

УДК 534.112

© 1996 г. Л. Д. АКУЛЕНКО, С. В. НЕСТЕРОВ

ВЫНУЖДЕННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

В одномодовом приближении рассматриваются пространственные вынужденные колебания струны под действием распределенной гармонической во времени силы. Теоретическое исследование проводится в квазилинейной трактовке методами малого параметра — методами регулярных возмущений Ляпунова — Пуанкаре и усреднения Крылова — Боголюбова. Изучены условия существования стационарных плоских и эллиптически поляризованных (пространственных) колебаний струны. Построены амплитудно-частотные характеристики и проведен их качественный анализ. Изложены результаты эксперимента, подтверждающего их соответствие теоретическим выводам о характере пространственных и плоских колебаний.

1. Постановка задачи. В квазилинейной одномодовой трактовке исследуются пространственные колебания струны, защемленной на обоих концах, с учетом ее растяжимости. Аналитическое и экспериментальное изучение свободных колебаний позволили выявить ряд качественных эффектов [1]. Отметим особо явление неустойчивости плоских колебаний по отношению к пространственным начальным возмущениям. Эти возмущения могут характеризоваться величиной «интеграла площадей». Их наличие приводит к сложной картине эволюции колебаний, которая представляет взаимодействие трех масштабов движений. А именно, в инерциальном пространстве происходят «быстрые» движения точек струны по сильно вытянутому эллипсу (как в случае линейного осциллятора). Под действием слабой нелинейной связи оси эллипса вращаются с малой постоянной угловой скоростью, определяемой малым параметром и «интегралом площадей». Величины максимальной (порядка единицы) и минимальной (порядка величины «интеграла площадей») полуосей эллипса сохраняются. В зависимости от точности и качества воспроизведения начальных условий, картина колебаний точек струны может представлять как колебания, близкие к плоскополяризованным в практически неподвижной плоскости, так и движения, близкие к круговой поляризации (равномерное движение по окружности), см. [1].

Экспериментальное исследование свободных колебаний струны (и других систем) на относительно большом интервале времени существенно затрудняется воздействием возмущающих факторов различной физической природы. Отметим влияние диссипации, обусловленной наличием внешней среды, внутренним рассеянием энергии в материале, потерями в местах («точках») крепления и др. Далее, существенное влияние может оказывать анизотропия свойств системы в плоскости, ортогональной струне. Крайне затруднительным представляется воспроизведение одинаковых начальных условий.

В такой ситуации оказывается более предпочтительным применить «резонансные методы» для изучения нелинейных колебаний струны. Этот подход связан с изучением вынужденных колебаний в окрестности резонансов, менее подверженных влиянию возмущающих факторов. Таким образом, представляется полезным и важным дополнить исследование свободных квазилинейных колебаний струны соответствующими постановками задач о вынужденных колебаниях и аналитическим и экспериментальным их изучением.

Отметим, что стационарные квазилинейные колебания струны под действием

гармонической вынуждающей силы изучались в [2, 3]. Методом гармонического баланса были получены амплитудно-частотные характеристики применительно к данным эксперимента.

Итак, рассмотрим в одномодовом приближении вынужденные колебания струны под действием распределенной периодической во времени силы, имеющей только вертикальную (условно) составляющую, т. е. вдоль оси Y , см. [1]. В классическом случае линейных колебаний движений точек струны $u(t, x)$ с течением времени будет происходить в плоскости XY . Определим движение с учетом нелинейной связи между колебаниями $u(t, x)$ и $v(t, x)$ соответственно в вертикальной XY и горизонтальной XZ плоскостях. Таким образом, далее рассматриваются пространственные вынужденные колебания струны с учетом нелинейности, обусловленной ее растяжением [1—3].

