kl}(t)$$

$$t = 0{:}\quad \Delta\sigma_{kl} = 0, \quad \Delta\varepsilon^N_{kl} = 0$$

Здесь b_{klmn} — компоненты тензора, обратного к a_{klmn}, т. е. $a_{klmn}b_{klij} = \delta_{im}\delta_{jk}$, δ_{kl} — компоненты единичного тензора. Примеры зависимостей типа $\dot{\varepsilon}^N_{kl} = \dot{\varepsilon}^N_{kl}(\sigma_{mn}, t)$, удовлетворяющих обоим неравенствам (1.5), приведены в [2].

Прежде чем перейти к формулировке ОЗ сделаем несколько замечаний относительно процесса мгновенной разгрузки. Прогиб w в любой момент t $(0 \leq t \leq t_*)$ представим в виде $w = w^e + w^*$, где w^e — величина упругого «распруживания» (т. е. прогиб, соответствующий упругой разгрузке), являющаяся решением упругой задачи при текущей внешней нагрузке $q = q(x_1, x_2, t)$ и соответствующих граничных условиях, w^* — текущий остаточный прогиб (т. е. прогиб, который остался бы после мгновенного снятия указанной нагрузки). Последнему согласно (1.1) соответствуют остаточные деформации ε^*_{kl}, причем

$$\varepsilon^*_{kl} = a_{klmn}\rho_{mn} + \varepsilon^N_{kl} \tag{1.6}$$

где ρ_{kl} — остаточные напряжения, возникающие после упругой разгрузки. При этом поле напряжений в любой момент можно представить в виде [2]:

$$\sigma_{kl} = \sigma^e_{kl} + \rho_{kl} \tag{1.7}$$

где σ^e_{kl} — компоненты упругих напряжений, соответствующих прогибу w^e, т. е.

$$\sigma^e_{kl} = b_{klmn}\varepsilon^e_{mn} = -zb_{klmn}w^e_{,mn} \tag{1.8}$$

В качестве граничных условий на γ при разгрузке можно принять одно из следующих [1]:

$$\text{а)}\ w^e = \partial w^e/\partial n = 0, \quad \text{б)}\ w^e = G^* = 0 \tag{1.9}$$

$$\text{в)}\ G^* = Q^* + \partial H^*/\partial s = 0, \quad \text{г)}\ \partial w^e/\partial n = Q^* + \partial H^*/\partial s = 0$$

Звездочка относится к величинам после разгрузки. Условия (1.9) а), б) и в) означают соответственно, что при разгрузке контур γ жестко защемлен, свободно оперт и свободен.

Заметим, что из (1.8) и (1.2) следует $q = h^3b_{klmn}w^e_{,klmn}/12$, т. е. интенсивность внешней нагрузки q, действующей на пластину, однозначно определяется функцией $w^e = w^e(x_1, x_2, t)$. Более того, эта функция в случае граничных условий

(1.9) в) (т. е. полного освобождения контура γ после разгрузки) однозначно определяет и внешние силовые воздействия на γ перед разгрузкой, поскольку $G = G^e$ и $Q + \partial H/\partial s = Q^e + \partial H^e/\partial s$, как видно из (1.9) в) и (1.7), а величины G^e, Q^e, H^e выражаются через $M^e_{kl} = -h^3 b_{klmn} w^e_{,mn}/12$. Другими словами, в этом случае задание внешних сил эквивалентно заданию прогиба $w^e = w^e(x_1, x_2, t)$, который в дальнейшем будем называть просто упругим прогибом. Это обстоятельство будем использовать при формулировке ОЗ в нагрузках.

Отметим также, что в силу (1.3) и (1.9) имеет место равенство [1]:

$$\int_v a_{klmn} \sigma^e_{mn} \rho_{kl}\, dv = 0 \tag{1.10}$$

Рассмотрим *ОЗ* формоизменения пластин после мгновенной упругой разгрузки. Эти задачи связаны с поиском внешних воздействий, силовых (т. е. $w^e = w^e(x_1, x_2, t)$) или кинематических (т. е. $w = w(x_1, x_2, t)$), таких, чтобы выполнилось следующее условие A: в момент $t = t_*$ мгновенного снятия сил q, вызывающих эти воздействия, при одном из условий (1.9) а), б), в) или г) остаточный прогиб w^* принимал заданное значение $w^*_*(x_1, x_2)$.

Выделим следующие классы задач, аналогичные рассмотренным в [2] для объемного тела.

