МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1996

УДК 539.3

© 1996 г. С. А. КАБРИЦ, К. Ф. ЧЕРНЫХ

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ИЗОТРОПНО УПРУГИХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

Статья является логическим продолжением [1—3] по построению нелинейной теории оболочек из эластомеров. Здесь рассматривается уточненный вариант нелинейной теории, учитывающий как и в [1—3] «кинематическое» обжатие, так и поперечные сдвиги по модели типа Тимошенко.

С различными вариантами нелинейной теории оболочек с учетом сдвига и обжатия можно познакомиться в [4—8].

Используемые в статье обозначения в значительной мере совпадают с принятыми в [3].

1. Пусть $\mathbf{R}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ — радиус-вектор материальной точки в деформированной конфигурации тела; $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ — криволинейные материальные координаты точки; $\mathbf{R}_i = \partial\mathbf{R}/\partial\alpha^i$ — основной координатный базис, а $\mathbf{R}^j$ — отвечающий ему взаимный. Компоненты метрического тензора определяются соотношениями

$$g_{ij} = \mathbf{R}_i\mathbf{R}_j, \quad g^{ij} = \mathbf{R}^i\mathbf{R}^j \tag{1.1}$$

$$\mathbf{R}^j = g^{j\alpha}\mathbf{R}_\alpha \tag{1.2}$$

Здесь и ниже принимается правило суммирования по повторяющимся греческим индексам. Площадь i-й координатной площадки подсчитывается по формулам

$$dS_i = \sqrt{gg^{ii}}\, d\alpha^j d\alpha^k, \quad g = |g_{ij}| \quad (i \neq j \neq k \neq i) \tag{1.3}$$

Объем материального элемента равен $dV = \sqrt{g}\, d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3$. Наконец площадь элементарной косой площадки dS_n с единичным вектором нормали к ней $\mathbf{n}$ определяется соотношением

$$\mathbf{n}dS_n = \frac{dS_\alpha}{\sqrt{g^{\alpha\alpha}}}\mathbf{R}^\alpha, \quad n_i = \frac{1}{\sqrt{g^{ii}}}\frac{dS_i}{dS_n} \tag{1.4}$$

Соответствующие зависимости для недеформированной конфигурации получаются из выписанных добавлением нолика сверху.

При рассмотрении условий равновесия материального элемента объема в недеформированной конфигурации используют несимметричный тензор напряжений Пиала — Кирхгофа $J\sigma^{\alpha\beta}\mathbf{R}_\alpha\mathring{\mathbf{R}}_\beta$ ($J = dV/d\mathring{V}$ — кратность изменения объема). Вектор напряжений $\sigma_{\mathring{n}} = (dS_n/d\mathring{S}_n)\,\sigma_n$, отнесенный к единице площади до деформации подсчитывается по формуле

$$\sigma_{\mathring{n}} = \mathring{n}J\sigma^{\alpha\beta}\mathring{\mathbf{R}}_\alpha\mathbf{R}_\beta = \mathring{n}_\gamma J\sigma^{\gamma\beta}\mathbf{R}_\beta \tag{1.5}$$

Главные инварианты тензора деформации Коши

$$I_c = \mathring{g}^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}, \quad II_c/III_c = \mathring{g}_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}, \quad III_c = g/\mathring{g} \tag{1.6}$$

В координатах нормально связанных со срединной поверхностью оболочки $\alpha^3 \equiv \xi$, $\mathbf{R}(\alpha^1, \alpha^2, \xi) = \mathbf{r}(\alpha^1, \alpha^2) + \xi\mathbf{n}(\alpha^1, \alpha^2)$. Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор проекции точки на срединную поверхность, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности. Далее (здесь и ниже буквенные индексы будут принимать значения 1 и 2):

$$a_{ij} = \mathbf{r}_i\mathbf{r}_j,\quad a^{ij} = \mathbf{r}^i\mathbf{r}^j,\quad b_{ij} = -\mathbf{r}_i\mathbf{n}_j,\quad b_j^i = b_{j\alpha}a^{\alpha i}$$

$$(\mathbf{r}_i = \partial\mathbf{r}/\partial\alpha^i,\quad \mathbf{r}^j\cdot\mathbf{r}_i = \delta_i^j,\ \mathbf{n}_i = \partial\mathbf{n}/\partial\alpha^i) \tag{1.7}$$

