

УДК 539.3:534.1

© 1996 г. Е. Б. КУЗНЕЦОВ

КРИТЕРИАЛЬНЫЙ ПОДХОД ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОЩЕЛКИВАНИЯ ПАНЕЛИ

Обсуждаются наиболее известные критерии, позволяющие оценить значение наименьшей динамической нагрузки, вызывающей прощелкивание механической системы типа фермы, арки, оболочки.

Критерий прощелкивания, предложенный ранее, проверяется на примере пологой прямоугольной панели двоякой кривизны. Отличие результатов, полученных при помощи критериального подхода, от результатов, полученных при численном интегрировании уравнений движения панели, когда на нее действует ступенчатая динамическая нагрузка, находятся в пределах точности, допустимой в инженерных расчетах.

1. Если при статическом нагружении упругих конструкций существуют общепринятые критерии устойчивости, то критерии динамической устойчивости определены не так четко. В [1] отмечается, что «устойчивость при динамическом нагружении подобна понятиям, обозначающим для различных людей различные вещи... К критерию, который был бы как логичен, так и приемлем с практической точки зрения, не легко прийти».

Рассмотрим некоторые критерии динамической устойчивости упругих систем, обладающих возможностью прощелкивать. Не будем касаться такого нагружения конструкции, когда существенны процессы распространения продольных волн. Не будем также рассматривать нагрузки, изменяющиеся во времени по периодическому закону.

Хотя современный уровень развития вычислительной техники позволяет исследовать динамическое поведение большинства механических систем при помощи метода полного интегрирования, состоящего в полном решении уравнений возмущенного движения для всех классов возмущений, но как отмечено в [2], этот путь обременителен в математическом отношении и не состоятелен с практической точки зрения, ибо бессмысленно требовать от инженера сведений о величине всех возмущающих воздействий.

По-видимому, впервые критерий устойчивости при динамическом нагружении предложен в [3]. В ней исследуется динамическое прощелкивание пологой арки синусоидальной формы с шарнирно опертыми концами. На арку действует распределенная нагрузка, изменяющаяся вдоль оси по закону синуса. Решение нелинейных уравнений движения, при составлении которых учитывались только силы инерции в поперечном направлении, отыскивалось в тригонометрических рядах в двучленном приближении (W_1 — симметричная и W_2 — антисимметричная составляющие).

При действии на арку нагрузки, изменяющейся во времени по закону ступенчатой функции Хевисайда, был сформулирован следующий критерий прощелкивания: в случае критического нагружения контур потенциальной энергии системы на плоскости переменных $W_1 - W_2$, проходящий через точку, определяемую начальными условиями, проходит также через точку типа седла. При действии на арку короткого импульса, критический импульс определялся

из условия равенства начальной кинетической энергии системы потенциальной, соответствующей седловой точке.

Динамическая устойчивость пологой свободно опертой цилиндрической панели, сжатой вдоль образующих постоянными усилиями, на которую действуют равномерное давление, изменяющееся во времени по экспоненциальному закону, исследовалась в [4]. Нелинейные уравнения движения панели интегрировались при помощи метода Бубнова — Галёркина в одночленном приближении численно. Под критическим импульсом давления понимался наибольший импульс, при котором не происходит прощелкивания панели к новому положению равновесия.

В [5] был предложен критерий динамического осесимметричного выпучивания для пологих сферических оболочек, который нашел широкое применение.

Решение динамической задачи при учете только сил инерции от прогиба отыскивалось при помощи метода Бубнова — Галёркина в пятичленном приближении и численного интегрирования. Изучалась реакция пологих защемленных оболочек на прямоугольный импульс давления некоторых интервалов амплитуд нагрузки и различных длительностей нагружения. Под критической нагрузкой динамического хлопка понимается такая, вблизи которой происходит «переход от умеренной деформации к значительной». Под мерой деформации понималась безразмерная величина

$$\Delta = \int_0^{r_0} r w dr / \int_0^{r_0} r \xi d\xi$$

где w — прогиб оболочки, r — полярный радиус, r_0 — радиус основания сферического сегмента, $\xi(r)$ — функция, описывающая форму недеформированной оболочки.

По-видимому, впервые динамическая неосесимметричная потеря устойчивости цилиндрической оболочки рассмотрена в [6]. Рассматривалась бесконечная упругая оболочка под действием почти осесимметричного импульса внешнего давления. Заданная в начальный момент радиальная скорость, имеющая некоторую неоднородность по углу, вызывает изгибное движение оболочки вследствие взаимодействия мембранного напряжения с изгибным. Энергия изгибного движения оболочки черпается из энергии осесимметричных колебаний, т. е. происходят параметрические колебания. Проблема сводится к исследованию устойчивости решений системы дифференциальных уравнений типа Матье. Такой подход, основанный на общей теории устойчивости движения, в дальнейшем нашел широкое применение в работах других авторов.