Пусть a_n, b_n ($n = 1, 2, \dots$), где n — фиксировано и невелико — коэффициенты Фурье (координаты) соответствующей n -ой моды колебаний. Тогда в одномодовом приближении имеем представления для $u(t, x)$, $v(t, x)$ [1—3]:

$$u = u_n(t, x) = a_n(t) \sin(\pi n l^{-1} x), \quad v = v_n(t, x) = b_n(t) \sin(\pi n l^{-1} x)$$

где l — длина струны. Учитывая работу распределенной внешней силы $F = F(t, x)$ на виртуальных перемещениях, в предположении, что имеет место аппроксимация $F(t, x) = F_n \cos \Omega t \sin(\pi n l^{-1} x)$, получим уравнения движения для координат a_n, b_n :

$$\ddot{a}_n + \omega_n^2 a_n + \gamma_n (a_n^2 + b_n^2) a_n = f_n \cos \Omega t \quad (1.1)$$

$$\ddot{b}_n + \omega_n^2 b_n + \gamma_n (a_n^2 + b_n^2) b_n = 0$$

$$\omega_n^2 = (\pi n / l)^2 T \rho^{-1}, \quad \gamma_n = (3/8) (\pi n / l)^4 N \rho^{-1}, \quad f_n = F_n \rho^{-1}$$

Здесь ρ — линейная плотность материала струны, T — натяжение, $N = ES - T$ — эффективная жесткость на растяжение (E — модуль Юнга, S — площадь поперечного сечения), Ω, f_n — постоянные частота и амплитуда внешней силы соответственно. Для реальных материалов (например, для стальной струны) обычно $ES \gg T$ и $N > 0$, см. п. 3. Квазилинейная трактовка системы при больших N/T получается выбором масштабов \dot{a}_n, \dot{b}_n и величин f_n , см. [1].

Начальные условия для переменных a_n, b_n и их производных \dot{a}_n, \dot{b}_n определяются на основе известных начальных распределений смещений $u(t, x)$, $v(t, x)$ и скоростей $\dot{u}(t, x)$, $\dot{v}(t, x)$. Эти распределения по x должны быть близкими функции $\sin(\pi n l^{-1} x)$. Заметим, что начальные значения существенны при анализе свободных колебаний ($f_n = 0$, см. [1]). Для системы (1.1) будут изучаться режимы вынужденных колебаний — стационарных [4] или близких к стационарным [5]; начальные значения переменных определяются в процессе решения задачи или находятся вблизи этих значений.

В теоретическом и прикладном аспектах существенный интерес представляет случай квазилинейных (малых) колебаний в окрестности главного резонанса $\omega_n \simeq \Omega$. Поэтому целесообразно в системе (1.1) ввести безразмерные переменные и параметры следующим образом:

$$t' = \omega_n t, \quad a = a_n d^{-1}, \quad b = b_n d^{-1}, \quad \mu = \Omega \omega_n^{-1} \quad (1.2)$$

$$\beta = \gamma_n d^2 \omega_n^{-2}, \quad \varepsilon = f_n (d \omega_n^2)^{-1} \quad (\mu, \beta \sim 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1)$$

где d — масштаб отклонений точек струны. Далее штрих опускается; поскольку число n фиксировано, то этот индекс также целесообразно опустить для сокращения записи. Малый параметр ε согласно (1.2) характеризует относительную величину внешней и упругой сил. Параметр $\mu \simeq 1$ задает относительную частотную расстройку в окрестности резонанса соответствующей линейной системы.

В результате преобразований (1.2) система (1.1) приводится к виду

$$\ddot{a} + a + \beta (a^2 + b^2) a = \varepsilon \cos \mu t \quad (1.3)$$

$$\ddot{b} + b + \beta (a^2 + b^2) b = 0$$

которая описывает вынужденные колебания нелинейного плоского осциллятора. Нетрудно заметить, что $b(t) \equiv 0$, если $b(0) = \dot{b}(0) = 0$, т. е. возможны колебания в вертикальной плоскости XU : Установлено [1], что свободные ($\varepsilon = 0$) плоские колебания неустойчивы. Для системы (1.3) представляет интерес изучение малых вынужденных колебаний, исчезающих при $\varepsilon \rightarrow 0$. Ее можно рассматривать как систему, близкую к системе Ляпунова [2], к которой применимы методы малого параметра Ляпунова — Пуанкаре [4] и Крылова — Боголюбова [5]. Уравнения (1.3) приведем к виду квазилинейной системы с малым параметром δ :