компоненты поверхностных тензоров: метрического и кривизны. При этом

$$\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2 = \sqrt{a}\,\mathbf{n},\quad \mathbf{n}\times\mathbf{r}_1 = \sqrt{a}\,\mathbf{r}^2,\quad \mathbf{n}\times\mathbf{r}_2 = -\sqrt{a}\,\mathbf{r}^1,\quad (a = |a_{ij}| = a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \tag{1.8}$$

$$\partial\mathbf{r}_i/\partial\alpha^j = \Gamma_{ij}^\alpha\mathbf{r}_\alpha + b_{ij}\mathbf{n},\quad \partial\mathbf{r}^i/\partial\alpha^j = -\Gamma_{j\alpha}^i\mathbf{r}^\alpha + b_j^i\mathbf{n}$$

$$\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\alpha^j} = -b_{j\alpha}\mathbf{r}^\alpha = -b_j^\alpha\mathbf{r}_\alpha,\quad \Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{j\beta}}{\partial\alpha^i} + \frac{\partial a_{i\beta}}{\partial\alpha^j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial\alpha^\beta}\right)a^{\beta h} \tag{1.9}$$

Для вектора тангенциальной нормали к линии на срединной поверхности $\mathbf{v}$ справедливо соотношение

$$v_i ds_t = \sqrt{a}\ d\alpha^j\ (i\neq j) \tag{1.10}$$

2. Радиусы-векторы произвольной материальной точки оболочки, до и после деформации, представим выражениями

$$\mathring{\mathbf{R}}(\alpha^1, \alpha^2; \xi) = \mathring{\mathbf{r}}(\alpha^1, \alpha^2) + \xi\mathring{\mathbf{n}}(\alpha^1, \alpha^2) \tag{2.1}$$

$$\mathbf{R}(\alpha^1, \alpha^2; \xi) = \mathbf{r}(\alpha^1, \alpha^2) + \lambda_\xi\,[\xi + 0{,}5\xi^2\varkappa_\xi(\alpha^1, \alpha^2)]\,\mathbf{m}(\alpha^1, \alpha^2)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{q}\cdot\mathbf{n} \tag{2.2}$$

Здесь $\mathring{\mathbf{r}}$, $\mathbf{r}$ — радиусы-векторы проекций материальной точки на срединную (до деформации) материальную поверхность, $\mathring{\mathbf{n}}$, $\mathbf{n}$ — единичные векторы нормалей к последней.

Далее $\mathbf{q} = \mathbf{Q}|_{\xi=0}$ — ортогональный тензор поворота [3], так что

$$\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 1,\ \mathbf{m}\cdot\partial\mathbf{m}/\partial\alpha^i = 0$$

$$a^{\alpha\beta}m_\alpha m_\beta + (m_n)^2 = a_{\alpha\beta}m^\alpha m^\beta + (m_n)^2 = m_\mu m^\mu + (m_n)^2 = 1$$

$$\mathbf{m} = m_\alpha\mathbf{r}^\alpha + m_n\mathbf{n} = m^\alpha\mathbf{r}_\alpha + m_n\mathbf{n}$$

$$\mathbf{n} = (\mathbf{m} - m_\mu\mathbf{r}^\mu)/m_n = (\mathbf{m} - m^\mu\mathbf{r}_\mu)/m_n \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial\mathbf{m}}{\partial\alpha^i} = \left(a^{\gamma\mu} + \frac{m^\gamma m^\mu}{(m_n)^2}\right)\left(\frac{\partial\mathbf{m}}{\partial\alpha^i}\right)_\mu\mathbf{r}_\gamma + \frac{1}{m_n}\left(\frac{\partial\mathbf{m}}{\partial\alpha^i}\right)_n\mathbf{m}$$

$$\left(\frac{\partial\mathbf{m}}{\partial\alpha^i}\right)_n = -\frac{m^\gamma}{m_n}\left(\frac{\partial\mathbf{m}}{\partial\alpha^i}\right)_\gamma = \frac{m_\gamma}{m_n}\left(\frac{\partial\mathbf{m}}{\partial\alpha^i}\right)^\gamma$$

В отличие от гипотезы Кирхгофа материальное волокно, нормальное к материальной срединной поверхности до деформации, уже не нормально к ней после деформации — учитывается так называемый поперечный сдвиг. Функции λ_ξ, $\varkappa_\xi$, как и в [1], характеризуют деформацию поперечного волокна.