Энергетический критерий устойчивости оболочек при динамическом нагружении их равномерным внешним внезапно приложенным давлением был предложен в [7]. Оболочка рассматривалась как механическая система, имеющая одну степень свободы. В этом случае на фазовой плоскости имеется многопараметрическое (параметр — амплитуда нагрузки) семейство замкнутых кривых. Сепаратриса отделяет движение вокруг одного из устойчивых положений равновесия от движений охватывающих более одного положения равновесия. Значение параметра нагрузки, которому соответствует превращение интегральной кривой в сепаратрису, называют критическим.

Проблема динамической устойчивости упругих тел при очень короткой импульсной нагрузке изучалась в [8]. Рассматривалось движение с диссипацией. Демпфирующие силы являлись функциями только скоростей. Введя понятие района, т. е. такой окрестности точки P статического равновесия механической системы, все точки которого обладают свойствами: траектория, начинающаяся в районе, стремится в точку P при $t \rightarrow \infty$, необходимые и достаточные условия устойчивости формулируются следующим образом: система устойчива тогда и только тогда, когда ее начальное состояние принадлежит району. Но при исследовании устойчивости наиболее удобным оказался достаточный критерий. В окрестности начальной точки статического равновесия строятся поверхности с

возрастающими значениями полной механической энергии до тех пор, пока одна из них не коснется соседней критической точки. Тогда система будет устойчивой, если ее начальное состояние принадлежит району, ограниченному этой поверхностью.

В [9] исследовалась задача об определении критического импульса внешнего давления q , действующего в течение малого времени τ , для цилиндрической оболочки конечной длины, находящейся под действием осевого сжатия и внешнего давления q_0 . Комбинация величин q , τ , q_0 , при которой оболочка не восстанавливает первоначальную форму, называлась критической. Исследование проводилось энергетическим методом, а оболочка моделировалась механической системой с одной степенью свободы.

Исследуя динамическое осесимметричное прощелкивание сферических куполов под действием внезапно приложенного внешнего давления бесконечной продолжительности, в [10] показано, что критическая нагрузка может находиться между минимально возможной критической нагрузкой и гарантированной критической нагрузкой, которая определяется как нагрузка квазистатического нагружения и соответствует случаю, когда невозможно не критическое движение. Критерий определения минимально возможной критической нагрузки аналогичен достаточному критерию [8].

В [11—12] на основании энергетических соображений сформулирован критерий динамического прощелкивания¹. В этих работах также указано на явление запаздывания прощелкивания.

Рассмотрим этот критерий на примере системы с одной степенью свободы — ферме Мизеса. Пусть к ее центральному узлу приложена сила, изменяющаяся во времени по ступенчатому закону. Статическая диаграмма нагрузка (p) — прогиб (f) для центрального узла фермы Мизеса приводится на фиг. 1. Если $p = p_a \ll p_0$, то ферма совершает колебания в небольшой окрестности положения равновесия $f_1(p_a)$. По мере увеличения p_a ферма при колебаниях все ближе подходит к неустойчивому положению равновесия $f_2(p_a)$. Очевидно, что при некотором значении $p_a = p_*$ ферма придет в точку $f_2(p_a)$ с нулевой скоростью. Эта величина p_* и будет критической нагрузкой прощелкивания, т. е. наибольшей динамической нагрузкой, невызывающей хлопка.

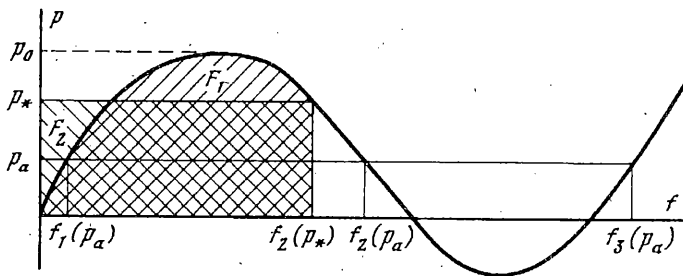
Таким образом, значение p_* характеризуется тем, что приводит ферму в положение неустойчивого равновесия с нулевой скоростью, т. е. вся работа, совершенная силой p_* на перемещении $f_2(p_*)$ перешла в энергию деформации фермы

