МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1996

УДК 539.3

 Ю. И. МИНДОЛИН

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКЕ С ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННЫМИ ОСНОВАНИЯМИ ПОД ВЛИЯНИЕМ ИСТОЧНИКОВ И СТОКОВ ТЕПЛА

С помощью метода двумерных интегральных преобразований Фурье построено частное решение задачи термоупругости для бесконечной анизотропной пластинки, имеющей теплоизолированные основания и находящейся под влиянием источников и стоков тепла. Сделан вывод о получении фундаментального решения.

1. Тепловое и напряженное состояния бесконечной анизотропной пластинки с теплоизолированными основаниями при наличии в ней источников и стоков тепла описываются следующими уравнениями [1—3]:

$$k_{11}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2k_{12}\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + k_{22}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -W \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy} + \alpha_x T) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy} + \alpha_y T) - \tag{1.2}$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy} + \alpha_{xy}T) = 0$$

где T — функция температур; W — интенсивность источников или стоков тепла; k_{ij} — коэффициенты теплопроводности; σ_x, σ_y, τ_{xy} — компоненты напряжения; a_{ij} — упругие постоянные материала в системе координат x, y; α_x, α_y, α_{xy} — коэффициенты температурной деформации.

Проинтегрируем систему дифференциальных уравнений (1.1)—(1.2) с помощью двумерного интегрального преобразования Фурье по переменным x и y [4], для которого трансформанта и оригинал связаны соотношением

$$\bar{f}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, e^{i(\xi x + \eta y)} dx dy \tag{1.3}$$

После применения интегрального преобразования к уравнениям (1.1) и (1.2) приходим к системе алгебраических уравнений, решение которой дает возможность определить трансформанты

$$\bar{T}(\xi\, \eta) = \bar{W}(\xi, \eta)/g(\xi, \eta), \quad \bar{\sigma}_x(\xi, \eta) = -\bar{W}(\xi, \eta)\,\bar{\varphi}(\xi, \eta)\, a_{22}^{-1}k_{11}^{-1}$$

$$\bar{\sigma}_y(\xi, \eta) = -\alpha_y a_{22}^{-1}\bar{T}(\xi, \eta) - \bar{W}(\xi, \eta)\,\bar{\psi}(\xi, \eta)\, a_{22}^{-1}k_{11}^{-1} \tag{1.4}$$

$$\bar{\tau}_{xy}(\xi, \eta) = \bar{W}(\xi, \eta)\,\bar{\chi}(\xi, \eta)\, a_{22}^{-1}k_{11}^{-1}$$

$$\bar{\varphi} = \eta^2(\xi^2\alpha_y + \eta^2\alpha_x - \xi\eta\alpha_{xy})/\Pi(\xi, \eta)$$

$$\overline{\psi} = (a_3\xi^3\eta + a_2\xi^2\eta^2 + a_1\xi\eta^3 + a_0\eta^4)/\Pi(\xi, \eta)$$

$$\overline{\chi} = \xi\eta(\xi^2\alpha_y + \eta^2\alpha_x - \xi\eta\alpha_{xy})/\Pi(\xi, \eta)$$

$$a_0 = -a_{11}\alpha_y a_{22}^{-1}, \ a_2 = \alpha_x - (2a_{12} + a_{66})\alpha_y\alpha_{22}^{-1} \tag{1.5}$$

$$a_1 = 2a_{16}\alpha_y a_{22}^{-1}, \ a_3 = 2a_{26}\alpha_y a_{22}^{-1} - \alpha_{xy}$$

$$\Pi = g(\xi, \eta)\,\omega(\xi, \eta)\,k_{11}^{-1}a_{22}^{-1}, \ g = k_{11}(\xi - \xi_0\eta)(\xi - \overline{\xi}_0\eta)$$

$$\omega = a_{22}(\xi - \xi_1\eta)(\xi - \overline{\xi}_1\eta)(\xi - \xi_2\eta)(\xi - \overline{\xi}_2\eta)$$

$$g(\xi, \eta) = k_{11}\xi^2 + 2k_{12}\xi\eta + k_{22}\eta^2$$

$$\omega(\xi, \eta) = a_{22}\xi^4 - 2a_{26}\xi^3\eta + (2a_{12} + a_{66})\xi^2\eta^2 - 2a_{16}\xi\eta^3 + a_{11}\eta^4$$

где $\xi_0\eta$, $\overline{\xi}_0\eta$ — комплексно-сопряженные корни уравнения $g(\xi, \eta) = 0$, а $\xi_i\eta$, $\overline{\xi}_i\eta$ $(i = 1, 2)$ — комплексно-сопряженные корни уравнения $\omega(\xi, \eta) = 0$.