Задача 1. Требуется определить функцию $w^e_* = w^e_*(x_1, x_2)$ такую, чтобы при упругом прогибе $w^e(x_1, x_2, t) = f(t)\, w^e_*(x_1, x_2)$ выполнилось условие A. Здесь $f(t)$ — заданная функция, причем (точка обозначает производную по t):

$$f(0) = 0, \quad \dot f(0) > 0, \quad \dot f(t) \geq 0 \quad (0 < t < t_*), \quad f(t_*) = 1 \tag{1.11}$$

Задача 2. Требуется определить функцию $w_* = w_*(x_1, x_2)$ такую, чтобы при прогибе $w(x_1, x_2, t) = f(t)\, w_*(x_1, x_2)$ выполнилось условие A. Здесь $f(t)$ — заданная функция, для которой

$$f(0) = 0, \quad f(t_*) = 1, \quad V^2 = \int_0^{t_*} \dot f^2\, dt < \infty$$

Задача 3. Требуется определить функцию $w^e_0 = w^e_0(x_1, x_2)$ такую, чтобы при упругом прогибе $w^e(x_1, x_2, t) = f(t)\, w^e_0(x_1, x_2)$, где $f(t)$ $(0 \leq t \leq t_0)$ — заданная функция, удовлетворяющая ограничениям (1.11), в которых t_* следует заменить на t_0, и последующей фиксации прогиба w вплоть до момента $t = t_*$ (т. е. $\dot w = 0$ при $t_0 \leq t < t_*$) выполнилось условие A.

Задача 4. Требуется определить упругий прогиб $w^e = w^e(x_1, x_2, t)$ такой, чтобы для текущего остаточного прогиба имело место равенство $w^*(x_1, x_2, t) = f(t)\, w^*_*(x_1, x_2)$, где $f(t)$ — заданная функция, удовлетворяющая (1.11), w^*_* — заданный остаточный прогиб при $t = t_*$.

В задачах *1—4* считается, что при $t < 0$ пластина находилась в естественном недеформированном состоянии. Кроме того, если при разгрузке на γ заданы кинематические условия, т. е. (1.9) а) или первые равенства (1.9) б) или (1.9) г), то при $0 \leq t \leq t_*$ к ним необходимо добавить следующие граничные условия на γ:

$$\text{а) } w = \partial w/\partial n = 0, \quad \text{б) } w = 0, \quad \text{г) } \partial w/\partial n = 0 \tag{1.12}$$

Другими словами, в указанных случаях в течение всего процесса деформирования, в том числе, и при разгрузке в момент $t = t_*$ прогиб w и/или его нормальная производная $\partial w/\partial n$ остаются фиксированными. В таких ситуациях остаточный прогиб w_*^* должен быть согласован с этими условиями, т. е. $w_*^* = 0$ и/или $\partial w_*^*/\partial n = 0$ на γ.

Из (1.3), (1.9) и (1.12) следует, что при любом $0 \le t \le t_*$:

$$\int_v \varepsilon_{kl}^* \rho_{kl}\, dv = 0 \qquad (1.13)$$

Здесь необходимо подчеркнуть, что для величин w^e и ρ_{kl}, входящих в соотношения (1.6)—(1.8), на всем рассматриваемом интервале $[0, t_*]$ используются граничные условия вида (1.9). Это обусловлено соответствующими условиями, указанными в формулировке задач 1—4 и относящимися к моменту $t = t_*$ снятия внешних сил.

Введем норму для поля прогибов $w = w(x_1, x_2)$. Обозначим через σ_{kl}^0 упругие напряжения, соответствующие этим прогибам, т. е. связанные с деформациями $\varepsilon_{kl}^0 = -z w_{,kl}$ законом Гука $\sigma_{kl}^0 = b_{klmn}\varepsilon_{mn}^0 = -z b_{klmn} w_{,mn}$.

Пусть норма равна

$$\|w\|^2 = \int_v \frac{1}{2} a_{klmn}\sigma_{kl}^0\sigma_{mn}^0\, dv = \int_v \frac{1}{2} b_{klmn}\varepsilon_{kl}^0\varepsilon_{mn}^0\, dv =$$

$$= \int_S \frac{h^3}{24} b_{klmn} w_{,kl} w_{,mn}\, dS$$

Как известно [3], величина $\|w\|$ является нормой для указанного поля, если заданы прогибы в трех точках, не лежащих на одной прямой. Будем считать в дальнейшем это условие выполненным, т. е. упомянутые точки пластины всегда закреплены. Тогда норма $\|w\|$ эквивалентна $\|w\|_{H^2(S)}$, и пространство $H^2(S)$ полно относительно введенной нормы [3]. Заметим, что последняя порождается скалярным произведением

$$(w_1, w_2) = \int_v \frac{1}{2}\varepsilon_{kl}^{0(1)}\sigma_{kl}^{0(2)}\, dv = \int_v \frac{1}{2}\varepsilon_{kl}^{0(2)}\sigma_{kl}^{0(1)}\, dv = \int_S \frac{h^3}{24} b_{klmn} w_{,kl}^{(1)} w_{,mn}^{(2)}\, dS$$

В силу (1.3):

$$(w_1, w_2) = \frac{1}{2}\int_S q_1^0 w_2\, dS + \frac{1}{2}\int_\gamma [(Q_1^0 + \partial H_1^0/\partial s)\, w_2 - G_1^0\, \partial w_2/\partial n]\, ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_S q_2^0 w_1\, dS + \frac{1}{2}\int_\gamma [(Q_2^0 + \partial H_2^0/\partial s)\, w_1 - G_2^0\, \partial w_1/\partial n]\, ds$$