$$p_* f_2(p_*) = \int_0^{f_2(p_*)} p(f) df \quad (1.1)$$

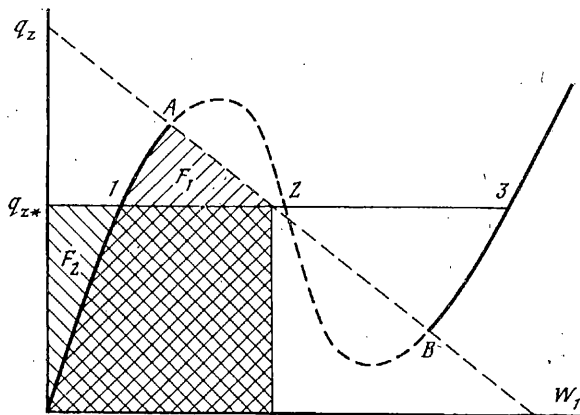
Геометрически это выражение определяет равенство площадей F_1 и F_2 на фиг. 1. При изучении механической системы, имеющей две степени свободы, было обнаружено явление запаздывания, которое заключается в том, что механическая система перед прощелкиванием совершает некоторое число колебаний и прощелкивание наступает в тот момент, когда совпадают экстремумы форм колебаний. В этот момент вся энергия переходит в энергию деформации системы.

На примере полой упругой арки синусоидальной формы сформулируем критерий динамического прощелкивания для механической системы с двумя степенями свободы (W_1, W_2). Используем уравнения статического равновесия арки, полученные в [13]. Прогиб арки аппроксимируется двумя членами. Нагрузка

¹ См. также: Кузнецов Е. Б., Кулаков Н. А., Шалашилин В. И. О некоторых особенностях поведения фермы Мизеса и полой арки при действии динамических нагрузок // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 3. С. 183—184.



Фиг. 1



Фиг. 2

q_z прикладывается к арке по закону ступенчатой функции Хевисайда. На фиг. 2 штриховая прямая определяет обратносимметричное прощелкивание. Положения равновесия 1 и 3 — устойчивые, а 2 — неустойчивое, однако в нем неустойчивость определяется обратносимметричной составляющей прогиба W_2 . Критическим движением арки будет такое, при котором она придет в положение 2 с нулевыми скоростями по обеим формам, а значит, и с нулевыми значениям кинетической энергии. Поэтому будет иметь место условие (1.1), которое означает равенство площадей F_1 и F_2 на фиг. 2.

Данный критерий проверялся при помощи численных расчетов на ЭВМ. При этом выявилась особенность критического движения, выражающаяся в запаздывании прощелкивания и позволяющая сформулировать правило для определения наименьшего времени интегрирования уравнений движения $t = t_*$. Если в момент $t = t_*$ совпали экстремумы прямой и обратносимметричной форм колебаний, а прощелкивание не наступило, то оно уже не наступит и при $t > t_*$.

В [14] на примере упругой круговой арки с защемленными концами, подвергающейся воздействию сосредоточенной силы, изменяющейся по ступенчатому закону, на основании энергетического подхода сформулирован критерий динамической устойчивости, состоящей в исследовании уровней полной потенциальной энергии системы при различных значениях нагрузки.

Если на диаграмме нагрузка-прогиб построить кривую, соответствующую максимальной динамической реакции при действии мгновенно приложенной нагрузки, то точка пересечения этой кривой с диаграммой нагрузка-прогиб определяет усилие, при котором в системе произойдет прощелкивание.

Для системы со многими степенями свободы потенциальная энергия представляет собой уже многосвязную область в пространстве обобщенных

координат. В этом случае энергетическим методом нельзя найти единственную критическую нагрузку, но можно найти нижнюю и верхнюю границы.

В [15] был предложен следующий критерий устойчивости: если в некоторый момент упругому телу можно дать возмущение, не изменяя в этот момент скоростей и ускорений всех точек тела (такое возмущение выражается только в изменении поля перемещений), то по определению в этот момент времени деформация упругого тела является неустойчивой. В противном случае деформация считается устойчивой. По мнению автора, такое определение физически оправдано тем, что, если в момент $t = t_0$ деформация тела является неустойчивой в указанном смысле, то добавление к действующей нагрузке в пределах малого интервала времени $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$ незначительного силового воздействия или импульса может существенно изменить на протяжении этого интервала времени конфигурацию тела, придав ему возможную возмущенную форму.

Следует отметить немногочисленные работы, в которых проблема прощелкивания исследовалась с позиций прямого метода Ляпунова и теории катастроф. Так в [16] при помощи прямого метода Ляпунова на фазовой плоскости строились области влияния, находясь в которых система будет иметь устойчивое движение. В [17], используя прямой метод Ляпунова, исследовалось прощелкивание упругой арки, на которую действует нагрузка, изменяющаяся во времени по закону дельта-функции Дирака или ступенчатой функции Хевисайда. Определялись параметры системы, приводящие к прощелкиванию.

Прощелкивание фермы Мизеса с позиций теории катастроф изучалось в [18].

Представленное краткое обсуждение позволяет сделать выводы как о многочисленности подходов, так и об общности критериев, в основе которой, как правило, лежат энергетические оценки.

