

УДК 629.78:534.1

© 1996 г. Ф. Н. ШКЛЯРЧУК

НЕЛИНЕЙНЫЕ И ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ УПРУГИХ КОСМИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

Большие космические конструкции собираются или разворачиваются в космосе. Они функционируют в условиях, близких к условиям вакуума и невесомости, подвергаются малым нагрузкам и поэтому могут быть очень гибкими. При этом действующие нагрузки, а также гравитация и ускорение, особенно во вращательном движении, могут оказывать существенное влияние на упругодинамические характеристики таких конструкций и в результате на их динамику. Это влияние в общем случае неустановившегося движения может быть учтено корректно только на основе геометрически нелинейной теории деформирования упругого тела, даже если упругие перемещения малы. Однако в большинстве опубликованных работ перемещения определяются на основе линейной теории упругости, что справедливо только для достаточно жестких конструкций.

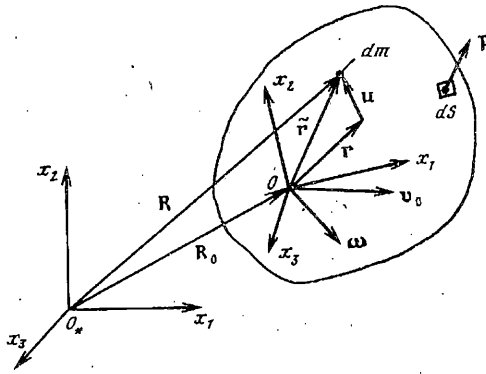
Общий подход к составлению уравнений движения деформируемого тела в скоростях связанной системы координат и его упругих колебаний в обобщенных координатах с точностью до линейных членов относительно последних изложен в [1].

Нелинейные уравнения движения упругих космических конструкций получены в [2] в скоростях и обобщенных координатах как в [1], и в [3, 4] — в обобщенных координатах. Метод Лагранжа в обобщенных координатах использовался также для получения нелинейных уравнений движения составных упругих систем: космического манипулятора в виде трех последовательно соединенных пространственными шарнирами упругих стержней [5] и упругого вертолета с вращающимися лопастями [6].

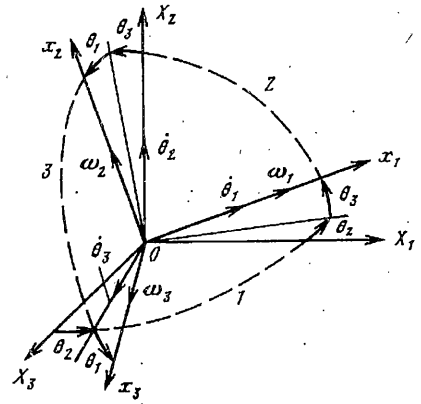
В данной работе рассматривается динамика космических конструкций в центральном гравитационном поле при больших углах поворота и конечных упругих деформациях. Получены общие нелинейные уравнения движения с точностью до квадратичных членов относительно обобщенных координат, представляющих упругие деформации. Составлены также линеаризованные уравнения возмущенного движения рассматриваемой упругой системы.

1. Постановка задачи. Основные соотношения. Рассмотрим упругую систему (тело), которая совершает поступательное и вращательное движения, сопровождаемые колебаниями. Будем предполагать, что деформации тела являются конечными и упругими, а углы поворота его элементов, обусловленные деформациями — конечными (здесь угол считается конечным, если $\sin \vartheta \approx \vartheta$, $\cos \vartheta \approx 1 - \vartheta^2/2$, и малым, если $\sin \vartheta \approx \vartheta$, $\cos \vartheta \approx 1$). Колебания тела будем рассматривать в связанной с ним подвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$, фиг. 1. Эта система может быть «локально» связанной с какой-либо точкой тела или его недеформируемым элементом (частью). В некоторых случаях систему $Ox_1x_2x_3$ удобно жестко связать с движущимся как бы «затвердевшим» телом, из решения задачи динамики которого могут быть найдены параметры движения этой системы. Тогда по отношению к такой системе координат упругое тело будет «плавающим», т. е. наряду с упругими деформациями оно будет иметь возможность совершать дополнительные конечные повороты и перемещения как твердого тела относительно этой системы координат. Возможны другие варианты выбора связанной системы координат [2].

Положение рассматриваемой подвижной системы координат относительно инерциальной системы $O_*X_1X_2X_3$ характеризуется радиусом-вектором



Фиг. 1



Фиг. 2

$R_0 = [X_{01}(t) X_{02}(t) X_{03}(t)]^T$ и углами поворота $\theta_1(t), \theta_2(t), \theta_3(t)$, представляющими углы крена, рыскания и тангажа, соответственно. Эти углы, их производные по времени $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$ и последовательность вращений тела ($\theta_2 \rightarrow \theta_3 \rightarrow \theta_1$) показаны на фиг. 2.

Векторы скорости поступательного (в точке O) и вращательного движений системы $Ox_1x_2x_3$ относительно системы $O_*X_1X_2X_3$ обозначим через $v_0 = [v_{01}v_{02}v_{03}]^T$ и $\omega = [\omega_1\omega_2\omega_3]^T$, где $v_{0k}(t), \omega_k(t)$ — проекции этих векторов на ось Ox_k . При этом из фиг. 2 можно получить кинематические соотношения [1, 2]:

$$v_0 = \Lambda \dot{R}_0, \quad \omega = A \dot{\theta} \tag{1.1}$$

$$\Lambda = \begin{vmatrix} c_2c_3 & s_3 & -s_2c_3 \\ s_1s_2 - c_1c_2s_3 & c_1c_3 & s_1c_2 + c_1s_2s_3 \\ c_1s_2 + s_1c_2s_3 & -s_1c_3 & c_1c_2 - s_1s_2s_3 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & s_3 & 0 \\ 0 & c_1c_3 & s_1 \\ 0 & -s_1c_3 & c_1 \end{vmatrix}, \quad \theta = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

$$s_k = \sin \theta_k, \quad c_k = \cos \theta_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

Матрица направляющих косинусов Λ обладает свойством $\Lambda^{-1} = \Lambda^T$.

Радиусы-векторы и векторы абсолютной скорости v и абсолютного ускорения a любой точки движущегося и колеблющегося упругого тела (фиг. 1) равны:

$$R = R_0 + \tilde{r}, \quad \tilde{r} = r + u$$

$$v = v_0 + \omega \times \tilde{r} + \dot{u}, \quad a_0 = \dot{v}_0 + \omega \times v_0 \tag{1.2}$$

$$a = a_0 + \dot{\omega} \times \tilde{r} + \omega \times (\omega \times \tilde{r}) + 2\omega \times \dot{u} + \ddot{u}$$

где $r = [x_1x_2x_3]^T$ — радиус-вектор; $u = [u_1u_2u_3]^T$ — вектор перемещений тела, обусловленных его колебаниями относительно системы $Ox_1x_2x_3$; a_0 — ускорение точки O .