где $q_i^0, Q_i^0, H_i^0, G_i^0$ — силовые характеристики внешних воздействий, соответствующих напряжениям $\sigma_{kl}^{0(i)} = -z b_{klmn} w_{,mn}^{(i)}$ $(i = 1, 2)$. С другой стороны, для произвольных величин q_3, Q_3, H_3, G_3 и w_4 будем иметь

$$\frac{1}{2}\int_S q_3 w_4\, dS + \frac{1}{2}\int_\gamma [(Q_3 + \partial H_3/\partial s)\, w_4 - G_3\, \partial w_4/\partial n]\, ds = (w_4, w_3^e)$$

где w_3^e — упругие прогибы, соответствующие указанным силовым воздействиям, отмеченным индексом 3.

С учетом (1.3)—(1.13) и сделанных замечаний относительно нормы $\|w\|$ нетрудно убедиться в том, что для задач 1—4 справедливы оценки и утверждения, аналогичные таковым для объемного тела [2]. В частности, если $w_*^*(x_1, x_2) \in H^2(S)$, то существует единственное решение каждой из указанных ОЗ, непрерывно зависящее от данных задачи, причем в задаче *1*: $w_*^e \in H^2(S)$; в задаче *2*: $w_* \in H^2(S)$; в задаче *3*: $w_0^e \in H^2(S)$; в задаче *4*: $w^e \in H^2(S) \times$

$\times$ $[0, t_*]$. Заметим, что в силу теорем вложения [4] функция $w(x_1, x_2) \in H^2(S)$ является непрерывной в S.

Решением задачи *1* является предел последовательности

$$w_*^{en+1} = w_*^{en} - \varepsilon(w_*^{*n} - w_*^*) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad 0 < \varepsilon < 2\varphi/\psi^2 \tag{1.14}$$

$$\varphi = \lambda(t_*) g(t_*), \quad \psi = \lambda_1^{-1}(t_*)\, [t_* g(t_*)]^{1/2}, \quad g(t) = \int_0^t f^2\, dt$$

где w_*^{e0} — произвольный элемент из $H^2(S)$, удовлетворяющий, если это необходимо, граничным условиям (1.9), т. е. если последние содержат упругий прогиб w^e и/или его нормальную производную $\partial w^e/\partial n$. При этом скорость сходимости последовательных приближений к точному решению определяется неравенством

$$\|w_*^{en} - w_*^e\| \le \delta^n (1-\delta)^{-1} \|w_*^{e1} - w_*^{e0}\|, \quad \delta^2 = 1 - 2\varepsilon\varphi + \varepsilon^2\psi^2 \tag{1.15}$$

Аналогичным образом решение задачи *3* может быть получено как предел последовательности вида (1.14), в которой w_*^{en} следует заменить на w_0^{en}, $\varphi = \lambda(t_*) g(t_0)$, $\psi = \lambda_1^{-1}(t_*)\, t_*$, а w_0^{e0} — произвольный элемент из $H^2(S)$, удовлетворяющий необходимым условиям из (1.9). Скорость сходимости дается неравенством (1.15) при замене индексов звездочка на нуль.

Задача *2* сводится к решению функционального уравнения

$$w_* = F(w_*), \quad F(w_*) = w_*^e(w_*) + w_*^* \tag{1.16}$$

Как показано в [2], при $\beta_* \equiv (2\lambda_*)^{-1/2} V < 1$ оператор F будет сжимающим, поэтому решением уравнения (1.16) является предел последовательности $w_*^{n+1} = F(w_*^n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, где w_*^0 — произвольный элемент из $H^2(S)$, удовлетворяющий, если это необходимо, граничным условиям (1.12). Скорость сходимости к точному решению определяется неравенством (1.15), в котором w_*^e следует заменить на w_*, а δ — на β_*.

Задача *4* сводится к решению уравнения, аналогичного (1.16): $w = F_1(w)$, $F_1(w) = w^e(w) + w^*$.

Как показано в [2], оператор F_1 будет сжимающим в норме

$$\|w\|_1 = \left(\int_0^{t_*} (\dot f/f)\, \|w\|^2\, dt \right)^{1/2}$$

Поэтому решение данной ОЗ может быть получено как предел последовательности $w^{n+1} = F_1(w^n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, где w^0 — произвольный элемент из $H^2(S) \times [0, t_*]$, удовлетворяющий необходимым условиям из (1.12).

2. В качестве примера рассмотрим одномерную задачу *2* о деформировании полосы ширины l, когда $w_*^* = w_*^*(x)$ $(0 \le x \le l)$. В этом случае из (1.1) и (1.4) получим

$$\sigma/E + \varepsilon^N = \varkappa z, \quad \varkappa = -w'' \tag{2.1}$$

где E — модуль Юнга, $\varkappa$ — кривизна, штрих означает дифференцирование по x.