2. Используя критерий, предложенный в [11—12], изучим динамическое прощелкивание прямоугольной в плане полой оболочки двойкой кривизны, на которую действует равномерное внезапно приложенное давление, изменяющееся во времени по закону ступенчатой функции Хевисайда. Воспользуемся нелинейными уравнениями статического деформирования панели, полученными в [19], которые можно трактовать как обобщение одномерных уравнений [20] на пластины и оболочки

$$\nabla^2 \nabla^2 W - \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = Q + \alpha k_x + \beta k_y \quad (2.1)$$

где W — прогиб панели, отнесенный к ее толщине h ; значения других безразмерных параметров приводятся в [19].

Предполагая, что края оболочки закреплены по нормальным к контуру тангенциальным перемещениям, получаем еще два уравнения

$$\alpha - \mu\beta + \nu k_x \int_0^\psi \int_0^1 W dx dy - \frac{\nu}{2} \int_0^\psi \int_0^1 \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dx dy = 0 \quad (2.2)$$

$$\beta - \mu\alpha + \nu k_y \int_0^\psi \int_0^1 W dx dy - \frac{\nu}{2} \int_0^\psi \int_0^1 \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 dx dy = 0$$

где μ — коэффициент Пуассона, $\psi = b/a$, $\nu = 12(1 - \mu^2)/\psi$, a , b — длины панели вдоль осей x и y .

В [19] получено решение для прямоугольной в плане шарнирно опертой оболочки, которое отыскивалось в виде

$$W = \sum_{i,j=1}^{\infty} W_{ij} \sin(i\pi x) \sin\left(\frac{j\pi y}{\psi}\right) \quad (2.3)$$

и содержало, в силу равномерности нагрузки, только нечетные гармоники. После

подстановки (2.3) в (2.1) легко заметить, что четные компоненты прогиба W должны удовлетворять равенствам (i или j четные):

$$[(I^2 + J^2)^2 + \alpha I^2 + \beta J^2] W_{ij} = 0 \quad (2.4)$$

$$I = \pi i, \quad J = \pi j / \psi$$

Если предположить, что $W_{ij} \neq 0$, то для выполнения равенств (2.4) следует положить

$$(I^2 + J^2)^2 + \alpha I^2 + \beta J^2 = 0 \quad (2.5)$$

Для квадратной в плане панели равной кривизны имеем $a = b$, $\psi = 1$, $k_x = k_y = k$. Из анализа соотношений (2.2) следует, что $\alpha = \beta$ и равенства (2.5) примут вид: $\pi^2 (i^2 + j^2) + \alpha = 0$. Поэтому обратносимметричному прощелкиванию ($i = 1, j = 2$ или $i = 2, j = 1$) отвечает значение распора $\alpha = -5\pi^2$. Если это значение распора подставить в выражение для прогиба w_0 в центре панели

$$w_0 = \frac{16 (q + 2\alpha)}{\pi^4} \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{\sin (i\pi/2) \sin (j\pi/2)}{ij (i^2 + j^2) m_{ij}(\alpha)} \quad (2.6)$$

$$m_{ij}(\alpha) = \pi^2 (i^2 + j^2) + \alpha, \quad w_0 = W_0/k, \quad q = Q/k$$

то получим уравнение

$$w_0 = 0,296 - 0,003q \quad (2.7)$$

задающее на плоскости переменных w_0, q прямую, показанную на фиг. 3 и определяющую обратносимметричное прощелкивание панели.

Здесь и далее звездочка у знака суммы означает, что при суммировании индексы принимают только нечетные значения. При получении выражения (2.7) суммирование в (2.6) проводилось до значения равного 7. Суммирование до больших значений не приводило к уточнению коэффициентов в формуле (2.7).

Для того, чтобы получить зависимость $w_0 - q$ в общем случае, необходимо найти связь между распором α и нагрузкой q . Эта связь может быть определена после подстановки в соотношения (2.2) представления (2.3), в котором компоненты прогиба $w_{ij} = W_{ij}/k$ получены из решения уравнения (2.1). Для квадратной панели зависимость $\alpha - q$ примет вид

$$cS_1(\alpha) (q + 2\alpha)^2 - 2cS_2(\alpha) (q + 2\alpha) - \alpha = 0 \quad (2.8)$$