$$\ddot{y} + y = \delta \cos \mu t - \delta \beta (y^2 + z^2) y, \quad 0 < \delta = \varepsilon^{2/3} \ll 1$$

$$\ddot{z} + z = -\delta \beta (y^2 + z^2) z \quad (a = \varepsilon^{1/3} y, \quad b = \varepsilon^{1/3} z) \quad (1.4)$$

Стационарные колебания решения системы (1.4) могут быть построены методами регулярных возмущений как близи основного или субгармонических резонансов ($\mu = n + O(\delta)$, $n = 1, 2, \dots$), так и вне их ($\mu \neq n$). Представляет интерес исследование устойчивости, а также переходных процессов вблизи указанных стационарных колебаний. Для этой цели применим метод усреднения [5] и приведем систему (1.4) к стандартному виду посредством перехода к оскулирующим переменным «амплитуда — фаза».

2. Приближенный анализ вынужденных колебаний струны вблизи основного резонанса. Для определенности будем изучать стационарные колебания струны для $n = 1$, т. е. $\mu = 1 + \delta \lambda$. От переменных y, \dot{y}, z, \dot{z} перейдем к оскулирующим (медленным) переменным A, θ, B, ψ по формулам

$$y = A \cos(\mu t + \theta), \quad \dot{y} = -\mu A \sin(\mu t + \theta) \quad (2.1)$$

$$z = B \cos(\mu t + \psi), \quad \dot{z} = -\mu B \sin(\mu t + \psi)$$

Здесь A, B — амплитуды, θ, ψ — фазовые расстройки парциальных колебаний; они постоянны при $\delta = 0$ в (1.4). Дифференцируя формулы замены (2.1) по t в силу возмущенной системы (1.4), получим стандартную по Боголюбову систему вида $\dot{x} = \delta X(\mu t, x)$, усредняя которую по явно входящему аргументу t , получим в «медленном времени» $\tau = \delta t$ уравнения для амплитуд A, B и фазовых расстроек θ, ψ :

$$A' = -1/2 \sin \theta - (\beta/8) AB^2 \sin 2(\psi - \theta) \quad (2.2)$$

$$\theta' = -\lambda - 1/2 A^{-1} \cos \theta + (3/8) \beta A^2 + (1/4) \beta B^2 [1 + 1/2 \cos 2(\psi - \theta)]$$

$$B' = (\beta/8) A^2 B \sin 2(\psi - \theta)$$

$$\psi' = -\lambda + (1/4) \beta A^2 [1 + 1/2 \cos 2(\psi - \theta)] + (3/8) \beta B^2$$

Для усредненных переменных сохраним прежние обозначения; они δ -близки к исходным для $t \sim \delta^{-1}$ [5].

Точкой сбоку в (2.2) и далее обозначено дифференцирование по «медленному аргументу времени» τ , $\tau = \delta t$; числовой параметр λ характеризует относительную частотную расстройку: $\lambda = (\mu - 1) \delta^{-1}$, $|\lambda| < \infty$.

Далее интегрированию и анализу подлежит усредненная система (2.2). Ее решение $A(\tau), \theta(\tau), B(\tau), \psi(\tau)$ определяет согласно (2.1) функции $y(t), \dot{y}(t), z(t), \dot{z}(t)$. Эти функции с погрешностью $O(\delta)$ аппроксимируют решение исходной системы (1.4) на асимптотически большом интервале времени $t \sim \delta^{-1}$. Исследуем различные стационарные режимы колебаний на основе анализа системы (2.2).