Для скорости неупругой деформации примем зависимость [2]:

$$\dot\varepsilon^N = A(e^{\alpha|\sigma|} - 1)\,\mathrm{sign}\,\sigma, \quad A > 0, \quad \alpha > 0 \tag{2.2}$$

которая, как легко видеть, удовлетворяет условию более сильному, чем первое неравенство (1.5): $\Delta\dot\varepsilon^N \Delta\sigma \ge (\lambda/E)(\Delta\sigma)^2$, $\lambda = \alpha E A > 0$, что, как показано в [2], гарантирует корректность данной задачи при любой функции $f = f(t)$, удовлетворяющей ограничениям (1.11). Будем предполагать, что эти ограничения выполнены.

Введем безразмерные величины

$$\bar{z} = 2z/h, \quad \bar{\varkappa} = E\alpha h\varkappa/2, \quad \bar{x} = x/l, \quad \bar{\sigma} = \alpha\sigma, \quad \bar{t} = \alpha EAt.$$

Тогда

$$M = 2\int_0^{h/2} \sigma z\, dz = \frac{h^2}{4\alpha}\bar{M}, \quad \bar{M} = 2\int_0^1 \bar{\sigma}\bar{z}\, d\bar{z}$$

где $\bar{M}$ — безразмерный изгибающий момент. Далее черту над безразмерными величинами опустим.

Будем считать для определенности, что $\varkappa_* (x) \geq 0$ $(0 \leq x \leq 1)$. Тогда при $0 \leq z \leq 1$ (т. е. при $\sigma \geq 0$) получим из (2.1) и (2.2):

$$\dot{\sigma} + e^{\sigma} - 1 = \dot{x}z \tag{2.3}$$

где точка означает дифференцирование по безразмерному времени.

Поскольку $\varepsilon^N (x, 0) = 0$, т. е. $\sigma (x, 0) = \varkappa (x, 0) z$, из (2.3) найдем

$$\sigma = \varkappa z + t - \ln\left(1 + \int_0^t e^{\varkappa z + t}\, dt\right) \tag{2.4}$$

Уравнение упругой разгрузки в момент $t = t_*$ вытекает из (1.2) и имеет вид

$$M_*^{e\,\prime\prime} = M_*^{\prime\prime} \tag{2.5}$$

Предположим, что при этом выполняются условия вида (1.9) в): $M_*^e = M_*$ и $M_*^{e\,\prime} = M_*^{\prime}$ при $x = 0$; 1, т. е. при разгрузке края пластины свободны. С учетом этого получим из (2.5) $M_*^e (x) = M_* (x)$ $(0 \leq x \leq 1)$. Тогда вследствие (2.4) и равенства $\sigma_*^e = \varkappa_*^e z$ найдем

$$\frac{\varkappa^e}{3} = \frac{\varkappa_*}{3} + \frac{t_*}{2} - \int_0^1 \ln\left(1 + \int_0^{t_*} e^{\varkappa z + t}\, dt\right) z\, dz \tag{2.6}$$

Так как $\varkappa_*^e = \varkappa_* - \varkappa_*^*$, из (2.6) видно, что искомая кривизна $\varkappa_* (x)$ зависит только от заданной остаточной кривизны $\varkappa_*^* (x)$ в той же точке пластины.

Пусть, например, $\varkappa = \varkappa_* t/t_*$, т. е. $f = t/t_*$. Тогда из (2.6) получим

$$\xi = \varphi (\xi) + a, \quad \varphi (\xi) = \frac{3}{t_*}\int_0^1 [\ln (1 + \xi z) - \ln (1 + \xi z e^{-(\xi z + 1)t_*})]\, z\, dz$$

$$\xi = \varkappa_*/t_*, \quad a = \varkappa_*^*/t_* \tag{2.7}$$

Для производной функции $\varphi = \varphi (\xi)$ из (2.7) найдем

$$\varphi' (\xi) = \frac{3}{t_*}\int_0^1 \varphi_1 (\xi, z)\, z^2\, dz, \quad \varphi_1 (\xi, z) = \frac{1}{1 + \xi z} - \frac{t_* + \exp(-(\xi z + 1)\, t_*)}{1 + \xi z \exp(-(\xi z + 1)\, t_*)} + t_*$$

Можно показать, что при $\xi > 0$ имеют место неравенства $0 < \varphi_1 (\xi, z) < t_*$ (последнее вытекает из того, что $\exp(-(\xi z + 1)\, t_*) > 1 - (\xi z + 1)\, t_*$). Следовательно, $0 < \varphi' (\xi) < 1$, что обеспечивает единственное решение $\xi > a$ уравнения (2.7).