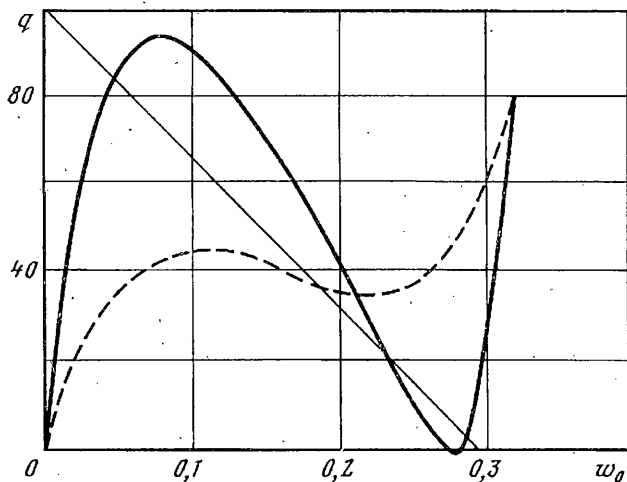
$$S_1(\alpha) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2 (i^2 + j^2)^2 m_{ij}^2(\alpha)}, \quad S_2(\alpha) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{1}{i^2 j^2 (i^2 + j^2) m_{ij}(\alpha)}$$

$$c = 384 (1 + \mu) k^2 / \pi^6$$

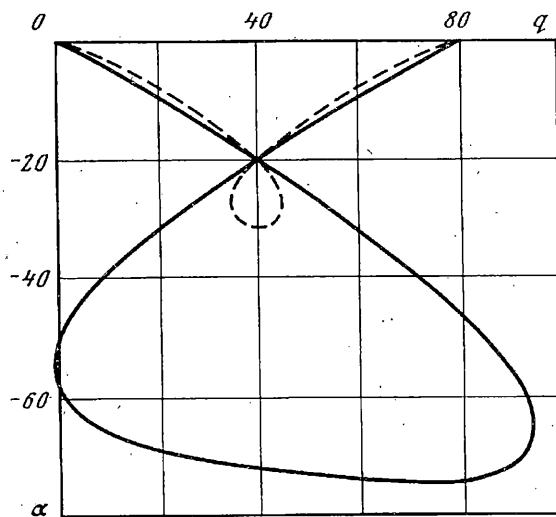
В [19] зависимость $\alpha - q$ определялась из уравнения (2.8), которое решалось относительно q для заданных значений распора α . Это приводило к трудностям, связанным с согласованием ветвей зависимости $\alpha - q$ и неопределенностью области изменения распора α .

Построим зависимость $\alpha - q$ методом продолжения решения по параметру, выбрав в качестве параметра наилучший [21], которым будет длина дуги λ , вычисляемая вдоль кривой $\alpha - q$. Считая q и α функциями параметра λ , уравнения продолжения получим, дифференцируя равенство (2.8) относительно λ и принимая во внимание смысл этого параметра

$$(1 + 4cS_2 + 2cS_{2,\alpha}\xi - 4cS_1\xi - cS_{1,\alpha}\xi^2) d\alpha/d\lambda + 2c(S_2 - S_1\xi) dq/d\lambda = 0 \quad (2.9)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

$$(d\alpha/d\lambda)^2 + (dq/d\lambda)^2 = 1$$

$$S_{1,\alpha} = -2 \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{1}{f^2 (i^2 + j^2)^2 m_{ij}^3(\alpha)}, S_{2,\alpha} = - \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{1}{i^2 j^2 (i^2 + j^2) m_{ij}^2(\alpha)}$$

$$\zeta = q + 2\alpha$$

Для преобразования системы (2.9) к нормальной форме Коши решаем ее относительно производных, представив последнее уравнение системы в виде

$$\left(\frac{d\alpha}{d\lambda}\right)^* \frac{d\alpha}{d\lambda} + \left(\frac{dq}{d\lambda}\right)^* \frac{dq}{d\lambda} = 1 \quad (2.10)$$

где звездочкой помечены производные, полученные на предыдущем шаге процесса интегрирования. Очевидно, что полученный при этом вектор $z = (\alpha, \lambda; q, \lambda)^T$ в силу первого уравнения (2.9) будет касательным к кривой $\alpha - q$. Для того,

чтобы он стал единичным, т. е. удовлетворил второму уравнению системы (2.9), его следует нормировать

$$\alpha_{,\lambda}^n = \left(\frac{d\alpha}{d\lambda} \right)^n = \frac{\alpha_{,\lambda}}{N}, \quad q_{,\lambda}^n = \left(\frac{dq}{d\lambda} \right)^n = \frac{q_{,\lambda}}{N} \quad (2.11)$$

$$N = (\alpha_{,\lambda}^2 + q_{,\lambda}^2)^{1/2}$$

В соответствии с изложенным алгоритмом была разработана программа вычислений, в которой система линейных уравнений, состоящая из первого уравнения (2.9) и уравнения (2.10) решалась методом Гаусса, а система обыкновенных дифференциальных уравнений интегрировалась методом Рунге — Кутты или при помощи программы РС1 [22] с учетом нормировки (2.11) при начальных условиях $\alpha(0) = q(0) = 0$.

Так как начальная точка не является предельной, то начальное значение вектора z принималось в виде $z = (0, 1)^T$. При проведении вычислений суммирование проводилось до значения $m = 7$. Однако результаты, полученные при $m = 3, 5, 7$, практически не отличались.