2.1. Вынужденные колебания в вертикальной плоскости. Формально полагая

величину $B \equiv 0$ в (2.2), получим усредненные уравнения колебаний осциллятора Дуффинга с жесткой характеристикой ($\beta > 0$) [6]:

$$A' = -1/2 \sin \theta, \quad \theta' = -\lambda - 1/2 A^{-1} \cos \theta + (3/8) \beta A^2, \quad A > 0 \quad (2.3)$$

Они детально изучены, см. [4—8] и др. Систему (2.3) можно получить строго из уравнений (1.4), полагая $z \equiv 0$. Заметим, что она имеет элементарный интеграл $(3/16) \beta A^4 - \lambda A^2 - A \cos \theta = \text{const}$, и ее решение $A(\tau)$, $\theta(\tau)$ находится в эллиптических функциях [7]. Амплитуда A оказывается периодической функцией τ . Кроме того, уравнения (2.3) приводятся к гамильтоновой форме следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A \cos \theta, \quad \dot{\eta} = A \sin \theta, \quad \dot{\xi} = \partial H / \partial \eta, \quad \dot{\eta} = -\partial H / \partial \xi \\ H &= -1/2 \xi^2 + 1/2 \lambda (\xi^2 + \eta^2) - (3/32) \beta (\xi^2 + \eta^2)^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Существенный интерес представляет изучение стационарных точек системы (2.3) и зависимость амплитуды стационарных колебаний от параметров λ , β . На представленных далее графиках эти зависимости приведены для сравнения с характеристиками двумерных колебаний струны. Опишем их весьма кратко.

Стационарные решения θ , A определяются соотношениями

$$\theta = 0, \pi; \quad \lambda = \mp 1/2 A^{-1} + (3/8) \beta A^2, \quad A = A(\lambda, \beta) > 0 \quad (2.5)$$

Обычно в семействе кривых $A(\lambda, \beta)$ величина частотной расстройки λ считается аргументом, а $\beta > 0$ — параметром семейства. Для фиксированного значения $\beta > 0$ имеем две кривые $A_0^\pm(\lambda, \beta)$. Кривая A_0^- , отвечающая фазе $\theta = 0$, монотонно возрастает от нуля ($A_0^- \sim (-2\lambda)^{-1}$ при $\lambda \rightarrow -\infty$) до бесконечности (как $A_0^- \sim (8/3)^{1/2} (\lambda/\beta)^{1/2}$ при $\lambda \rightarrow +\infty$), причем $A_0^-(0, \beta) = (4/3\beta)^{1/3}$. Кривая A_0^+ (фаза $\theta = \pi$) определена для значений $\lambda \geq \lambda_0 = (3\beta/2)^{1/3} (3/4)$. Функция $A_0^+(\lambda, \beta)$ двузначна при $\lambda > \lambda_0$, причем одна из ее ветвей $A_{01,2}^+$ стремится к нулю: $A_{01}^+ \sim (1/2) \lambda^{-1}$, а вторая — к бесконечности: $A_{02}^+ \sim A_0^-$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. Таким образом, кривая $A_0^+(\lambda, \beta)$ имеет точку возврата $\lambda = \lambda_0$, в которой $A_0^+ = A_{0*}^+ = (2/3\beta)^{1/3}$, а производная $\partial A_0^+ / \partial \lambda$ стремится к бесконечности при $\lambda \rightarrow \lambda_0 + 0$. Геометрически более удобно рассматривать обратную функцию $\lambda^\mp(A, \beta)$ согласно (2.5). Таким образом, при $\theta = 0$ имеется одно стационарное значение амплитуды $A_0^-(\lambda, \beta)$ для фиксированных λ, β , а при $\theta = \pi$ — таких значений $A_{01,2}^+$ два для $\lambda > \lambda_0$; значению $\lambda = \lambda_0$ отвечает двукратный корень. Исследование устойчивости по Ляпунову [2] стационарных решений, когда B, ψ не возмущаются, приводит к характеристическому уравнению для показателей $p = p_{1,2}$ вида