Конечные деформации (относительные удлинения $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}$ и углы сдвига $\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}$) выражаются через проекции перемещения на оси подвижной системы координат $u_1(x_1, x_2, x_3, t), u_2(x_1, x_2, x_3, t), u_3(x_1, x_2, x_3, t)$ на основании квадратично-нелинейных соотношений [7]. Здесь будем считать, что

$$\partial u_1 / \partial x_1 \ll 1, \quad \partial u_2 / \partial x_2 \ll 1, \quad \partial u_3 / \partial x_3 \ll 1$$

и будем пренебрегать квадратами этих величин и произведениями их с конечными углами поворота элементов

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \text{ при } \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 \ll 1, \dots (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1)$$

Тогда для конечных деформаций будем иметь упрощенные соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2 \right] \\ \gamma_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\dots$$

$$(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1)$$

В прикладных теориях (расчетных моделях) деформирования упругих тел могут быть использованы различные кинематические или динамические допущения. Например, если тело (или его часть) считается абсолютно жестким, то его перемещения выражаются через конечные углы поворота линейноквадратичными зависимостями. Если при изгибных колебаниях стержня считать его ось x_1 нерастяжимой ($\varepsilon_{11} = 0$), то на основании (1.3) продольное перемещение u_1 будет квадратичным образом выражаться через прогибы u_2, u_3 . В случае нелинейных преимущественно поперечных колебаний пластин и пологих оболочек можно пренебречь инерцией в тангенциальных направлениях и путем интегрирования квазистатических уравнений равновесия с учетом закона Гука и конечных деформаций (1.3) можно выразить тангенциальные перемещения через прогиб квадратичным образом.

Таким образом в геометрически нелинейных задачах на основании метода Ритца перемещение упругого тела в общем случае может быть представлено в виде разложения

$$u = \sum_i q_i \varphi_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j q_i q_j \psi_{ij} \quad (1.4)$$

где $q_i(t)$ — обобщенные координаты; $i, j = 1, 2, \dots, n$ при описании движения тела в локально связанной системе координат и $i, j = 0_1, 0_2, \dots, 0_6, 1, 2, \dots, n$ в плавающей системе координат; $\varphi_i(x_1, x_2, x_3), \psi_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ — заданные вектор-функции, которые выбираются в классе возможных перемещений тела согласно принятой расчетной модели (стержень, пластина и пр.) с учетом определенных допущений; при этом функции ψ_{ij} выражаются через φ_i и φ_j и являются симметричными, т. е. $\psi_{ij} = \psi_{ji}$. Обобщенные координаты q_i при $i = 1, 2, \dots, n$ представляют упругие деформации тела, а при $i = 0_1, 0_2, \dots, 0_6$ — перемещения и повороты недеформируемого тела. В частности, если не используются никакие допущения, связывающие различные компоненты перемещений, то можно принять $\psi_{ij} \equiv 0$. Однако в этом случае для тонких тел при преимущественно поперечных колебаниях сходимость решения нелинейной задачи может оказаться слабой и потребуются большое число заданных функций φ_i для аппроксимации тангенциальных перемещений, поскольку последние связаны с нормальными перемещениями почти квазистатически.

В качестве функций φ_i при $i = 1, 2, \dots, n$ удобно использовать собственные формы малых колебаний рассматриваемой упругой системы. При этом можно ограничиться небольшим числом n этих функций, соответствующих низшим формам колебаний, и с учетом их ортогональности упростить уравнения. Для локально связанной с упругим телом системы координат $Ox_1x_2x_3$ для φ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) можно использовать формы собственных колебаний этого тела, закрепленного в точке O или на какой-либо его жесткой части. Например, для

космического аппарата с жестким центральным телом и присоединенными к нему упругими элементами (панелями солнечных батарей, штангами гравитационной стабилизации, удлинными фермами и пр.) в качестве функций φ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) можно использовать собственные формы колебаний этих элементов, закрепленных на неподвижном центральном теле.

Для плавающей системы координат $Ox_1x_2x_3$, связанной с условно затвердевшим телом для функций φ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) можно использовать формы собственных упругих колебаний свободного тела. Последние ортогональны как друг с другом, так и с формами перемещений и малых поворотов твердого тела. Для данного случая вектор-функции, соответствующие степеням свободы системы как твердого тела при $i = 0_1, 0_2, \dots, 0_6$ имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_{0_1} &= \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \varphi_{0_2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \varphi_{0_3} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \varphi_{0_4} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{Bmatrix} \\ \varphi_{0_5} &= \begin{Bmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{Bmatrix}, \quad \varphi_{0_6} = \begin{Bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \psi_{0_4 0_4} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{Bmatrix}, \quad \psi_{0_4 0_5} = \begin{Bmatrix} x_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \psi_{0_4 0_6} &= \begin{Bmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \psi_{0_5 0_5} = \begin{Bmatrix} -x_1 \\ 0 \\ -x_3 \end{Bmatrix}, \quad \psi_{0_5 0_6} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \quad \psi_{0_6 0_6} = \begin{Bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\psi_{ij} = 0 \quad \text{при } i, j = 0_1, 0_2, 0_3$$

При этом $q_{0_1}, q_{0_2}, q_{0_3}$ представляют перемещения в направлении осей x_1, x_2, x_3 , соответственно, а $q_{0_4}, q_{0_5}, q_{0_6}$ — конечные углы поворота относительно этих осей. Выражения (1.5) для конечных углов поворота получены из формулы для перемещений твердого тела при его повороте $u = (\Lambda^T - E) r$ путем разложения матрицы Λ^T по степеням $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ с точностью до квадратичных членов включительно.

Для удобства дальнейших вычислений векторное произведение будем заменять матричным

$$a \times b = \overset{\vee}{a}b$$

где верхним знаком (\vee) обозначается кососимметричная матрица, образованная из компонент соответствующего вектора как

$$a = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}, \quad \overset{\vee}{a} = \begin{Bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{Bmatrix}$$

Выполняются следующие тождества, которые могут быть использованы при преобразованиях уравнений:

$$\begin{aligned} \overset{\vee}{a}b + \overset{\vee}{b}a &= 0, \quad \overset{\vee}{a}b\overset{\vee}{c} + \overset{\vee}{b}c\overset{\vee}{a} + \overset{\vee}{c}a\overset{\vee}{b} = 0 \\ \overset{\vee}{a}b\overset{\vee}{c} &= (ba^T)c - (a^Tb)c, \quad a^T\overset{\vee}{b}b\overset{\vee}{c} = b^T\overset{\vee}{c}a\overset{\vee}{b} \\ \overset{\vee}{a}b\overset{\vee}{b}a &= -\overset{\vee}{b}a\overset{\vee}{a}b = -\overset{\vee}{b}(aa^T)b = (a^Tb)\overset{\vee}{a}b \end{aligned} \quad (1.6)$$

2. Нелинейные уравнения движения. Уравнения движения системы для век-

торов v_0 , ω и обобщенных координат q_i можно составить на основе принципа возможных перемещений

$$\delta\Pi = \delta A_p + \delta A_m \quad (2.1)$$

где $\Pi [u]$ — потенциальная энергия деформации системы;

$$\delta A_p = \int_V \delta u_*^T g dm + \int_S \delta u_*^T p dS \quad (2.2)$$

вариация работы гравитационных и поверхностных сил;

$$\delta A_m = - \int_V \delta u_*^T a dm \quad (2.3)$$

вариация работы инерционных сил.