На фиг. 4 приводятся зависимости, полученные для $k = 15$ — сплошная кривая и $k = 8$ — штриховая.

Отметим, что точка самопересечения кривой $\alpha - q$, имеющая координаты $\alpha = -2\pi^2$, $q = 4\pi^2$, является особой. В ней определитель системы (2.9), (2.10) вырождается. Прохождение этой точки осуществлялось следующим образом: в ее малой окрестности радиуса 0,1 функции $\alpha(\lambda)$ и $q(\lambda)$ линеаризовались, т. е. представлялись в виде: $\alpha(\lambda) = -2\pi^2 + \alpha_{,\lambda}\Delta\lambda$, $q(\lambda) = 4\pi^2 + q_{,\lambda}\Delta\lambda$ и первое уравнение системы (2.9) принимало вид

$$4(c - 2\pi^2)\alpha_{,\lambda} - c\xi q_{,\lambda} = 0$$

$$\xi = q_{,\lambda}^*/\alpha_{,\lambda}^*; \quad q_{,\lambda} = dq/d\lambda; \quad \alpha_{,\lambda} = d\alpha/d\lambda$$

Найденная зависимость $\alpha - q$ позволила, используя выражение (2.6), построить кривую нагрузка q — прогиб w_0 в центре панели. Кривые приводятся на фиг. 3. Сплошная кривая соответствует значению $k = 15$, а штриховая — $k = 8$.

Наличие этих кривых позволяет на основании критерия, предложенного в [11—12], определить величину критической нагрузки прощелкивания панели под действием ступенчатого импульса давления. Панель с параметром кривизны $k = 15$ прощелкивает «симметрично» (по одной полуволне синусоиды $i = j = 1$) при наименьшем давлении $q_* = 76$, а обратнoсимметричное прощелкивание (по двум полуволнам $i = 1, j = 2$ или $i = 2, j = 1$) происходит при $q_* = 66,5$.

Панель с $k = 8$ прощелкивает только симметрично ($i = j = 1$) при наименьшей нагрузке $q_* = 36$.

Анализ выражения (2.8) показывает, что не всякая панель обладает способностью прощелкиваться. Для реализации прощелкивания необходимо выполнение условия

$$S_2^2 + \alpha S_1/c > 0 \quad \text{при} \quad \alpha = -2\pi^2 \quad (2.12)$$

Избавляясь от особенностей в суммах S_1 и S_2 , легко показать, что условие (2.12) будет выполнено при $c > 2\pi^2$, т. е., если параметр кривизны панели удовлетворяет неравенству $k > 6,29$. Это значение параметра k соответствует прощелкиванию по одной полуволне ($i = j = 1$). Для того, чтобы панель имела возможность прощелкнуться по трем полуволнам ($i = 1, j = 3$; $i = 3, j = 1$) условие (2.12) должно выполняться при $\alpha = -10\pi^2$. Этому случаю соответствует неравенство $c > 225\pi^2$, т. е. параметр кривизны панели должен удовлетворять условию $k > 66,7$.

Наконец, интересно знать, при каком значении параметра кривизны возможно

обратносимметричное прощелкивание ($i = 1, j = 2$ или $i = 2, j = 1$). Данным значениям индексов i, j соответствует значение распора $\alpha = -5\pi^2$. Кривая $\alpha - q$ должна в предельном случае касаться прямой с таким уравнением. Поэтому в точке касания должно выполняться равенство $d\alpha/d\lambda = 0$. Из системы уравнений продолжения (2.9) следует, что в этом случае выражение, стоящее при $dq/d\lambda$, обращается в нуль, т. е. $S_2 - S_1(q + 2\alpha) = 0$ и нагрузка $q = S_2/S_1 + 10\pi^2$ при $\alpha = -5\pi^2$. Если это значение нагрузки и значение распора $\alpha = -5\pi^2$ подставить в соотношение (2.8), то получаем уравнение, из которого определяется предельное значение коэффициента $c = 5\pi^2 S_1/S_2 = 5,36\pi^2$.

Таким образом, обратносимметричное прощелкивание панели возможно, если параметр кривизны ее удовлетворяет неравенству $k > 10,3$.

Отметим, что все значения параметра кривизны подсчитывались для панели, изготовленной из материала с модулем Пуассона $\mu = 0,25$.

3. Полученные значения критических нагрузок проверялись при помощи полного интегрирования уравнений движения пологой оболочки, которые получаются, если в уравнении (2.1) учесть инерционный член, соответствующий прогибу W :

$$\nabla^2 \nabla^2 W - \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = Q + \alpha k_x + \beta k_y - \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}$$

$$\tau = \frac{t}{a} \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{1/2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \quad (3.1)$$

где t — время, ρ — плотность, E — модуль упругости материала оболочки.