$$Q_A(p^2) = p^2 \pm 1/2 (\pm 1/2 A_0^{-2} + (3/4) \beta A_0) = 0$$

Знак плюс отвечает $\theta = 0$ и приводит к мнимым показателям, т. е. к устойчивости по первому приближению. Колебаниям в противофазе ($\theta = \pi$) соответствует знак минус. Нижняя ветвь $A_{01}^+ < A_{0*}^+$ приводит также к чисто мнимым характеристическим показателям, а верхняя — к вещественным, один из которых положителен, а другой отрицателен, т. е. колебания с большей амплитудой A_{02}^+ неустойчивы по Ляпунову. Критическому значению $A_0 = A_{0*}^+$ отвечает двукратный нулевой корень и одна клетка Жордана. Этот результат получается строго на основе применения метода Ляпунова — Пуанкаре [4]. Смысл приведенных уравнений (2.3) состоит в возможности аналитического или численного исследования переходных процессов. Учет возмущений B, ψ (т. е. z, \dot{z}) приводит для рассматриваемого режима к характеристическому уравнению вида $Q_A(p^2) Q_B(p^2) = 0$, в котором выражение Q_B аналогично Q_A . Проблему исследования устойчивости следует рассмотреть отдельно.

2.2. *Пространственные колебания струны.* Определим стационарные точки системы (2.2), отвечающие ситуации $A, B > 0$. Значения фазовых расстрой θ, ψ находятся из соотношений $\theta = 0, \pi; 2(\psi - \theta) = 0, \pi \pmod{2\pi}$. Рассмотрим случай «эллиптической поляризации» колебаний, отвечающий значениям $\theta = 0, \pi; \psi = \pm\pi/2$; для неизвестных A, B получим систему уравнений

$$\lambda = \mp (2A)^{-1} + (3/8) \beta A^2 + (1/8) \beta B^2 \quad (2.6)$$

$$\lambda = (1/8) \beta A^2 + (3/8) \beta B^2, \quad \beta > 0, \quad |\lambda| < \infty$$

Знаки (\mp) в (2.6) определяются значениями $\theta = 0, \pi$ соответственно и не зависят от знака $\psi = \pm\pi/2$. Уравнения (2.6) могут быть приведены к виду, более удобному для исследования. Поскольку решение кубического уравнения для неизвестной A , получающегося из (2.6) и аналогичного (2.5), весьма громоздко и не имеет наглядности, более целесообразно разрешить систему (2.6) относительно λ, B , т. е. представить ее в следующем эквивалентном виде:

$$\lambda = \mp (3/4) A^{-1} + 1/2 \beta A^2, \quad B = [\mp (2/\beta) A^{-1} + A^2]^{1/2} \quad (2.7)$$

Из выражения (2.7) для λ следует, что аналогично случаю только вертикальных колебаний ($B = 0$; см. (2.5)), получается монотонная зависимость $A^-(\lambda, \beta)$ от λ при фиксированных значениях β . Кривая A^- изменяется от нуля ($A^- \sim -3/(4\lambda), \lambda \rightarrow -\infty$) до бесконечности ($A^- \sim (2\lambda/\beta)^{1/2}, \lambda \rightarrow +\infty$), причем $A^-(0, \beta) = (3/2\beta)^{1/3}$. Стационарные колебания в ортогональной плоскости ($B^2 > 0$) возможны лишь при достаточно больших значениях A^- (и λ). Действительно, согласно (2.7) получим

$$B^-(\lambda, \beta) = [-2/(\beta A^-) + (A^-)^2]^{1/2}, \quad A^- \geq A^{-*} = (2/\beta)^{1/3} \quad (2.8)$$

$$\lambda \geq \lambda^* = (1/4)(\beta/2)^{1/3} \quad (B^2 < 0, \lambda < \lambda^*)$$

$$B^-(\lambda^*, \beta) = 0, \quad B^-(\lambda, \beta) \sim A^-(\lambda, \beta) \sim (2\lambda/\beta)^{1/2}, \quad \lambda \rightarrow +\infty$$

Таким образом, при $\lambda \leq \lambda^*$ пространственные эллиптически поляризованные стационарные колебания, отвечающие $\theta = 0, \psi = \pm\pi/2$, невозможны. По-видимому, тогда возможны только колебания в вертикальной плоскости (с $B = 0$, см. п. 2.1). Однако их практическая реализация зависит от устойчивости. Эта сложная проблема требует отдельного обстоятельного рассмотрения.