Здесь

$$\delta u_* = \delta u_0 + \delta\theta \times \tilde{r} + \delta u \quad (2.4)$$

вариация перемещения любой точки тела с учетом вариаций смещения $\delta u_0 = \Lambda \delta R_0$ и малого поворота $\delta\theta$ подвижной системы координат; g — вектор массовых сил тяготения; p — вектор поверхностной нагрузки; $dm = \rho dV$ — масса элемента тела, сохраняющая свою величину в процессе его деформирования; $\rho(x_1, x_2, x_3)$ — плотность тела; dV, dS — элементы объема и площади поверхности тела. Из выражения (1.4) с учетом $\psi_{ij} = \psi_{ji}$ получаем

$$\delta u = \sum_i \delta q_i \tilde{\varphi}_i, \quad \dot{u} = \sum_i \dot{q}_i \tilde{\varphi}_i \quad (2.5)$$

$$\ddot{u} = \sum_i \ddot{q}_i \tilde{\varphi}_i + \sum_i \sum_j \dot{q}_i \dot{q}_j \psi_{ij}, \quad \tilde{\varphi}_i = \varphi_i + \sum_j q_j \psi_{ij}$$

Поскольку вариации δu_0 , $\delta\theta$ и δq_i произвольны и независимы, из принципа возможных перемещений (2.1) с учетом (2.2) — (2.5) следуют уравнения движения:

$$\int_V adm = P, \quad \int_V \tilde{r}^v adm = M, \quad \int_V \tilde{\varphi}_i^T adm + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i \quad (2.6)$$

$$P = P_g + P_p, \quad P_g = \int_V g dm, \quad P_p = \int_S p dS$$

$$M = M_g + M_p, \quad M_g = \int_V \tilde{r}^v g dm, \quad M_p = \int_S \tilde{r}^v p dS \quad (2.7)$$

$$Q_i = Q_{g,i} + Q_{p,i}, \quad Q_{g,i} = \int_V \tilde{\varphi}_i^T g dm, \quad Q_{p,i} = \int_S \tilde{\varphi}_i^T p dS$$

Нагрузка p может включать в себя аэродинамические и управляющие силы, реакции подвижных компонентов (манипуляторов, вращающихся роторов, протекающей по каналам и плескающейся в полостях жидкости и пр.). Такие подсистемы (звенья) отделяются от рассматриваемой конструкции и их действие заменяется неизвестными реакциями. Эти реакции и уравнения движения подсистем записываются через их обобщенные координаты и кинематические параметры упругой системы. Реакции подсистем учитываются в выражениях (2.7), а уравнения подсистем добавляются к уравнениям (2.6).

Уравнения (2.6) могут быть также составлены другим способом как уравнения Эйлера — Лагранжа для скоростей v_0 , ω и уравнения Лагранжа для обобщенных координат q_i [1]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v_0} \right) + \omega \times \frac{\partial T}{\partial v_0} = P$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}} \right) + \omega \times \frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}} + v_0 \times \frac{\partial T}{\partial v_0} = M$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i, \quad T = \frac{1}{2} \int_V v^T v dm \quad (2.8)$$

где T — кинетическая энергия системы.

Сначала рассмотрим случай, когда движение тела описывается в локально связанной с ним системе координат. После преобразований с учетом (1.6) уравнения (2.6) или, тоже самое, уравнения (2.8) записываются в виде

$$m a_0 - \overset{\vee}{L}_0 \dot{\omega} + \sum_j \tilde{L}_j \ddot{q}_j - (\overset{\vee}{\omega} \overset{\vee}{L}_0 + 2 \sum_j \overset{\vee}{L}_j \dot{q}_j) \omega + \sum_j \sum_k L_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = P$$

$$\overset{\vee}{L}_0 a_0 + \overset{\vee}{I}_{00} \dot{\omega} + \sum_j \tilde{S}_{0j} \ddot{q}_j + (\overset{\vee}{\omega} \overset{\vee}{I}_{00} + 2 \sum_j \overset{\vee}{I}_{0j} \dot{q}_j) \omega + \sum_j \sum_k \tilde{S}_{0,jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = M \quad (2.9)$$

$$\tilde{L}_i^T a_0 + \tilde{S}_{0i}^T \dot{\omega} + \sum_j \tilde{m}_{ij} \ddot{q}_j - (\omega^T \tilde{I}_{0i}^T + 2 \sum_j \tilde{S}_{ij}^T \dot{q}_j) \omega + \sum_j \sum_k \tilde{m}_{i,jk} \dot{q}_j \dot{q}_k +$$

$$+ \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$a_0 = \dot{v}_0 + \dot{\omega} v_0 \quad (j, k = 1, \dots, n)$$

$$m = \int_V dm, \quad \tilde{L}_0 = \int_V \tilde{r} dm, \quad \tilde{L}_j = \int_V \tilde{\varphi}_j dm$$

$$L_{ij} = \int_V \psi_{ij} dm, \quad \tilde{I}_{00} = - \int_V \tilde{r} \tilde{r} dm, \quad \tilde{I}_{0j} = - \int_V \tilde{r} \tilde{\varphi}_j dm \quad (2.10)$$

$$\tilde{S}_{0j} = \int_V \tilde{r} \tilde{\varphi}_j dm, \quad \tilde{S}_{0,jk} = \int_V \tilde{r} \tilde{\varphi}_{jk} dm, \quad \tilde{S}_{ij} = \int_V \tilde{\varphi}_i \varphi_j dm$$

$$\tilde{m}_{ij} = \int_V \tilde{\varphi}_i^T \tilde{\varphi}_j dm, \quad \tilde{m}_{i,jk} = \int_V \tilde{\varphi}_i^T \psi_{jk} dm$$

Здесь инерционные характеристики, отмеченные сверху волной, вычисляются для деформированного тела и зависят от обобщенных координат в силу того, что от них зависят функции $\tilde{r} = r + u$ и $\tilde{\varphi}_i$ как (1.4) и (2.5).

Например, матрица инерции деформированного тела \tilde{I}_{00} зависит от обобщенных координат до четвертой степени включительно. При практических расчетах, считая упругие перемещения малыми по сравнению с габаритными размерами системы (так как углы поворота элементов тела, обусловленные упругими деформациями, являются конечными), в уравнениях (2.9) с учетом (2.10) можно ограничиться нелинейными членами не выше третьего или даже второго порядка по координатам q_i .

Если ограничиться нелинейными членами второго порядка, то коэффициенты (2.10) могут быть представлены в виде

$$\tilde{L}_0 \approx L_0 + \sum_k L_k q_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l L_{kl} q_k q_l, \quad \tilde{L}_j \approx L_j + \sum_k L_{jk} q_k$$

$$\tilde{I}_{00} \approx I_{00} + \sum_k (I_{0k} + I_{0k}^T) q_k + \sum_k \sum_l (I_{kl} + I_{0,k,l}) q_k q_l$$

$$\tilde{I}_{0j} \approx I_{0j} + \sum_k (I_{kj} + I_{0,kj}) q_k + \sum_k \sum_l (I_{k,jl} + \frac{1}{2} I_{j,kl}^T) q_k q_l \quad (2.11)$$

$$\tilde{S}_{0j} \approx S_{0j} + \sum_k (S_{kj} + S_{0,kj}) q_k + \sum_k \sum_l (S_{k,jl} - \frac{1}{2} S_{j,kl}) q_k q_l$$

$$\tilde{S}_{ij} \approx S_{ij} + \sum_k (S_{i,jk} - S_{j,ik}) q_k, \quad \tilde{m}_{ij} \approx m_{ij} + \sum_k (m_{i,jk} + m_{j,ik}) q_k$$

$$\tilde{S}_{0,jk} \approx S_{0,jk}, \quad \tilde{m}_{i,jk} \approx m_{i,jk}$$

Коэффициенты правых частей этих выражений определяются по формулам (2.10), если в них опустить верхний знак (\sim) и, кроме того

$$I_{jk} = - \int_V \check{\check{\Phi}}_j \check{\check{\Phi}}_k dm, \quad I_{0,jk} = - \int_V \check{\check{r}}_j \check{\check{\Phi}}_k dm \quad (2.12)$$

$$I_{k,jl} = - \int_V \check{\check{\Phi}}_k \check{\check{\Phi}}_{jl} dm, \quad S_{k,jl} = \int_V \check{\check{\Phi}}_k \check{\check{\Psi}}_{jl} dm$$

Для решения задачи динамики упругой системы, движущейся под действием заданных внешних нагрузок и гравитационных сил, к уравнениям (2.9) с учетом (2.7) добавляются кинематические соотношения (1.1) в виде

$$\dot{R}_0 = \Lambda^T v_0, \quad \dot{\theta} = A^{-1} \omega \quad (2.13)$$

В результате получается замкнутая система нелинейных дифференциальных уравнений: двенадцать уравнений первого порядка для двенадцати компонент векторных функций R_0, θ, v_0, ω и n уравнений для обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_n .

