МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1996

УДК 539.3

© 1996 г. Р. И. МОГИЛЕВСКИЙ, Л. В. НИКИТИН

ДИНАМИЧЕСКИЙ ИЗГИБ БАЛКИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

При взаимодействии балочных конструкций с окружающей средой или элементами других конструкций, на поверхности балки возникают силы сухого трения, которые могут оказать существенное влияние как на характер движения конструкции так и на напряженное состояние в ней. Примерами таких конструкций могут служить железнодорожные рельсы, колонны бурильных труб, подземные трубопроводы, армированные волокнами композиты и др.

Динамика упругих стержней с внешним сухим трением при продольных воздействиях изучена достаточно подробно, с чем можно познакомиться по обзорной работе [1]. Более поздние исследования представлены в [2]. Изгиб балки против сил сухого трения в квазистатической постановке рассмотрен лишь недавно [3]. Настоящая работа посвящена исследованию динамического поведения балки при действии на ее поверхности сил внешнего сухого трения.

Рассмотрим бесконечную балку прямоугольного поперечного сечения, боковая поверхность которой взаимодействует с окружающей средой по закону сухого трения. Сила трения, действующая на единицу поверхности балки, принимается равной τ. Балка нагружается нормальной сосредоточенной силой P, причем исследуются два варианта нагружения:

а) внезапно приложенной нагрузкой $P(t) = P_0 H(t)$;

б) плавно нарастающей нагрузкой $P(t) = Q_0 t H(t)$.

Здесь $H(t)$ — единичная функция Хевисайда, P_0 и Q_0 — константы.

В рамках модели балки Тимошенко уравнения движения имеют вид

$$\rho S\partial^2 u/\partial t^2 - \alpha GS\partial^2 u/\partial x^2 + \alpha GS\partial\varphi/\partial x - F = 0 \tag{1}$$

$$\rho J\partial^2\varphi/\partial t^2 - EJ\partial^2\varphi/\partial x^2 + \alpha GS(\varphi - \partial u/\partial x) - M = 0$$

где $u(x, t)$ и $\varphi(x, t)$ — прогиб и угол поворота сечений балки, E и G — модули упругости при растяжении и сдвиге, S — площадь поперечного сечения балки, α — коэффициент формы прямоугольного сечения, $F(x, t)$ и $M(x, t)$ — величины главного вектора и главного момента сил трения, действующих на единицу длины балки.

В начальный момент балка находится в покое и не нагружена

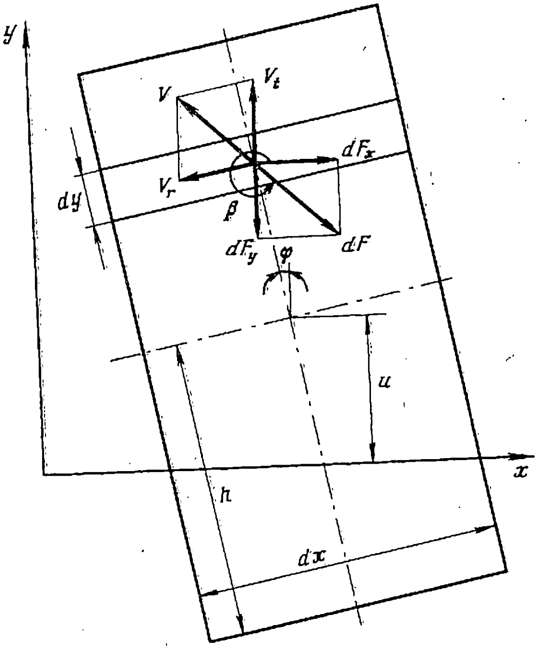
$$t = 0:\ \ u = 0,\ \ \partial u/\partial t = 0,\ \ F = M = 0 \tag{2}$$

Граничные условия имеют вид

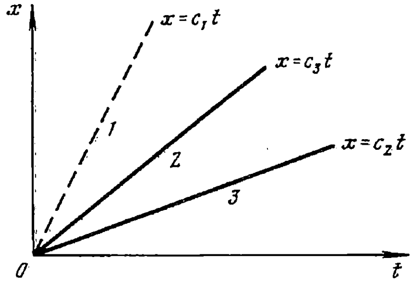
$$\varphi = 0,\ \ x = 0:\ \ \partial u/\partial x = -\tfrac{1}{2}P(\alpha GS)^{-1} \tag{3}$$

где P задается зависимостью (а) или (б). В силу симметрии задачи достаточно определить решение при $x \geq 0$.