Рассмотрим теперь режим $\theta = \pi, \psi = \pm\pi/2$. Он существует для всех значений λ , для которых определена величина $A^+(\lambda, \beta) > 0$. Аналогично п. 2.1 из первого соотношения (2.7) получим критические значения A^+ и λ : $A_+^* = (3/4\beta)^{1/3}$, $\lambda_* = (9/8)(4\beta/3)^{1/3}$; отметим, что $A_+^* > A_{0*}^+$, $\lambda_* > \lambda_0$. Асимптотическое поведение убывающей и возрастающей ветвей $A_{1,2}^+(\lambda, \beta)$ имеет соответственно вид: $A_1^+(\lambda, \beta) \sim -3/(4\lambda)$, $A_2^+(\lambda, \beta) \sim A^-(\lambda, \beta) \sim (2\lambda/\beta)^{1/2}$ при $\lambda \rightarrow +\infty$.

Из вышеизложенного следует, что колебания в вертикальной плоскости в некотором смысле эквивалентны рассмотренным ранее в п. 2.1, однако они отвечают большей эквивалентной жесткости (поскольку $1/2 > 3/8$, см. (2.5), (2.7)).

Согласно (2.7) величина $B^+(\lambda, \beta)$, существует для всех значений $\lambda \geq \lambda_*$ (2.8). Изучим поведение функции B^+ как вблизи точки $\lambda = \lambda_*$, так и при $\lambda \rightarrow \infty$. Дифференцирование второго соотношения (2.7) для B приводит к выражению

$$\partial B^+ / \partial \lambda = (A^+ - \beta^{-1} (A^+)^{-2}) (B^+)^{-1} \partial A^+ / \partial \lambda \quad (2.9)$$

Поскольку $\infty > B^+ \geq c > 0$ для $\lambda = \lambda^*$ и выражение в квадратной скобке отлично от нуля при $\beta > 0$, то в критической точке $\lambda = \lambda_*$ производная $\partial B^+ / \partial \lambda$ равна

Существенный интерес представляет задача изучения устойчивости стационарных точек, см. выше, а также анализ развития колебаний при медленном изменении частотной расстройки λ . Для качественной интерпретации экспериментальных данных требуется учет влияния малой диссипации. Представляется также важным провести моделирование системы (2.2) в окрестности стационарных решений.

Уравнения (2.2) могут быть заменой переменных, аналогичной (2.4), приведены к гамильтоновой форме. Это позволяет получить первый интеграл системы и привести качественное исследование движения в окрестности стационарных точек.

3. Описание эксперимента и обсуждение результатов. Изложенная выше механическая колебательная система может быть относительно просто реализована в лабораторном эксперименте. Опишем весьма кратко экспериментальные результаты, которые были получены в специально поставленном опыте для наблюдения нелинейных эффектов при вынужденных колебаниях металлической струны.

Использовалась стальная струна хорошего качества (для музыкальных инструментов) длины $l = 0,9 - 1,0$ м и диаметра $d_0 = 4 \cdot 10^{-4}$ м, т. е. $S \approx 1,26 \cdot 10^{-7}$ м²; модуль Юнга материала $E \approx 2 \cdot 10^{11}$ Н/м². Натяжение струны T изменялось в широких пределах: $T = 10 - 10^2$ Н; заметим, что $ES \approx 2,5 \cdot 10^4$ Н, $ES \gg T$. Изменение величины T осуществлялось подвешиванием соответствующих грузов к одному из концов струны, переброшенному через блок. Посередине струны располагался электромагнитный возбудитель, состоящий из сердечника, связанного магнитопроводом с постоянным магнитом, и обмотки из медного провода. Обмотка сердечника питалась от генератора переменного тока, частота которого $N = 1/2 \Omega / \pi$ плавно регулировалась в пределах $N = 20 - 10^3$ Гц. Эта частота контролировалась цифровым частотомером и определялась с абсолютной погрешностью 0,10 Гц. Амплитуда колебаний струны в рассматриваемом звуковом диапазоне оценивалась с помощью микрофона и милливольтметра. Поскольку абсолютной градуировки микрофона не производилось, то удалось получить и нанести на график относительные значения амплитуды колебаний струны. В этих опытах не ставилась задача количественного сопоставления экспериментальных и теоретических результатов. Основное внимание уделялось наблюдению качественных эффектов, вытекающих из теоретического изучения вынужденных квазилинейных колебаний струны в окрестности главного резонанса.