Заметим, что в рассмотренном примере заданная и искомая величины a и ξ имеют одинаковые знаки, что неявно использовалось в вышеприведенных рассуждениях. Действительно, ситуация, когда $a < 0$, $\xi > 0$ (или $a > 0$, $\xi < 0$), невозможна, поскольку из (2.7) следовало бы, что $\phi(\xi) = \xi - a > \xi$ в то время как $\phi(\xi) = \phi(0) + \phi'(\xi_1)\xi < \xi$ $(0 < \xi_1 < \xi)$ ввиду того, что $\phi(0) = 0$ и $\phi'(\xi_1) < 1$.

Ниже приведены некоторые числовые значения ξ, являющиеся корнем уравнения (2.7) (для его решения использовалась стандартная процедура «EUREKA»), в зависимости от t_* при $a = 1$;

t_*	0,01	0,1	1	10	100
ξ	137,48	14,36	2,119	1,080	1,0075

и значения ξ в зависимости от a при $t_* = 1$:

a	0,01	0,05	0,1	0,5	5	10	50	100
ξ	0,027	0,134	0,263	1,174	7,593	13,321	55,321	106,276

3. Обобщим рассмотренные выше задачи *1* и *2* на случай неупругой («медленной») разгрузки, когда внешние силы снимаются в интервале времени $[t_0, t_*]$, поэтому в момент $t = t_*$ упругое распружинивание будет отсутствовать. Как и в разд. 1, условие: $w^*(x_1, x_2, t_*) = w_*^*$, где $w_*^* = w_*^*(x_1, x_2)$ — заданная функция, будем обозначать A.

Задача 1а. Требуется определить функцию $w_0^e = w_0^e(x_1, x_2)$ такую, чтобы при упругом прогибе $w^e(x_1, x_2, t) = f(t)\, w_0^e(x_1, x_2)$, где $f(t)$ — заданная функция, причем $f(0) = 0$, $\dot f(0) > 0$, $\dot f(t) \geq 0$ $(0 < t < t_0)$, $f(t_0) = 1$, $\dot f(t) \leq 0$ $(t_0 < t < t_*)$, $f(t_*) = 0$, выполнилось условие A.

Задача 2а. Требуется определить функцию $w_0 = w_0(x_1, x_2)$ такую, чтобы при прогибе $w(x_1, x_2, t) = f_1(t)\, w_0(x_1, x_2)$ $(0 \leq t \leq t_0)$ и последующей разгрузке в течение времени $t_* - t_0$, когда упругий прогиб $w^e(x_1, x_2, t) = f(t)\, w_0^e(x_1, x_2)$ $(t_0 \leq t \leq t_*)$, выполнилось условие A. Здесь $f_1(t)$ и $f(t)$ — заданные функции, причем

$$f_1(0) = 0,\ \ f_1(t_0) = 1,\ \ \int_0^{t_0} \dot f_1^2\, dt < \infty,\ \ f(t_0) = 1,$$

$$\dot f(t) \leq 0 \ \ (t_0 < t < t_*),\ \ f(t_*) = 0$$

В обеих задачах считается, что при $t < 0$ пластина находилась в естественном состоянии.

Предположим, что при $0 \leq t \leq t_*$ граничные условия имеют вид (1.9) и (1.12) при принятых в разд. 1 оговорках. Поэтому равенства (1.10) и (1.13) имеют место и в этом случае.

Очевидно, что при $t_0 = t_*$ эти ОЗ совпадают с задачами *1* и *2* и соответствуют случаю мгновенной разгрузки при $t = t_*$.

Выясним условия, при которых существует единственное обобщенное решение каждой из рассматриваемых задач. Для этого воспользуемся некоторыми вспомогательными предложениями, установленными в [2]. Введем следующие обозначения (Δ — знак приращения):

$$I_1(\sigma_{kl}) = \Big(\int_v \frac{1}{2} a_{klmn}\sigma_{kl}\sigma_{mn}\, dv\Big)^{1/2};\ \ I_2(\varepsilon_{kl}) = \Big(\int_v \frac{1}{2} b_{klmn}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{mn}\, dv\Big)^{1/2}$$

$$I_3(t) = \int_v \int_0^t \Delta\dot\varepsilon_{kl}^N \Delta\sigma_{kl}\, dt\, dv,\ \ I_4(t) = \Big(\int_0^t I_2^2(\Delta\dot\varepsilon_{kl}^N)\, dt\Big)^{1/2},\ \ I_5(t) = \Big(\int_0^t \|\Delta w^e\|^2\, dt\Big)^{1/2}$$

Учитывая равенства (1.10) и (1.13), справедливые и для приращений соответствующих величин, можно показать по аналогии с [2], что для любого момента времени имеют место следующие неравенства:

$$I_3 \le 2I_4 I_5, \quad I_3 \ge 2\lambda I_5^2, \quad I_3 \ge 2\lambda_1 I_4^2 \tag{3.1}$$

откуда следует, что

$$\lambda I_5 \le I_4 \le \lambda_1^{-1} I_5 \tag{3.2}$$

Кроме того, из результатов [2] вытекает также оценка для нормы приращения остаточного прогиба при $t = t_*$:

$$\|\Delta w_*^*\| \le \lambda_{1*}^{-1} t_*^{1/2} I_{5*} \tag{3.3}$$

где индекс звездочка относится к моменту $t = t_*$.