Для нахождения F и M разобьем элемент Ω боковой поверхности балки с размерами $2h$ и dx, где $2h$ — высота сечения, на элементарные площадки dx и dy (фиг. 1). Скорость движения каждой такой площадки складывается из скорости V_t поступательного движения вместе с центром элемента Ω и скорости V_r вращения вокруг этого центра. При этом



Фиг. 1



Фиг. 2

$$V_{tx} = 0, \ V_{ty} = \partial u/\partial t, \ V_{rx} = -y\partial\varphi/\partial t\cos\varphi, \ V_{ry} = -y\partial\varphi/\partial t\sin\varphi \qquad (4)$$

Так как угол поворота φ мал, то можно считать, что $V_t \perp V_r$, так что значение полной скорости $V = (V_t^2 + V_r^2)^{1/2}$.

На элемент $dx \times dy$ действует сила трения $dF = qd\Omega = qdxdy$. Она направлена противоположно скорости V, образуя с осью x угол β такой, что $\cos\beta = -(V_{tx} + V_{rx})/V$, $\sin\beta = -(V_{ty} + V_{ry})/V$. Тогда для F и M получаем

$$F = F_y = \frac{2}{dx}\int_\Omega qd\Omega\sin\beta = -2qw\ln\frac{(h^2+w^2)^{1/2}+h}{(h^2+w^2)^{1/2}-h}$$

$$F_x = \frac{2}{dx}\int_\Omega qd\Omega\cos\beta = 0, \quad w = \frac{\partial u}{\partial t}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{-1} \qquad (5)$$

$$M = -\frac{2}{dx}\int_\Omega yqd\Omega\cos\beta = -2q\left(h(h^2+w^2)^{1/2} - \tfrac{1}{2}w^2\ln\frac{(h^2+w^2)^{1/2}+h}{(h^2+w^2)^{1/2}-h}\right)\operatorname{sign}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

Как следует из (5), главные вектор и момент сил трения являются нелинейными функциями от неизвестных $u(x, t)$ и $\varphi(x, t)$. Если однако рассмотреть движение балки при малых t, то выражения для F и M можно существенно упростить.

Решение аналогичной задачи без учета трения показывает, что по балке распространяются два волновых фронта $x = c_1t$ и $x = c_2t$ (фиг. 2), скорости которых $c_1 = (E/\rho)^{1/2}$ и $c_2 = (G\alpha/\rho)^{1/2}$ $(c_1 > c_2)$ соответственно. При $x > c_1t$ сечения балки неподвижны. При малых t в области $c_2t < x \le c_1t$ между фронтами преобладает вращательное движение сечений $(|w| \ll h)$, причем $\partial\varphi/\partial t < 0$, а при $x \le c_2t$ — поступательное $(|w| \gg h)$. Передний фронт, движущийся со скоростью c_1, является линией слабого разрыва.

В работе [1] показано, что скорость продольной волны, несущей слабый разрыв, изменяется под действием сил трения. Естественно ожидать поэтому, что в данной задаче трение также изменяет скорость переднего фронта, которая в этом случае будет зависеть от характера нагружения. Новое неизвестное значение скорости переднего фронта при $t \to 0$ обозначим через c_3. Волновая картина для данной задачи представлена на фиг. 2.

Определим значение F и M в каждой из областей 1—3 (фиг. 2). В области 1 балка невозмущена, трение отсутствует, $F=0$, $M=0$. С учетом решения задачи о балке без трения в области 2, где $w/h \to 0$, из (5) получаем $F=0$, $M=2qh^2$, а в области 3, где $h/w \to 0$, имеем $F=-4qh$, $M=0$.

Следовательно, уравнения (1) при малых t принимают вид

$$\rho S\partial^2 u/\partial t^2 - \alpha GS\partial^2 u/\partial x^2 + \alpha GS\partial\varphi/\partial x + 4qhH(t - x/c_2) = 0 \quad (6)$$

$$\rho J\partial^2\varphi/\partial t^2 - EJ\partial^2\varphi/\partial x^2 + \alpha GS(\varphi - \partial u/\partial x) -$$

$$- 2qh^2H(t - x/c_3) + 2qh^2H(t - x/c_2) = 0$$

Вводя безразмерные величины $z=x/i$, $u_1=u/i$, $\tau=c_1t/i$, где $i=(J/S)^{1/2}$, и применяя преобразование Лапласа к системе (6), получим

$$d\varphi/dz + p^2k^{-2}\overline{u} - d^2\overline{u}/dz^2 + Bp^{-1}\exp(-pz/k) = 0 \quad (7)$$

$$d^2\overline{\varphi}/dz^2 + k^2d\overline{u}/dz - (k^2+p^2)\overline{\varphi} + p^{-1}A(\exp(-pz/c) - \exp(-pz/k))$$

Здесь p — параметр преобразования Лапласа, $k=c_2/c_1$, $c=c_3/c_1$, $A=2qh^2/(ES)$, $B=4qhi/(\alpha GS)$, $\overline{u}$ и $\overline{\varphi}$ — изображения функций u_1 и φ.