В результате выполнения обратного преобразования Фурье находим оригиналы. Например, формула обращения для отыскания функции σ_x выглядит следующим образом:

$$\sigma_x(x, y) = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} \overline{\sigma}_x(\xi, \eta)\, e^{-i(x\xi + y\eta)}d\xi d\eta \tag{1.6}$$

Учитывая выражения (1.4) и используя теорему о свертках [4], приведем соотношение (1.6) к виду

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{1}{2\pi a_{22}k_{11}}\iint_{-\infty}^{\infty} W(\alpha, \beta)\,\varphi(x - \alpha, y - \beta)\,d\alpha d\beta \tag{1.7}$$

Здесь функция $\varphi(x, y)$ является оригиналом, соответствующим известной нам из (1.5) трансформанте $\overline{\varphi}(\xi, \eta)$.

Таким образом, если удается установить функцию $\varphi(x, y)$, то составляющая напряжения $\sigma_x(x, y)$ описывается формулой (1.7).

2. Для нахождения функции $\varphi(x, y)$ по формуле типа (1.6) предварительно разложим функцию $\overline{\varphi}(\xi, \eta)$ на простые множители относительно переменной ξ. Тогда будем иметь

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{2}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{A_k\xi + B_k\eta}{\eta(\xi - \xi_k\eta)(\xi - \overline{\xi}_k\eta)}\,d\xi d\eta \tag{2.1}$$

где A_k и B_k $(k = \overline{0, 2})$ — действительные постоянные множители, определяемые соотношениями

$$A_k = [2\varkappa_k(m_{ik}n_{jk} + m_{jk}n_{ik}) + \omega_k(m_{ik}m_{jk} - 4\beta_k^2 n_{ik}n_{jk})]\,L_k^{-1}$$

$$A_k\alpha_k + B_k = [\varkappa_k(m_{ik}m_{jk} - 4\beta_k^2 n_{ik}n_{jk}) - 2\beta_k^2\omega_k(m_{ik}n_{jk} + m_{jk}n_{ik})]\,L_k^{-1}$$

$$L_k = (m_{ik}^2 + 4\beta_k^2 n_{ik}^2)(m_{jk}^2 + 4\beta_k^2 n_{jk}^2)$$

$$\xi_k = \alpha_k + i\beta_k, \ \overline{\xi}_k = \alpha_k - i\beta_k$$

$$n_{ik} = -n_{ki} = \alpha_i - \alpha_k, \ n_{jk} = -n_{kj} = \alpha_j - \alpha_k$$

$$m_{ik} = n_{ik}^2 + \beta_i^2 - \beta_k^2, \ m_{jk} = n_{jk}^2 + \beta_j^2 - \beta_k^2$$

$$\varkappa_k + i\beta_k\omega_k = \xi_k^2\alpha_y + \alpha_x - \xi_k\alpha_{xy} \quad (k = \overline{0, 2}) \tag{2.2}$$

причем индексы i и j принимают значения $i = 1$ и $j = 2$ при $k = 0$, $i = 2$ и $j = 0$ при $k = 1$, $i = 0$ и $j = 1$ при $k = 2$.

В результате интегрирования (2.1) и подобных ему выражений для $\psi(x, y)$ и $\chi(x, y)$ с использованием таблиц [5] приходим к формулам

$$\varphi(x, y) = -\sum_{k=0}^{2}\left[\frac{A_k\alpha_k + B_k}{\beta_k}\ln\sqrt{(\alpha_k x + y)^2 + (\beta_k x)^2} + A_k \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha_k x + y}{\beta_k x}\right)\right]$$

$$\psi(x, y) = -\sum_{k=0}^{2}\left[\frac{C_k\alpha_k + D_k}{\beta_k}\ln\sqrt{(\alpha_k x + y)^2 + (\beta_k x)^2} + C_k \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha_k x + y}{\beta_k x}\right)\right] \quad (2.3)$$

$$\chi(x, y) = -\sum_{k=0}^{2}\left[\frac{M_k\alpha_k + N_k}{\beta_k}\ln\sqrt{(\alpha_k x + y)^2 + (\beta_k x)^2} + M_k \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha_k x + y}{\beta_k x}\right)\right]$$