В каждый момент времени функции $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$ удовлетворяют системе (2.2).

Решение системы (3.1), (2.2) отыскиваем в виде (2.3), где неизвестные W_{ij} являются функциями безразмерного времени τ . После подстановки (2.3) в (3.1), (2.2) получаем

$$\frac{d^2 W_{ij}}{d\tau^2} = \frac{16}{\pi^2} (Q + \alpha k_x + \beta k_y) \frac{\psi}{ij} \delta_{ij} -$$

$$- \pi^2 \left[\alpha i^2 + \beta \frac{j^2}{\psi^2} + \pi^2 \left(i^2 + \frac{j^2}{\psi^2} \right)^2 \right] W_{ij} \quad (3.2)$$

$$\delta_{ij} = 1 \text{ (} i \text{ и } j \text{ нечетные)}, \quad \delta_{ij} = 0 \text{ (} i \text{ или } j \text{ четные)}$$

$$\alpha - \mu\beta + \frac{4\nu\psi k_x}{\pi^2} \sum_{i,j=1,\infty} \frac{W_{ij}}{ij} - \frac{\nu\psi\pi^2}{8} \sum_{i,j=1,\infty} i^2 W_{ij}^2 = 0 \quad (3.3)$$

$$\beta - \mu\alpha + \frac{4\nu\psi k_y}{\pi^2} \sum_{i,j=1,\infty} \frac{W_{ij}}{ij} - \frac{\nu\pi^2}{8\psi} \sum_{i,j=1,\infty} j^2 W_{ij}^2 = 0$$

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений (3.2) с учетом соотношений (3.3) следует интегрировать при начальных условиях $W_{ij} = dW_{ij}/d\tau = 0$ при $\tau = 0$.

В случае квадратной в плане оболочки, переходя к значениям $w_{ij} = W_{ij}/k$, $q = Q/k$, уравнения (3.2), (3.3) преобразуются к виду

$$\frac{d^2 w_{ij}}{d\tau^2} = (q + 2\alpha) \frac{16}{\pi^2 i^2 j^2} \delta_{ij} - \pi^2 (i^2 + j^2) [\alpha + \pi^2 (i^2 + j^2)] w_{ij}$$

$$\alpha = 3k^2 (1 + \mu) \left(\frac{\pi^2}{2} \sum_{i,j=1,\infty} i^2 w_{ij}^2 - \frac{16}{\pi^2} \sum_{i,j=1,\infty} \frac{w_{ij}}{ij} \right) \quad (3.4)$$

Систему уравнений (3.4) следует интегрировать при начальных условиях ($\tau = 0$):

$$w_{ij} = dw_{ij}/d\tau = 0 \quad (3.5)$$

Индексы i, j пробегает значения от 1 до некоторого конечного m , до которого также происходит суммирование. При численных расчетах значение прогиба w_0 панели в центре определялось по формуле

$$w_0(\tau) = \sum_{i,j=1}^m w_{ij}(\tau) \sin \frac{i\pi}{2} \sin \frac{j\pi}{2}$$

После применения λ — преобразования [23] задача Коши (3.4), (3.5) интегрировалась численно при помощи программы метода прогноза — коррекции, разработанной в соответствии с формулами и алгоритмом, предложенным в [24], а также при помощи программы РС1 [22] и метода Рунге — Кутты. Численные результаты, полученные посредством этих программ, практически не отличались, но время счета по методу Рунге — Кутты было существенно большим. Для того, чтобы реализовать обратносимметричное прощелкивание, начальные значения w_{12} и w_{21} принимались равными $w_{12} = w_{21} = 10^{-3}$. Согласно правилу, сформулированному в [11—12], вычисления проводились до совпадения экстремумов прямой и обратносимметричной форм колебаний. Были получены следующие результаты. Для панели с параметром кривизны $k = 15$ критическая нагрузка симметричного прощелкивания составила значение $q_* = 79,3$, а обратносимметричного прощелкивания $q_* = 69,9$. Для панели с параметром кривизны $k = 8$ критическая нагрузка прощелкивания $q_* = 36,2$. Результаты, полученные при $m = 5, 7, 9$, не отличались, поэтому при проведении численных расчетов принималось $m = 7$.

Анализ полученных результатов показывает, что критические нагрузки прощелкивания, найденные с использованием критерия [11—12], без интегрирования уравнений движения оболочки, не более чем на 5% отличаются от критических нагрузок, полученных путем интегрирования уравнений движения.