Общее решение системы (8) имеет вид

$$\overline{\varphi} = f_{12}(z) + g_1(z), \quad \overline{u} = f_{34}(z) + g_2(z) \quad (8)$$

$$f_{ij}(z) = b_i\exp(-pz/k) + b_i\exp(-pz/e), \quad g_i(z) = \sum_{n=1}^{4} a_{in}\exp(k_nz)$$

$$b_1 = Bk/p^{-2}, \quad b_2 = -c^2(c^2-k^2)Ap^{-1}((1-c^{-2})(c^2-k^2)p^2 - k^2c^4)^{-1}$$

$$b_3 = ((1-k^2)p^2 - k^4)B - kpA)k^{-2}p^{-3}$$

$$b_4 = c^3k^2Ap^{-2}((1-c^2)(c^2-k^2)p^2 - k^2c^4)^{-1}$$

$$k_1 = -k_3 = -2^{-1/2}k^{-1}p(1 + k^2 + ((1-k^2)^2 - 4k^4/p^2)^{1/2})^{1/2}$$

$$k_2 = -k_4 = -2^{-1/2}k^{-1}p(1 + k^2 - ((1-k^2)^2 - 4k^4/p^2)^{1/2})^{1/2}$$

Коэффициенты a_{1i} и a_{2i} $(i=1, 2, 3, 4)$ связаны зависимостью

$$a_{1i} = a_{2i}(k_i - p^2k^{-2}k_i^{-1}) \quad (9)$$

В решении (8) следует положить $a_{i3}=a_{i4}=0$, $i=1, 2$, чтобы исключить волны, приходящие из бесконечности. Кроме того $a_{12}=a_{22}=0$, так как члены, содержащие эти коэффициенты, описывают волну, скорость которой равна 1 (или c_1 — в размерных величинах) и которая, как указывалось выше, гасится силами трения. Коэффициенты a_{11} и a_{21} находятся при помощи граничных условий (3).

При внезапном приложении силы $P=P_0H(t)$ имеем

$$a_{11} = -b_1 - b_2, \quad a_{21} = [-\tfrac{1}{2}P_0(\alpha GSp)^{-1} + pk^{-1}b_3 + pc^{-1}b_4]k_1^{-1} \quad (10)$$

Используя зависимость (9) и учитывая малость t $(1/p \to 0)$, находим неизвестную скорость c:

$$c = (D + k^2)^{1/2}(D+1)^{-1/2}, \quad D = \tfrac{1}{4}P_0k^2q^{-1}h^{-2} \quad (11)$$

Можно показать, что $k < c < 1$. Обращая решение задачи в изображениях с учетом (8)—(11), получаем с точностью до $O(\tau^3)$ выражения для прогиба и угла поворота сечений балки:

$$\varphi = \tfrac{1}{2}Ac^2 (1 - c^2)^{-1} (-(\tau - z/c)^2 H(\tau - z/c) + (\tau - z/k)^2 H(\tau - z/k))$$

$$u_1 = \tfrac{1}{2}k (P_0 (\alpha GS)^{-1} - Bz)(\tau - z/k) H(\tau - z/k)$$

Для случая постепенного приложения нагрузки $P = Q_0 t H(t)$, производя аналогичные выкладки с той же точностью, находим

$$c = \tfrac{1}{2} [(4k^2\gamma^2 + 1)^{1/2} - 1] \gamma^{-1}, \quad \gamma = \tfrac{1}{2}Q_0 (\alpha GSk^2)^{-1} \tag{12}$$

$$\varphi = 0, \quad u_1 = \tfrac{1}{2}k^2c^2B (k^2 - c^2)^{-1} (\tau - z/c)^2 H(\tau - z/c)$$

Из (12) следует, что в данном случае $c < k$, так что область 2 совсем вырождается, а область 3 уменьшается в размерах.

Анализ полученных результатов показывает, что возмущения в балке распространяются тем медленнее, чем больше трение и чем более плавно прикладывается нагрузка. Таким образом действие сухого трения на боковой поверхности балки существенно меняет характер волнового процесса, создавая зависимость скоростей распространения волн от величины внешней нагрузки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никитин Л. В.* Динамика упругих стержней с внешним сухим трением//Успехи механики. 1988. Т. 11. Вып. 4. С. 53—106.
2. *Mogilevsky R. I., Ormonbekov T. O., Nikitin L. V.* Dynamics of rods with interfacial dry friction//J. Mech. Behav. Mater. V. 5. No. 1. 1993. P. 85—93.
3. *Никитин Л. В.* Изгиб балки на шероховатой поверхности//Докл. РАН. 1992. Т. 322. № 6. С. 1057—1061.

Бишкек, Москва

Поступила в редакцию
7. VI.1994