В случае, когда используется плавающая система координат, связанная с затвердевшим телом, сначала составляются уравнения движения твердого тела (они следуют из (2.9) при $q_j = 0$):

$$m a_0 - \dot{L}_0 \dot{\omega} - \check{\check{\omega}} \dot{L}_0 \omega = P \quad (2.14)$$

$$\dot{L}_0 a_0 - \dot{I}_{00} \dot{\omega} + \check{\check{\omega}} I_{00} \omega = M \quad (a_0 = \dot{v}_0 + \check{\check{\omega}} v_0)$$

Из уравнений (2.13), (2.14) при заданных начальных условиях определяются функции R_0, θ, v_0, ω .

Уравнения для обобщенных координат q_i с учетом смещений и конечных углов поворота упругого тела относительно подвижной системы координат записываются в виде

$$\begin{aligned} & \sum_j \tilde{m}_{ij} \ddot{q}_j - 2\omega^T \sum_j \tilde{S}_{ij} \dot{q}_j + \sum_j \sum_k \tilde{m}_{i,jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = \\ & = Q_i - \tilde{L}_i^T a_0 - \tilde{S}_{0i}^T \dot{\omega} + \omega^T \tilde{I}_{0i} \omega \quad (i = 0_1, \dots, 0_6, 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $j, k = 0_1, \dots, 0_6, 1, \dots, n$; эти уравнения аналогичны последней группе уравнений (2.9). Правые части уравнений (2.15) при $i = 0_1, \dots, 0_6$ в силу уравнений (2.14) с учетом (2.10), (2.11) упрощаются: в них остаются только члены, зависящие от обобщенных координат q_j .

Уравнения (2.15) или, то же самое, уравнения для обобщенных координат (2.9) при известных $a_0(t)$ и $\omega(t)$ можно использовать также в случае управляемой системы, когда какая-либо ее точка или жесткая часть совершает заданное программное движение, и, кроме того, для упругой системы, присоединенной к достаточно жесткому массивному телу, на движение которого колебания присоединенной системы практически не оказывают влияния. При этом первые уравнения (2.9) можно использовать для определения управляющих сил и моментов, входящих в P и M , или для определения реакций несущего тела.

При построении уравнений (2.15) для свободной упругой системы удобно связанную систему координат совместить с главными центральными осями затвердевшего тела, а в качестве заданных функций Φ_i использовать собственные формы упругих колебаний свободного тела. В этом случае с учетом условий

ортогональности, всех функций φ_i ($i = 0_1, \dots, 0_6, 1, \dots, n$) существенно упрощаются коэффициенты (2.10), (2.11) и уравнения (2.15), если последние записать в скалярной форме.

Заметим, что пределами применимости уравнений (2.9) и (2.15) наряду с физическими ограничениями для малых деформаций (1.3) являются ограничения на углы поворота элементов тела $\partial u_k / \partial x_l$ при $k, l = 1, 2, 3, k \neq l$ в системе координат $Ox_1x_2x_3$ — эти углы должны быть конечными (т. е. практически они не должны превышать 30°). При использовании уравнений (2.9), когда в (1.4) $i, j = 1, \dots, n$, углы поворота элементов тела полностью обусловлены его упругими деформациями. При использовании уравнений (2.15), когда $i, j = 0_1, \dots, 0_6, 1, \dots, n$, эти углы включают в себя также углы поворота абсолютно твердого тела $q_{0_4}, q_{0_5}, q_{0_6}$, которые также должны оставаться конечными.

3. Упругие и гравитационные силы. Потенциальная энергия деформации упругого тела записывается в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon - \varepsilon_T)^T \sigma dV = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon - \varepsilon_T)^T C (\varepsilon - \varepsilon_T) dV$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} \gamma_{12} \gamma_{23} \gamma_{31}]^T, \quad \sigma = [\sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} \tau_{12} \tau_{23} \tau_{31}]^T \quad (3.1)$$

где ε, σ — векторы, составленные из компонент деформаций и напряжений; вектор ε_T представляет начальные нестесненные температурные или технологические деформации; C — симметричная матрица коэффициентов упругости, входящих в уравнения закона Гука $\sigma = C(\varepsilon - \varepsilon_T)$. С учетом соотношений (1.3) и разложения (1.4) выражение Π записывается в обобщенных координатах. В случае тонких тел (стержней, пластин и оболочек) для форм преимущественно поперечных колебаний, при которых тангенциальные перемещения значительно меньше нормальных, последние по методу Ритца обычно представляются в виде линейных зависимостей от обобщенных координат. При этом конечные деформации (1.3) и, соответственно, тангенциальные перемещения зависят от обобщенных координат квадратичным образом как (1.4). Тогда выражение Π в обобщенных координатах будет содержать нелинейные члены до четвертого порядка, а обобщенные упругие силы $\partial \Pi / \partial q_i$ — до третьего порядка включительно.

Определим силы тяготения, действующие на вращающуюся деформируемую крупногабаритную конструкцию в центральном гравитационном поле. Располагая начало инерциальной системы координат $O_*X_1X_2X_3$ в центре этого поля и используя закон всемирного тяготения, в случае $|\tilde{r}/R_0| \ll 1$ можно получить следующее приближенное выражение для вектора g [2]:

$$g = -g_0 \left[\mathbf{v} + \frac{1}{|R_0|} (\tilde{\mathbf{r}} - 3(\mathbf{v}^T \tilde{\mathbf{r}}) \mathbf{v}) \right], \quad \mathbf{v} = \Lambda \frac{\mathbf{R}_0}{|R_0|} \quad (3.2)$$

где g_0 — ускорение свободного падения в точке O , \mathbf{v} — единичный вектор, направленный вдоль \mathbf{R}_0 и записываемый в проекциях на оси подвижной системы координат.