В дальнейшем величины $\lambda > 0$ и $\lambda_1 > 0$ из (1.5) будем считать постоянными при $0 \le t \le t_*$, для чего достаточно положить

$$\lambda = \min_{0 \le t \le t_*} \lambda(t), \quad \lambda_1 = \min_{0 \le t \le t_*} \lambda_1(t)$$

Исследование корректности задач *1а* и *2а* будет базироваться на неравенствах (3.1)—(3.3) и на нижних оценках для величин $(\Delta w_*^*, \Delta w_0^e)$ и $(\Delta w_*^*, \Delta w_0)$ соответственно. Рассмотрим отдельно каждую из задач.

Задача 1а. Вследствие (1.3), (1.6), (1.7), принятых граничных условий и равенств $w^*(x_1, x_2, 0) = 0$ и $w_0^e = w^e/f$ будем иметь

$$2(\Delta w_*^*, \Delta w_0^e) = 2\int_0^{t_*} (\Delta \dot w^*, \Delta w_0^e)\, dt = 2\int_0^{t_0} (\Delta \dot w^*, \Delta w^e)/f\, dt + \tag{3.4}$$

$$+ 2\int_{t_0}^{t_*} (\Delta \dot w^*, \Delta w_0^e)\, dt = I_6 + I_7, \quad I_6 = \int_0^{t_0} \dot I_8/f\, dt$$

$$I_8(t) = I_3(t) + I_1^2(\Delta\rho_{kl}(t)), \quad I_7 = \int_{t_0}^{t_*}\int_v \Delta\dot\varepsilon_{kl}^N \Delta\sigma_{kl0}^e\, dv\, dt$$

Оценим величины I_6 и I_7 из (3.4). Для I_6 после интегрирования по t по частям получим

$$I_6 = I_8(t_0) + \int_0^{t_0} (\dot f/f^2)\, I_8(t)\, dt \tag{3.5}$$

где было учтено, что $f(t_0) = 1$ и $\lim (I_8/f) = \lim (\dot I_8/\dot f) = 0$ при $t \to 0$ ввиду того, что $\dot f(0) > 0$, а $I_8(0) = 0$, так как $\Delta\rho_{kl} = \Delta\sigma_{kl} = 0$ при $t = 0$ всюду в пластине.

Поскольку $\|\Delta w^e\| = f\|\Delta w_0^e\|$ и $\dot f \ge 0$ $(0 < t < t_0)$, из (3.5) и второго неравенства (3.1) следует, что

$$I_6 \ge 2\lambda c_1 \|\Delta w_0^e\|^2, \quad c_1 = \int_0^{t_0} g\dot f/f^2\, dt + g(t_0) = \int_0^{t_0} f\, dt \tag{3.6}$$

В последнем равенстве (3.6) осуществлено интегрирование по частям и учтено, что $\lim (g/f) = \lim (\dot g/\dot f) = 0$ при $t \to 0$, функция $g(t)$ определена в (1.14).

Для I_7 по аналогии с первым неравенством (3.1) и вследствие (3.2) получим

$$|I_7| \le 2\left(\int_{t_0}^{t_*} I_2^2(\Delta\dot\varepsilon_{kl}^N)\, dt\right)^{1/2} \left(\int_{t_0}^{t_*} \|\Delta w_0^e\|^2\, dt\right)^{1/2} = \tag{3.7}$$

$$= 2\,(t_* - t_0)^{1/2} \|\Delta w_0^e\| \,(I_4^2(t_*) - I_4^2(t_0))^{1/2} \le 2\,(t_* - t_0)^{1/2} \|\Delta w_0^e\|^2 \,(\lambda_1^{-2} g(t_*) - \lambda^2 g(t_0))^{1/2}$$

Из соотношений (3.4), (3.6) и (3.7) найдем

$$(\Delta w_*^*, \Delta w_0^e) \ge c_2 \|\Delta w_0^e\|^2 \tag{3.8}$$

$$c_2 = \lambda c_1 - [(t_* - t_0)(\lambda_1^{-2} g(t_*) - \lambda^2 g(t_0))]^{1/2}$$

Теорема 1. Пусть $w_*^*(x_1, x_2) \in H^2(S)$ и функция $f = f(t)$ такова, что константа c_2 из (3.8) положительна. Тогда существует единственное решение $w_0^e(x_1, x_2) \in \in H^2(S)$ задачи *1a*, причем оператор $w_0^e = w_0^e(w_*^*)$ непрерывен.

Доказательство. Из (3.8) будем иметь $c_2 \|\Delta w_0^e\|^2 \le (\Delta w_*^*, \Delta w_0^e) \le \|\Delta w_*^*\| \, \|\Delta w_0^e\|$. Тогда $\|\Delta w_0^e\| \le c_2^{-1} \|\Delta w_*^*\|$, что обеспечивает единственность и непрерывность решения.