Отметим одну особенность применения λ -преобразования к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (3.4), описывающих движение панели. При увеличении начального шага интегрирования наступает момент, когда программа РС1 для непреобразованной системы уравнений не может выбрать требуемый по точности шаг и происходит переполнение памяти ЭВМ. После применения к системе уравнений λ -преобразования таких проблем не возникало и вычислительный процесс протекал успешно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stoker J. J.* Stability of continuous systems//Dynamic stability of Structure. Oxford: Pergamon Press, 1967. P. 45—52.
2. *Болотин В. В.* О понятии устойчивости в строительной механике//Проблемы устойчивости в строительной механике. М.: Стройиздат, 1965. С. 6—27.
3. *Hoff N. J., Bruce V. G.* Dynamic analysis of the buckling of laterally loaded flat arches//J. Math. and Phys. 1954. V. 32. № 4. P. 276—288.
4. *Болотин В. В., Бойченко Г. А., Макаров В. П., Судакова Н. И., Швейко Ю. Ю.* О потере устойчивости тонких упругих оболочек под действием импульсной нагрузки//Строит. механика и расчет сооружений. 1959. № 2. С. 9—16.
5. *Budiansky B., Roth R. S.* Axisymmetric dynamic buckling of clamped shallow spherical shells//NASA TN. 1962. № D—1510. P. 597—606.
6. *Goodier J. N., Mcivor I. K.* The elastic cylindrical shell under nearly uniform radial impulse//Trans. ASME ser. E. J. Appl. Mech. 1964. V. 31. № 2. P. 259—266.

7. Шкутин Л. И. Устойчивость упругих оболочек вращения при внезапно приложенном давлении//Проблемы устойчивости в строительной механике. М.: Стройиздат, 1965. С. 347—354.
8. Hsu C. S. On dynamic stability of elastic bodies with prescribed initial conditions//Intern. J. Engng. Sci. 1966. V 4. № 1. P. 1—21.
9. Погорелов А. В. Геометрическая теория устойчивости оболочек. М.: Наука, 1966. 296 с.
10. Simitses G. J. Axisymmetric dynamic snap-through buckling of shallow spherical caps//AIAA Journal. 1967. V. 5. № 5. P. 1019—1021.
11. Шалашилин В. И., Кулаков Н. А., Кузнецов Е. Б., Ефанов В. В. О некоторых особенностях поведения упругих систем с прощелкиванием при действии динамических нагрузок//Прочность, конструирование, материалы: Тр. МАИ. 1971. Вып. 237. С. 3—24.
12. Кузнецов Е. Б., Кулаков Н. А., Шалашилин В. И. О действии динамических нагрузок на некоторые упругие системы с прощелкиванием//Избранные проблемы прикладной механики. М.: ВИНТИ, 1974. С. 439—443.
13. Григолоук Э. И. К расчету устойчивости пологих арок//Инж. сб. 1951. Т. 9. С. 177—200.
14. Cheung M. C., Babcock C. D. An energy approach to the dynamic stability of arches//Trans. ASME ser. E. J. Appl. Mech. 1970. V. 37. № 4. P. 1012—1018.
15. Даревский В. М. Устойчивость оболочки при динамической нагрузке//Проблемы механики твердого деформируемого тела. Л.: Судостроение, 1970. С. 149—160.
16. Rizzi P., Hagedorn P. Die Behandlung dynamischer Durchschlagprobleme mit der direkten Ljapunowschen Methode//ZAMP. 1972. V. 23. № 5. P. 852—857.
17. Григолоук Э. И., Кузнецов Е. Б. Исследование прощелкивания арки при помощи функции Ляпунова//Исследование задач устойчивости и колебаний и их приложения в динамике летательных аппаратов. М.: Изд-во МАИ, 1980. С. 80—84.
18. Кузнецов Е. Б. Применение теории катастроф к исследованию прощелкивания механических систем//Аналитические и численные методы исследования механических систем. М.: Изд-во МАИ, 1989. С. 17—20.
19. Кузнецов Е. Б., Князев Э. Н., Пухлий В. А., Шалашилин В. И. Об одном подходе к анализу нелинейного деформирования прощелкивающих пологих оболочек//Изв. РАН. МТТ. 1994. № 2. С. 109—115.
20. Бубнов И. Г. Труды по теории пластин. М.: Гостехиздат, 1953. 424 с.
21. Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б. Наилучший параметр продолжения решения//Докл. РАН. 1994. Т. 334. № 5. С. 566—568.
22. Кузнецов Е. Б., Шалашилин В. И. Задача Коши для деформируемых систем как задача продолжения решения по параметру//Изв. АН. МТТ. 1993. № 6. С. 145—152.
23. Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б. Задача Коши для нелинейно деформируемых систем как задача продолжения решения по параметру//Докл. РАН. 1993. Т. 329. № 4. С. 426—428.
24. Кузнецов Е. Б. Об одном алгоритме интегрирования дифференциальных уравнений//Качественные методы теории дифференциальных уравнений и их приложения. М.: Изд-во МАИ, 1991. С. 58—62.

Москва

Поступила в редакцию
16.XI.1994