Гравитационные силы и моменты (2.7) с учетом (3.2) записываются в виде

$$P_g = -g_0 \left[m\mathbf{v} + \frac{1}{|R_0|} (\tilde{\mathbf{L}}_0 - 3(\mathbf{v}^T \tilde{\mathbf{L}}_0) \mathbf{v}) \right]$$

$$M_g = -g_0 \left[\tilde{\mathbf{L}}_0 - \frac{3}{|R_0|} \mathbf{v}^T \tilde{\mathbf{L}}_0 \mathbf{v} \right] \quad (3.3)$$

$$Q_{g,i} = -g_0 \left[\tilde{\mathbf{I}}_i^T \mathbf{v} + \frac{1}{|R_0|} (3\mathbf{v}^T \tilde{\mathbf{I}}_{0i} \mathbf{v} - 2\tilde{m}_{0i}) \right]$$

$$\tilde{m}_{0i} = \int_V \tilde{r}^T \tilde{\varphi}_i dm \approx m_{0i} + \sum_k (m_{ik} + m_{0,ik}) q_k + \sum_k \sum_l (m_{k,l} + m_{i,kl}) q_k q_l \quad (3.4)$$

$$m_{0i} = \int_V r^T \varphi_i dm, \quad m_{0,ik} = \int_V r^T \psi_{ik} dm$$

4. Линеаризованные уравнения движения. Пусть решена задача для некоторого невозмущенного движения. Кинематические параметры такого движения будем обозначать градусом \mathbf{v}° , $\boldsymbol{\omega}^\circ$, \mathbf{R}_0° , θ° , $q_1^\circ, \dots, q_n^\circ$ и \mathbf{u}° . Перемещение тела в возмущенном движении может быть представлено в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ + \mathbf{u}^1 \quad (4.1)$$

где \mathbf{u}^1 — вектор малых дополнительных перемещений.

Инерционные, гравитационные и поверхностные нагрузки в возмущенном движении представляются аналогичным образом

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^\circ + \mathbf{a}^1, \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}^\circ + \mathbf{g}^1, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}^\circ + \mathbf{p}^1 \quad (4.2)$$

при этом возмущения \mathbf{a}^1 , \mathbf{g}^1 и \mathbf{p}^1 должны быть линеаризованы в зависимости от перемещения \mathbf{u}^1 и его производных. Согласно (1.2) и (3.2) получаем

$$\mathbf{a}^1 = \dot{\boldsymbol{\omega}}^\circ \mathbf{u}^1 + \boldsymbol{\omega}^\circ \dot{\boldsymbol{\omega}}^\circ \mathbf{u}^1 + 2\dot{\boldsymbol{\omega}}^\circ \dot{\mathbf{u}}^1 + \ddot{\mathbf{u}}^1$$

$$\mathbf{g}^1 = -g_0 \frac{1}{|R_0^\circ|} [\mathbf{u}^1 - 3(\mathbf{v}^{\circ T} \mathbf{u}^1) \mathbf{v}^\circ], \quad \mathbf{v}^\circ = \Lambda^\circ \frac{\mathbf{R}_0^\circ}{|R_0^\circ|} \quad (4.3)$$

Принцип возможных перемещений для возмущенного движения упругого тела при конечных деформациях (1.3) с учетом (4.1), (4.2) записывается в виде

$$\delta \Pi^1 = \delta A_p^1 + \delta A_{in}^1, \quad \Pi^1 = \frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{\varepsilon}^{1T} C \boldsymbol{\varepsilon}^1 + 2\boldsymbol{\varepsilon}^{1T} \boldsymbol{\sigma}^\circ) dV$$

$$\delta A_p^1 = \int_V \delta \mathbf{u}^{1T} \mathbf{g}^1 dm + \int_S \delta \mathbf{u}^{1T} \mathbf{p}^1 dS, \quad \delta A_{in}^1 = - \int_V \delta \mathbf{u}^{1T} \mathbf{a}^1 dm \quad (4.4)$$

Здесь в выражении для приращения потенциальной энергии в возмущенном движении Π^1 компоненты векторов деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}^1 = [\varepsilon_{11}^1 \varepsilon_{22}^1 \varepsilon_{33}^1 \gamma_{12}^1 \gamma_{23}^1 \gamma_{31}^1]^T$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{11} = [\varepsilon_{11}^{11} \varepsilon_{22}^{11} \varepsilon_{33}^{11} \gamma_{12}^{11} \gamma_{23}^{11} \gamma_{31}^{11}]^T$ на основании (1.3) определяются по формулам:

$$\varepsilon_{11}^1 = \frac{\partial u_1^1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^\circ}{\partial x_1} \frac{\partial u_2^1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3^\circ}{\partial x_1} \frac{\partial u_3^1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{11}^{11} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_2^1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3^1}{\partial x_1} \right)^2 \right]$$

$$\gamma_{12}^1 = \frac{\partial u_1^1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3^\circ}{\partial x_1} \frac{\partial u_3^1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3^\circ}{\partial x_2} \frac{\partial u_3^1}{\partial x_1}, \quad \gamma_{12}^{11} = \frac{\partial u_3^1}{\partial x_1} \frac{\partial u_3^1}{\partial x_2} \quad (4.5)$$

$$(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1)$$

где $\boldsymbol{\sigma}^\circ = C(\boldsymbol{\varepsilon}^\circ - \boldsymbol{\varepsilon}_T)$ — представляет собой вектор напряжений (3.1), действующих в теле в невозмущенном движении; компоненты вектора деформаций в невозмущенном движении $\boldsymbol{\varepsilon}^\circ$ определяются по формулам (1.3) при $\mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{u}_1^\circ$, $\mathbf{u}_2 \rightarrow \mathbf{u}_2^\circ$, $\mathbf{u}_3 \rightarrow \mathbf{u}_3^\circ$.

Поскольку в невозмущенном движении перемещения упругого тела по методу Ритца записываются в виде (1.4), то при использовании той же самой модели деформирования дополнительные перемещения в возмущенном движении при любом выборе подвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$ (локально связанной или плавающей) будут иметь вид

$$\mathbf{u}^1 = \sum_{i=0}^n q_i^1 (\boldsymbol{\varphi}_i + \sum_{j=0}^n q_j^0 \boldsymbol{\psi}_{ij}) \quad (4.6)$$

где первые шесть обобщенных координат при $i = 0_1, 0_2, \dots, 0_6$ представляют степени свободы системы как твердого тела; $q_{01}^1, q_{02}^1, q_{03}^1$ — перемещения полюса (который в недеформированном состоянии совпадает с точкой O) вдоль осей x_1, x_2, x_3 ; $q_{04}^1, q_{05}^1, q_{06}^1$ — малые углы поворота относительно этих осей.

Приращение потенциальной энергии в возмущенном движении Π^1 с учетом выражений для деформаций (4.5), и перемещений (4.6) записывается в обобщенных координатах

$$\Pi^1 = \frac{1}{2} \sum_{i=0_1}^n \sum_{j=0_1}^n k_{ij} q_i^1 q_j^1 \quad (4.7)$$

где k_{ij} — коэффициенты обобщенных жесткостей, учитывающие напряженно-деформированное состояние в невозмущенном движении; $k_{ij} = 0$ при $i, j = 0_1, 0_2, 0_3$.