Доказательство существования аналогично упомянутому выше для задачи *1*. Действительно, рассмотрим последовательность типа (1.14):

$$w_0^{en+1} = w_0^{en} - \varepsilon\,(w_*^{*n} - w_*^*) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad \varepsilon = \mathrm{const} \tag{3.9}$$

где w_0^{e0} — произвольный элемент из $H^2(S)$, удовлетворяющий, если это необходимо, условиям (1.9) (т. е. в тех случаях, которые оговорены в разд. 1). Из (3.9) с учетом (3.8) и (3.3) нетрудно получить неравенство вида (1.15), в котором индексы звездочка следует заменить на нуль, а $\delta^2 = 1 - 2\varepsilon c_2 + \varepsilon^2 c_3^2$, $c_3^2 = \lambda_1^{-1} t_* g(t_*)$. Отсюда видно, что при $\delta < 1$, т. е. при $0 < \varepsilon < 2c_2/c_3^2$ последовательность (3.9) является фундаментальной, причем максимальная скорость сходимости соответствует значению $\varepsilon = c_2/c_3^2$, когда $\delta^2 = 1 - c_2^2/c_3^2$. Вследствие полноты пространства $H^2(S)$ существует $\lim w_0^{en} = w_0^e \in H^2(S)$ при $n \to \infty$, причем (см. (3.9)) $\lim w_*^{*n} = w_*^*$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Приведем пример функции $f = f(t)$, для которой условие $c_2 > 0$, использовавшееся в теореме 1, будет выполняться. Пусть

$$f(t) = \begin{cases} (t/t_0)^{\alpha_1} & (0 \le t \le t_0, \quad \alpha_1 > 0) \\ [(t_* - t)/(t_* - t_0)]^{\alpha_2} & (t_0 < t \le t_*, \quad \alpha_2 > 0) \end{cases}$$

Тогда для константы c_2 из (3.8) найдем

$$c_2 = \frac{\lambda t_0}{\alpha_1 + 1} - \left[\frac{(\lambda_1^{-2} - \lambda^2)\, t_0}{2\alpha_1 + 1} + \frac{\lambda_1^{-2}(t_* - t_0)}{2\alpha_2 + 1} \right]^{1/2} (t_* - t_0)^{1/2}$$

Обозначим $\lambda^{-2}\lambda_1^{-2} = \gamma_1 > 1$ (это неравенство следует из (3.2)), $\mu = (t_* - t_0)/t_0 > 0$. Тогда условие $c_2 > 0$ будет эквивалентно следующему:

$$\frac{\gamma_1 \mu^2}{2\alpha_2 + 1} + \frac{(\gamma_1 - 1)\,\mu}{2\alpha_1 + 1} - \frac{1}{(\alpha_1 + 1)^2} < 0$$

которое накладывает ограничения на константы α_1, α_2, γ_1 и μ. Так при фиксированных α_1, α_2, γ_1 оно устанавливает нижнюю границу для момента начала разгрузки:

$$t_0 > \frac{t_*}{\mu_1 + 1}, \quad \mu_1 = \frac{2\alpha_2 + 1}{2\gamma_1} \left\{ \left[\frac{(\gamma_1 - 1)^2}{(2\alpha_1 + 1)^2} + \frac{4\gamma_1}{(2\alpha_2 + 1)(\alpha_1 + 1)^2} \right]^{1/2} - \frac{\gamma_1 - 1}{2\alpha_1 + 1} \right\}$$

Задача 2a. Установим оценку, аналогичную (3.8):

$$(\Delta w_*^*, \Delta w_0) \geq c_4 \|\Delta w_0\|^2, \quad c_4 = 1 - \beta_0 - (t_* - t_0)^{1/2}(c_5^2 - \lambda^2 c_6)^{1/2} \tag{3.10}$$

$$c_5^2 = \lambda_1^{-2}\left(c_6 + \beta_0^2 \int_{t_0}^{t_*} f^2\,dt\right), \quad c_6 = \int_0^{t_0} \beta^2\,dt, \quad \beta^2(t) = (2\lambda)^{-1}\int_0^t \dot f_1^2\,dt, \quad \beta_0 = \beta(t_0)$$

Поскольку $w = w^* + w^e$, будем иметь

$$(\Delta w_*^*, \Delta w_0) = (\Delta w_0 - \Delta w_0^e, \Delta w_0) + \int_{t_0}^{t_*} (\Delta \dot w^*, \Delta w_0)\,dt \tag{3.11}$$

Оценим правую часть в (3.11). Как показано в [2], при $0 \leq t \leq t_0$ справедливо неравенство

$$\|\Delta w^e(t)\| \leq \beta(t)\|\Delta w_0\| \tag{3.12}$$

В частности, при $t = t_0$ будем иметь из (3.12), что $\|\Delta w_0^e\| \leq \beta_0 \|\Delta w_0\|$. Отсюда $(\Delta w_0 - \Delta w_0^e, \Delta w_0) \geq \|\Delta w_0\|^2 - \|\Delta w_0^e\|\,\|\Delta w_0\| \geq (1 - \beta_0)\|\Delta w_0\|^2$.