Расчеты и наблюдения в экспериментах приводят к следующим результатам: установлено, согласно вычислениям и наблюдениям, что при $l = 0,9$ м и $T = 20$ Н первая собственная частота малых свободных колебаний струны находится вблизи значения $\nu_1 = 1/2 \omega_1 / \pi \approx 168$ Гц;

все резонансные явления в проведенных экспериментах происходили в интервале частот $167,1 \text{ Гц} \leq N \leq 171,2 \text{ Гц}$;

если частота тока N изменяется от 167 Гц до 168 Гц, то струна совершает периодические колебания с вынуждающей частотой только в вертикальной плоскости (всякие горизонтальные движения не наблюдаются);

при увеличении частоты внешнего воздействия N от 168 Гц до 169 Гц амплитуда колебаний увеличивается и происходит потеря устойчивости колебаний в вертикальной плоскости. Возникают биения между колебаниями в горизонтальной и вертикальной плоскостях;

при дальнейшем увеличении частоты N до 170 Гц амплитуда колебаний $(A^2 + B^2)^{1/2}$ максимальна, причем струна совершает устойчивые колебания как в вертикальной, так и в горизонтальной плоскостях. Визуальное наблюдение вдоль оси струны показывает, что точки струны описывают почти круговую траекторию, т. е. имеет место эллиптическая поляризация колебаний, близкая к круговой. Эта ситуация теоретически описана в п. 2.2;

на частоте внешнего возбуждения N около 171 Гц происходит «срыв» колебаний:

амплитуда A резко уменьшается и горизонтальные колебания исчезают ($B = 0$);

при изменении частоты внешнего воздействия в обратном направлении, т. е. при ее уменьшении от значения $N \simeq 172$ Гц «скачком» возникают вертикальные и горизонтальные колебания. В системе, таким образом, наблюдаются типичные гистерезисные явления, не присущие линейным связанным осцилляторам.

Итак, экспериментальные наблюдения подтверждают качественную картину вынужденных квазилинейных колебаний в окрестности главного резонанса. Они соответствуют установленному факту неустойчивости плоских колебаний в определенном диапазоне частот.

По мнению авторов исследования как теоретические, так и экспериментальные, различных режимов вынужденных нелинейных колебаний струны следует продолжить.

Авторы благодарят А. А. Чайковского и Г. В. Костина за помощь в графическом оформлении результатов работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код 93-013-17594, 94-01-01368) и совместного гранта Международного научного фонда, Российского фонда фундаментальных исследований и Министерства науки РФ (J17100).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акуленко Л. Д., Нестеров С. В. Нелинейные колебания струны//Изв. АН. МТТ. 1993. № 4. С. 87—92.
2. Oplinger D. W. Frequency response of nonlinear stretched string//J. Acous. Soc. Amer. 1960. V. 32. No. 12. P. 1529—1538.
3. Srinivasa Murthy G. S., Ramakrishna B. S. Nonlinear character of resonance in stretched string//J. Acoust. Soc. Amer. 1965. V. 38. No. 3. P. 461—471.
4. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
6. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 777 с.
7. Булгаков Б. В. Колебания. М.: Гостехиздат, 1954. 892 с.
8. Блэкьер О. Анализ нелинейных систем. М.: Мир, 1969. 400 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.II.1993