Из принципа возможных перемещений (4.4) с учетом (4.5), (4.3), (4.6), (4.7) получаем линеаризованные уравнения возмущенного движения в обобщенных координатах

$$\sum_{j=0_1}^n [m_{ij}^* \dot{q}_j^1 + d_{ij} \dot{q}_j^1 + (k_{ij} + b_{ij}) q_j^1] = Q_i^1 \quad (i = 0_1, \dots, 0_6, 1, \dots, n) \quad (4.8)$$

$$m_{ij}^* = m_{ij} + \sum_k (m_{i,jk} + m_{j,ik}) q_k^0$$

$$d_{ij} = -2\omega^{0T} S_{ij} - 2 \sum_k [\omega^{0T} (S_{i,jk} - S_{j,ik}) q_k^0 - m_{i,jk} \dot{q}_k^0]$$

$$b_{ij} = -\omega^{0T} I_{ij} \omega^0 - \dot{\omega}^{0T} S_{ij} - \sum_k \{[\omega^{0T} (I_{i,jk} + I_{j,ik}) \omega^0 + \dot{\omega}^{0T} (S_{i,jk} - S_{j,ik})] q_k^0 + 2\omega^{0T} S_{i,jk} \dot{q}_k^0 - m_{i,jk} \ddot{q}_k^0\} \quad (4.9)$$

$$Q_i^1 = Q_{g,i}^1 + Q_{p,i}^1$$

$$Q_{g,i}^1 = -g_0 \frac{1}{R_0^0} \sum_{j=0_1}^n \{3v^{0T} I_{ij} v^0 - 2m_{ij} + \sum_k [3v^{0T} (I_{i,jk} + I_{j,ik}) v^0 - 2(m_{i,jk} + m_{j,ik})] q_k^0\} q_j^1$$

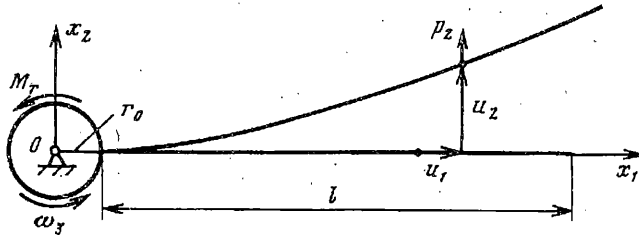
$$Q_{p,i}^1 = \int_S \varphi_i^T p^1 dS + \sum_k q_k^0 \int_S \psi_{ik} p^1 dS$$

где $k = 1, \dots, n$ при описании невозмущенного движения в локально связанной системе координат и $k = 0_1, \dots, 0_6, 1, \dots, n$ — в плавающей системе координат. Коэффициенты (4.9) записаны с точностью до линейных членов относительно q_k^0 .

Если невозмущенное движение стационарное, то коэффициенты $m_{ij}^*, d_{ij}, k_{ij}, b_{ij}$ являются постоянными; при этом $d_{ij} = -d_{ji}, b_{ij} = b_{ji}$ и система (4.8) при $Q_i^1 \equiv 0$ является консервативной гироскопической системой.

В случае, когда в невозмущенном движении система рассматривается как недеформируемая ($v^0 \equiv 0$), то в выражениях (4.9) следует положить $q_k^0 \equiv 0$. Для этого частного случая уравнения возмущенного движения (4.8) можно также получить непосредственно путем линеаризации уравнений (2.15) с учетом (2.11) при $\psi_{ij} = 0$.

5. Колебания вращающегося стержня. С целью сравнения полученных различных уравнений движения и оценки их возможных упрощений в качестве



Фиг. 3

примера рассмотрим нелинейные колебания гибкого стержня постоянного поперечного сечения, присоединенного к абсолютно жесткому вращающемуся телу (валу, диску) радиуса r_0 , фиг. 3. Стержень совместно с центральным телом вращается с угловой скоростью $\omega_3(t)$ и совершает колебания в плоскости Ox_1x_2 . Распределенную массу стержня приводим к его оси, пренебрегая инерцией вращения поперечных сечений, а ось стержня считаем нерастяжимой. Тогда на оси при $x_2 = x_3 = 0$:

$$\varepsilon_{11} = u_1' + \frac{1}{2}u_2'^2 = 0, \quad u_1 = -\frac{1}{2} \int_{r_0}^{x_1} u_2'^2 dx_1 \quad (5.1)$$

(штрихом обозначена производная по x_1). Для рассматриваемого стержня как тяжелой упругой на изгиб линии

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

На основании метода Ритца согласно (1.4) с учетом (5.1) перемещения при нелинейных колебаниях представляются в виде

$$u_2(x_1, t) = \sum_i q_i(t) \varphi_{2i}(x_1), \quad u_1(x_1, t) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j q_i(t) q_j(t) \psi_{1,ij}(x_1) \quad (5.2)$$

$$\psi_{1,ij} = -\int_{r_0}^{x_1} \varphi_{2i}' \varphi_{2j}' dx_1, \quad \varphi_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ \varphi_{2i} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \psi_{ij} = \begin{Bmatrix} \psi_{1,ij} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Здесь $i, j = 1, \dots, n$ для системы координат Ox_1x_2 , жестко связанной с центральным телом, и $i, j = 0, 1, \dots, n$ для системы координат, связанной с условно затвердевшим стержнем. Задаваемые в безразмерном виде функции $\varphi_{2i}(x_1)$ при $i = 1, \dots, n$ для консольного стержня подчиняются граничным условиям: $\varphi_{2i} = \varphi_{2i}' = 0$ при $x_1 = r_0$; $\varphi_{2i}'' = \varphi_{2i}''' = 0$ при $x_1 = r_0 + l$.

Уравнения нелинейных колебаний (2.9) для случая рассматриваемого вращающегося стержня в связанной с центральным телом системе координат после приведения к безразмерному виду записываются как

$$\begin{aligned} \tilde{J}_0 \frac{d\Omega}{d\tau} + \sum_j \gamma_{0j} \frac{d^2 \bar{q}_j}{d\tau^2} + v_2 2\Omega \sum_j \beta_{0j} \frac{d\bar{q}_j}{d\tau} + v_3 \sum_j \sum_k s_{0,jk} \frac{d\bar{q}_j}{d\tau} \frac{d\bar{q}_k}{d\tau} &= \bar{M}_0(\tau) \\ \gamma_{0i} \frac{d\Omega}{d\tau} + \sum_j \mu_{ij} \frac{d^2 \bar{q}_j}{d\tau^2} - v_2 2\Omega \sum_j s_{ij} \frac{d\bar{q}_j}{d\tau} - \beta_{0i} \Omega^2 + \\ + \sum_j \kappa_{ij} \bar{q}_j &= \bar{Q}_i(\tau) \quad (i = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\tau = tc, \quad \Omega = \omega_3/c, \quad c^2 = EI/(\rho Fl^4), \quad \bar{q}_j = q_j/l$$

$$\begin{aligned} \tilde{J}_0 &= J_0 + v_2 \sum_j \sum_k (\mu_{jk} + \mu_{0,jk}) \bar{q}_j \bar{q}_k, \quad \gamma_{0i} = \\ &= \mu_{0i} + v_2 \sum_j \sum_k \left(\frac{1}{2} \mu_{i,jk} - \mu_{j,ik} \right) \bar{q}_j \bar{q}_k \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\beta_{0i} = \sum_k (\mu_{ik} + \mu_{0,ik}) \bar{q}_k, \quad s_{0,jk} = - \sum_i \mu_{i,jk} \bar{q}_i, \quad s_{ij} = - \sum_k (\mu_{i,jk} - \mu_{j,ik}) \bar{q}_k$$

$$\mu_{ij} = \int_0^1 \varphi_{2i} \varphi_{2j} d\xi, \quad \mu_{0i} = \int_0^1 (\bar{r}_0 + \xi) \varphi_{2i} d\xi$$

$$\mu_{0,i,j} = \int_0^1 (\bar{r}_0 + \xi) \bar{\psi}_{1,i,j} d\xi, \quad \mu_{i,jk} = \int_0^1 \varphi_{2i} \bar{\psi}_{1,jk} d\xi$$

$$\kappa_{ij} = \int_0^1 \frac{d^2 \varphi_{2i}}{d\xi^2} \frac{d^2 \varphi_{2j}}{d\xi^2} d\xi, \quad \bar{\psi}_{1,i,j} = l \psi_{1,i,j} = - \int_0^\xi \frac{d\varphi_{2i}}{d\xi} \frac{d\varphi_{2j}}{d\xi} d\xi$$