По аналогии с величиной I_7 из (3.4) с учетом (3.12) и равенства $\|\Delta w^e(t)\| = f(t)\,\|\Delta w_0^e\|$ $(t_0 \leq t \leq t_*)$ получим

$$\left|\int_{t_0}^{t_*} (\Delta \dot w^*, \Delta w_0)\,dt\right| \leq \left(\int_{t_0}^{t_*} I_2^2(\Delta \dot\varepsilon_{kl}^N)\,dt\right)^{1/2} \left(\int_{t_0}^{t_*} \|\Delta w_0\|^2\,dt\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \|\Delta w_0\|(t_* - t_0)^{1/2}[\lambda_1^{-2} I_5^2(t_*) - \lambda^2 I_5^2(t_0)]^{1/2} \leq \|\Delta w_0\|^2 (t_* - t_0)^{1/2}(c_5^2 - \lambda^2 c_6)^{1/2}$$

Из полученных неравенств и (3.11) следует (3.10).

Теорема 2. Пусть $w_*^*(x_1, x_2) \in H^2(S)$ и функции $f_1 = f_1(t)$ и $f = f(t)$ таковы, что константа c_4 из (3.10) положительна. Тогда существует единственное решение $w_0(x_1, x_2) \in H^2(S)$ задачи $2a$, причем оператор $w_0 = w_0(w_*^*)$ непрерывен.

Доказательство. Единственность и непрерывность обеспечиваются неравенством, вытекающим из (3.10): $\|\Delta w_0\| \leq c_4^{-1}\|\Delta w_*^*\|$.

Заметим далее, что из (3.3) и (3.12) нетрудно получить

$$\|\Delta w_*^*\| \leq c_5 t_*^{1/2}\|\Delta w_0\| \tag{3.13}$$

Для доказательства существования рассмотрим последовательность

$$w_0^{n+1} = w_0^n - \varepsilon(w_*^{*n} - w_*^*) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad \varepsilon = \text{const} \tag{3.14}$$

где w_0^0 — произвольный элемент из $H^2(S)$, удовлетворяющий, если это необходимо, граничным условиям (1.12). Отсюда с учетом (3.10) и (3.13) для величин w_0^n получим неравенство вида (1.15), в котором $\delta^2 = 1 - 2\varepsilon c_4 + e^2 c_5^2 t_*$. Поэтому при $0 < \varepsilon < 2c_4/(c_5^2 t_*)$ последовательность (3.14) будет фундаментальной и в силу полноты пространства $H^2(S)$ будет сходиться к элементу $w_0 \in H^2(S)$, причем $\lim w_*^{*n} = w_*^*$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Приведем пример функций $f_1 = f_1(t)$ и $f = f(t)$, для которых будет выполняться условие $c_4 > 0$. Пусть

$$f_1(t) = (t/t_0)^{\alpha_3} \quad (0 \leq t \leq t_0, \quad \alpha_3 > 1/2)$$

$$f(t) = [(t_* - t)/(t_* - t_0)]^{\alpha_4} \quad (t_0 < t \leq t_*, \quad \alpha_4 > 0)$$

Тогда для c_4 из (3.10) найдем $c_4 = 1 - (1 + \nu\omega)/(c_7\sqrt{\nu})$, где $\nu = \lambda t_0$,

$\omega = (c_8\mu + c_9\mu^2)^{1/2}$, $c_7 = [2(2\alpha_3 - 1)]^{1/2}/\alpha_3$, $c_8 = \frac{1}{2}\alpha_3^{-1}(\gamma_1 - 1)$, $c_9 = \gamma_1/(2\alpha_4 + 1)$, а константы μ и γ_1 определены выше. Рассматривая условие $c_4 > 0$ как неравенство относительно $\sqrt{\nu}$, найдем его решение: $\nu_1 < \nu < \nu_2$, где $\sqrt{\nu_{1,2}} = (c_7 \pm \sqrt{c_7^2 - 4\omega})/(2\omega)$, которое при фиксированных α_3, α_4, μ и γ_1 устанавливает допустимые границы изменения величины t_0. Это решение существует, если $c_7^2 - 4\omega > 0$, т. е. при $\mu < \mu_2 = [-2c_8 + (4c_8^2 + c_7^4 c_9)^{1/2}]/(4c_9)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 94-01-00896).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цвелодуб И. Ю.* Некоторые обратные задачи изгиба пластин при ползучести//Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 5. С. 126—134.
2. *Цвелодуб И. Ю.* Обратные задачи неупругого деформирования//Изв. АН. МТТ. 1995. № 2. С. 81—92.
3. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
4. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. 255 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
13.VII.1994