Две последние формулы служат соответственно для отыскания компонент напряжений σ_y и τ_{xy}:

$$\sigma_y = -\frac{\alpha_y}{a_{22}}T - \frac{1}{2\pi a_{22}k_{11}}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} W(\alpha, \beta)\,\psi(x - \alpha, y - \beta)\,d\alpha d\beta$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2\pi a_{22}k_{11}}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} W(\alpha, \beta)\,\chi(x - \alpha, y - \beta)\,d\alpha d\beta \quad (2.4)$$

Заметим, что входящие в формулу (2.3) для функции $\psi(x, y)$ постоянные C_k и $C_k\alpha_k + D_k$ определяются соотношениями, аналогичными (2.2). В последних лишь необходимо сделать переобозначение

$$\varkappa_k + i\beta_k\omega_k = \xi_k^3 a_3 + \xi_k^2 a_2 + \xi_k a_1 + a_0$$

Таким же образом находятся постоянные M_k и $M_k\alpha_k + N_k$, входящие в формулу (2.3) для $\chi(x, y)$. В этом случае в подобных (2.2) соотношениях для определения постоянных $\varkappa_k$ и ω_k используется выражение

$$\varkappa_k + i\beta_k\omega_k = \xi_k(\xi_k^2\alpha_y + \alpha_x - \xi_k\alpha_{xy})$$

Если на пластинку действуют сосредоточенные источники и стоки тепла интенсивности W_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), расположенные в точках $x = a_\nu$ и $y = b_\nu$, то функцию $W(x, y)$ можно представить в виде ($\delta(x)$ — дельта-функция Дирака):

$$W(x, y) = \sum_{\nu=1}^{n} W_\nu\delta(x - a_\nu)\,\delta(y - b_\nu)$$

Тогда, на основании [6] получаем следующие формулы для отыскания компонент напряжений:

$$\sigma_x = -\frac{1}{2\pi a_{22}k_{11}}\sum_{\nu=1}^{n} W_\nu\varphi(x - a_\nu, y - b_\nu)$$

$$\sigma_y = -\frac{\alpha_y}{a_{22}}T - \frac{1}{2\pi a_{22}k_{11}}\sum_{\nu=1}^{n} W_\nu\psi(x - a_\nu, y - b_\nu) \quad (2.5)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2\pi a_{22}k_{11}}\sum_{\nu=1}^{n} W_\nu\chi(x - a_\nu, y - b_\nu)$$

где функция температур $T = T(x, y)$, соответствующая влиянию сосредоточенных источников и стоков тепла, определена в работе [7]:

$$T(x, y) = \frac{(-1)}{2\pi\sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}}\sum_{\nu=1}^{n} W_\nu \ln(k_{22}(x - a_\nu)^2 -$$

$$- 2k_{12}(x - a_\nu)(y - b_\nu) + k_{11}(y - b_\nu)^2)^{1/2} \quad (2.6)$$

Таким образом, частное решение задачи о распределении температур и напряжений в анизотропной пластинке с теплоизолированными основаниями под влиянием сосредоточенных источников и стоков тепла найдено и описывается формулами (2.5) и (2.6). При наличии одного источника тепла ($n=1$) решение (2.5), (2.6) принято называть фундаментальным.

В случае действия распределенных источников тепла температура определяется выражением [7]:

$$T(x, y) = \frac{(-1)}{2\pi\sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}} \iint_{-\infty}^{\infty} W(\alpha, \beta) \ln (k_{22}(x-\alpha)^2 -$$

$$- 2k_{12}(x-\alpha)(y-\beta) + k_{11}(y-\beta)^2)^{1/2}\, d\alpha d\beta$$

а компоненты напряжений находятся по формулам (1.7) и (2.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карслоу Г. и Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
2. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 464 с.
3. *Кончковский З.* Плиты. Статические расчеты. М.: Стройиздат, 1984. 481 с.
4. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. М.: ИЛ, 1955. 668 с.
5. *Градштейн И. С. и Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
6. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Изд-во МГУ, 1984. 208 с.
7. *Миндолин Ю. И., Уздалёв А. И.* Анизотропная пластинка под влиянием распределенных и сосредоточенных источников тепла//Изв. АН. МТТ. 1995. № 2. С. 129—134.

Саратов

Поступила в редакцию
28.XII.1994