$$\bar{r}_0 = \frac{r_0}{l}, \quad \xi = \frac{x_1 - r_0}{l}, \quad J_0 = \frac{J_r}{\rho F l^3} + \frac{1}{3} + \bar{r}_0^2 + \bar{r}_0$$

$$\bar{M}_0(\tau) = \frac{\beta}{EI} \left[\frac{M_r}{l^2} + \int_0^1 (\bar{r}_0 + \xi) p_2 d\xi + v_2 \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \bar{q}_i \bar{q}_j \int_0^1 p_2 \bar{\psi}_{1,i,j} d\xi \right]$$

$$\bar{Q}_i(\tau) = \frac{\beta}{EI} \int_0^1 p_2 \varphi_{2i} d\xi$$

где F , EI — площадь поперечного сечения и изгибная жесткость стержня; J_r , $M_r(t)$ — приведенный момент инерции вала и приложенный к нему момент; $p_2(x_1, t)$ — поперечная погонная нагрузка.

В уравнения (5.3) и выражения для коэффициентов (5.4) введены в качестве признаков множители v_2 и v_3 , которые в общем случае равны единице ($v_2 = v_3 = 1$); в частных случаях для получения упрощенных уравнений путем пренебрежения некоторыми нелинейными членами соответствующие множители, начиная с v_3 , могут быть приравнены к нулю.

Рассмотрим случай, когда система координат Ox_1x_2 связана с затвердевшим вращающимся стержнем. Тогда ее безразмерная угловая скорость Ω определяется из уравнения вращения недеформируемой системы:

$$J_0 \frac{d\Omega}{d\tau} = \frac{\beta}{EI} \left[\frac{M_r}{l^2} + \int_0^1 (\bar{r}_0 + \xi) p_2 d\xi \right] \quad (5.5)$$

при заданной начальной скорости $\Omega(0) = \Omega_0$. При упругих колебаниях стержень совместно с валом поворачивается относительно вращающейся системы координат Ox_1x_2 на конечный угол $\bar{q}_0(\tau)$. Тогда в разложениях (5.2) следует добавить члены при $i = 0$ и $j = 0$:

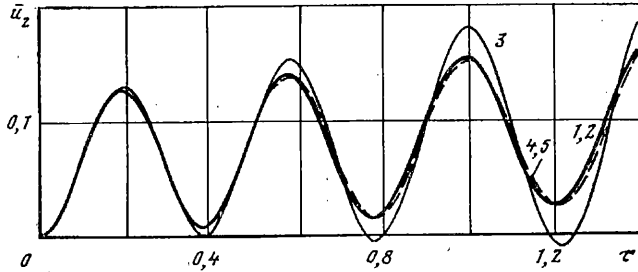
$$q_0 = \bar{q}_0 l, \quad \varphi_{20} = x_1/l = \bar{r}_0 + \xi, \quad \bar{\psi}_{1,00} = -(\bar{r}_0 + \xi), \quad \bar{\psi}_{1,0j} = -\varphi_{2j}$$

Уравнения нелинейных колебаний (2.15) в данном случае приводятся к виду

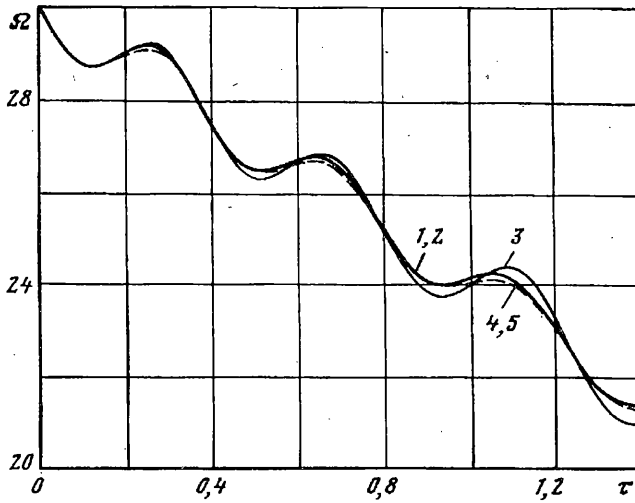
$$\sum_{j=0}^n \left[\mu_{ij} \frac{d^2 \bar{q}_j}{d\tau^2} - v_2 2\Omega s_{ij} \frac{d\bar{q}_j}{d\tau} + \kappa_{ij} \bar{q}_j \right] = \bar{Q}_i(\tau) - \gamma_{0i} \frac{d\Omega}{d\tau} + \beta_{0i} \Omega^2 \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (5.6)$$

Коэффициенты этих уравнений определяются по формулам (5.4); при этом с учетом инерции вращения вала $\mu_{00} = J_0$, $\mu_{0,00} = -J_0$.

Запишем теперь линеаризованные уравнения колебаний вращающегося



Фиг. 4



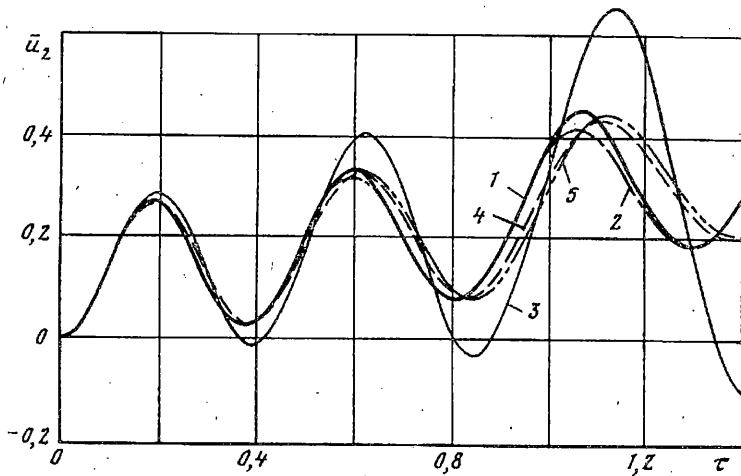
Фиг. 5

стержня. В невозмущенном движении под действием нагрузок $M_r, p_2(x_1, t)$ стержень будем считать абсолютно жестким ($u_2^0 \equiv 0$ и $q_i^0 \equiv 0$). Тогда его угловую скорость $\Omega^0(\tau)$ можно определить из уравнения (5.5) при замене $\Omega \rightarrow \Omega^0$. Затем определяется напряжение в стержне $\sigma_{11}^0 = \rho c^2 \Omega^{02} l^2 \left[\frac{1}{2} (1 - \xi^2) + \bar{r}_0 (1 - \xi) \right]$, необходимое для вычисления Π^1 по формуле (4.4). Перемещения стержня с учетом его поворота вместе с валом на угол \bar{q}_0 ищутся в виде разложений (5.2) при $i = 0, 1, \dots, n$.

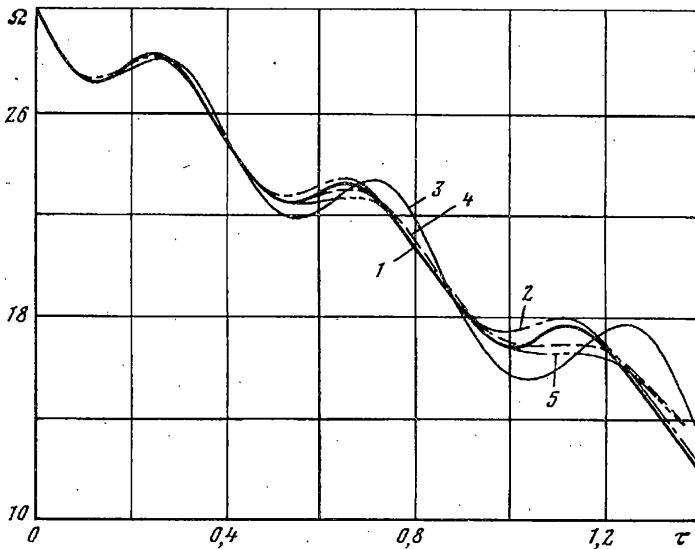
Линеаризованные уравнения возмущенного движения (4.8) в данном случае ($q_i^0 = 0, \dot{q}_i^0 = \dot{q}_i$) записываются в виде

$$\sum_{j=0}^n \left[\mu_{ij} \frac{d^2 \bar{q}_j}{d\tau^2} + (\kappa_{ij} - (\mu_{ij} + \mu_{0,ij}) \Omega^{02}) \bar{q}_j \right] = \bar{Q}_i(\tau) - \mu_{0i} \frac{d\Omega^0}{d\tau} \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (5.7)$$

Эти уравнения могут быть получены непосредственно из уравнений (5.6) путем их линеаризации (полагая $v_2 = 0$). На основании (4.8) можно также записать линеаризованные уравнения колебаний стержня с учетом его искривления в невозмущенном движении. При медленно изменяющихся нагрузках в невозмущенном движении искривление стержня $u_2^0(x_1, t)$ или $q_i^0(t)$ можно определить из решения квазистатической задачи, т. е. при $\dot{q}_i^0 \approx 0, \ddot{q}_i^0 \approx 0$.



Фиг. 6



Фиг. 7

При расчете колебаний вращающегося стержня постоянного сечения в разложениях (5.2) будем использовать две заданных функции ($n = 2$):

$$\varphi_{21}(\xi) = 1/3 (6\xi^2 - 4\xi^3 + \xi^4)$$

$$\varphi_{22}(\xi) = 1/19 (-326\xi^2 + 824\xi^3 - 661\xi^4 + 182\xi^5)$$

Эти функции удовлетворяют всем граничным условиям и ортогональны между собой, а по виду они близки, соответственно, к первой и второй собственным формам колебаний невращающегося консольного стержня постоянного сечения.

Приведем значения коэффициентов (5.4) для этих функций:
 $\mu_{11} = 104/405$, $\mu_{12} = 0$, $\mu_{22} = 16\,952/59\,565$, $\kappa_{11} = 16/5$, $\kappa_{12} = -544/285$; $\kappa_{22} = 264\,944/1805$, $\mu_{01} = (2/5)\bar{r}_0 + 13/45$, $\mu_{02} = -(68/285)\bar{r}_0 - 91/1995$, $\mu_{0,11} = -0,4\bar{r}_0 - 0,301234$, $\mu_{0,12} = -0,116178\bar{r}_0 - 0,186356$, $\mu_{0,22} = -2,55103\bar{r}_0 - 1,84862$,
 $\mu_{1,11} = -0,271605$, $\mu_{1,12} = -0,200907$, $\mu_{1,22} = -1,65665$, $\mu_{2,11} = -0,026250$, $\mu_{2,12} = -0,262505$, $\mu_{2,22} = -0,186453$.

Дифференциальные уравнения колебаний вращающегося стержня под действием постоянного тормозного момента ($M_t = \text{const}$ при $t \geq 0$, $M_t = 0$ при $t < 0$) при начальных условиях $\Omega = \Omega_0$; $q_0 = \dot{q}_0 = q_1 = \dot{q}_1 = q_2 = \dot{q}_2 = 0$ интегрировались численно. При расчетах принято $\bar{r}_0 = 0$; $J_0 = 0,5$; $\Omega_0 = 30$; $p_2 \equiv 0$.

На фиг. 4—7 приведены графики изменения по времени безразмерного прогиба на конце стержня $u_2(l, \tau) = u_2(l, \tau)/l$ и безразмерной угловой скорости $\Omega(\tau)$ при значениях тормозного момента $\bar{M}_0 = lM_t(EI)^{-1}$, равных -3 и -6 . Цифрами на фиг. 4—7 указаны кривые, полученные при использовании следующих уравнений движения стержня с учетом их упрощений: 1 — уравнения (5.3) при $v_2 = v_3 = 1$; 2 — (5.3) при $v_2 = 1$, $v_3 = 0$; 3 — (5.3) при $v_2 = v_3 = 0$; 4 — уравнения (5.6) при $v_2 = 1$; 5 — линеаризованные уравнения (5.7) или, то же самое, уравнения (5.6) при $v_2 = 0$. При использовании уравнений (5.6) и (5.7) угловая скорость вала определялась как $\Omega(\tau) = \Omega_0 + \bar{M}_0\tau/J_0 + dq_0/dt$.

Сравнение результатов показывает, что в пределах применимости рассматриваемой нелинейной теории изгиба неэластичного стержня влияние нелинейных членов третьего порядка в уравнениях (5.3) при $v_3 = 1$ является несущественным и этими членами можно пренебречь, положив $v_3 = 0$. Однако влияние квадратичных членов в уравнениях (5.3) при $v_2 = 1$ значительно, что видно по кривым 3, которые получены без учета этих членов (при $v_2 = 0$). Интересно, что влияние квадратичных членов в уравнениях (5.6) при $v_2 = 1$ оказывается незначительным; если этими членами пренебречь, положив $v_2 = 0$, то полученные линеаризованные уравнения дают близкие результаты (кривые 4 и 5). Зависимости для угла поворота на конце стержня $u_2'(l, \tau)$ по виду аналогичны соответствующим зависимостям $\bar{u}_2(l, \tau)$. Несмотря на то, что при $\bar{M}_0 = -6$ прогибы стержня достаточно велики, углы поворота элементов его изогнутой оси в диапазоне $0 \leq \tau \leq 1,4$ остаются конечными: например, на основании уравнений (5.3) при $v_2 = v_3 = 1$, $n = 2$ максимальные значения $u_2(l, \tau)$ и $u_2'(l, \tau)$ при $\tau \approx 1,07$ равны соответственно $0,45$ и 26° .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-16490).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
2. Докучаев Л. В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. М.: Машиностроение, 1987. 232 с.
3. Meirovich L., Quinn R. D. Equations for Maneuvering Flexible Spacecraft//J. Guidance, Control and Dynamics. 1987. V. 10. No. 5. P. 453—465 (русский перевод: Аэрокосмическая техника, 1988. No. 5. С. 82—96).
4. Bilimoria K. D., Schmidt D. K. An Integrated Development of the Equations of Motion for Elastic Hypersonic Flight Vehicles//AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Hilton Head Island, S. C., Aug. 10—12. 1992: Collect. Techn. Pap., Pt. 3 — Washington (D. C.). 1992. P. 1334—1346.
5. Mah H. W., Modi V. J., Morita Y. A Relatively General Formulation for Studying Dynamics of the Space Station Based MRMS with Applications//AIAA. Pap., 1998. No. 1. P. 1—9.
6. Agrawal O. P. General Approach to Dynamic Analysis of Rotorcraft//J. Aerospace Engineering. 1991. V. 4. No. 674. P. 91—107.
7. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. М.: Гостехиздат, 1948. 211 с.