Используя теперь зависимости (1.1), (1.7), (2.1)—(2.3), подсчитываем координатные векторы, основного и взаимного базисов, сохраняя везде (здесь и в дальнейшем), линейные по ξ слагаемые

$$\mathring{\mathbf{R}}_i = \mathring{\mathbf{r}}_i - \xi\mathring{b}_i^\alpha\mathring{\mathbf{r}}_\alpha,\quad \mathring{\mathbf{R}}_3 = \mathring{\mathbf{n}}$$

$$\mathring{\mathbf{R}}^j = \mathring{\mathbf{r}}^j + \xi\mathring{b}_\beta^j\mathring{\mathbf{r}}^\beta,\quad \mathring{\mathbf{R}}^3 = \mathring{\mathbf{n}}\quad (i, j = 1, 2) \tag{2.4}$$

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{r}_i + \xi\left(\lambda_\xi\frac{\partial\mathbf{m}}{\partial\alpha^i} + \frac{\partial\lambda_\xi}{\partial\alpha^i}\mathbf{m}\right),\quad \mathbf{R}_3 = \lambda_\xi(1 + \xi\varkappa_\xi)\,\mathbf{m}$$

$$R^j = \left(a^{j\mu} + \frac{m^j m^\mu}{(m_n)^2} \right) r_\mu - \frac{m^j}{(m_n)^2} m - \xi \left\{ \lambda_\xi \left(a^{j\mu} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{m^j m^\mu}{(m_n)^2} \right) \left(\frac{\partial m}{\partial \alpha^\beta} \right)_\mu \left[\left(\alpha^{\gamma\beta} + \frac{\mu^\gamma m^\beta}{(m_n)^2} \right) r_\gamma - \frac{m^\beta}{(m_n)^2} m \right] \right\} \tag{2.5}$$

$$R^3 = \frac{1}{\lambda_\xi m_n} \left[\frac{1}{m_n} (m - m^\mu r_\mu) - \xi \left\{ \frac{1}{m_n} (m - m^\mu r_\mu) \varkappa_\xi + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\lambda_\xi \left(\frac{\partial m}{\partial \alpha^\beta} \right)_n + \frac{\partial \lambda_\xi}{\partial \alpha^\beta} m_n \right) \left[\left(\alpha^{\mu\beta} + \frac{m^\mu m^\beta}{(m_n)^2} \right) r_\mu - \frac{m^\beta}{(m_n)^2} m \right] \right\} \right]$$

Отсюда находим

$$\mathring{g}_{ij} = \mathring{a}_{ij} - \xi 2 \mathring{b}_{ij}, \quad \mathring{g}_{i3} = 0, \quad \mathring{g}_{33} = 1$$

$$\mathring{g}^{ij} = \mathring{a}^{ij} + \xi 2 \mathring{b}^{ij}, \quad \mathring{g}^{i3} = 0, \quad \mathring{g}^{33} = 1 \tag{2.6}$$

$$g_{ij} = a_{ij} + \xi \{I\}_{ij}, \quad g_{i3} = \lambda_\xi \left[m_i + \xi \left(\varkappa_\xi m_i + \frac{\partial \lambda_\xi}{\partial a^i} \right) \right], \quad g_{33} = \lambda_\xi^2 (1 + \xi 2 \varkappa_\xi)$$

$$g^{ij} = a^{ij} + \frac{m^i m^j}{(m_n)^2} - \xi \lambda_\xi \left(\frac{\partial m}{\partial \alpha^\beta} \right)_\gamma \left[\left(a^{j\gamma} + \frac{m^j m^\gamma}{(m_n)^2} \right) \left(a^{i\beta} + \frac{m^i m^\beta}{(m_n)^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(a^{i\gamma} + \frac{m^i m^\gamma}{(m_n)^2} \right) \left(a^{j\beta} + \frac{m^j m^\beta}{(m_n)^2} \right) \right] \tag{2.7}$$

$$\lambda_\xi m_n g^{j3} = - \frac{m^j}{m_n} + \xi \left\{ \frac{m^j}{m_n} \varkappa_\xi + \left(a^{j\gamma} + \frac{m^j m^\gamma}{(m_n)^2} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left[\lambda_\xi \left(\frac{m^\beta}{m_n} \left(\frac{\partial m}{\partial \alpha^\beta} \right)_\gamma - \left(\frac{\partial m}{\partial \alpha^\gamma} \right)_n \right) - \frac{\partial \lambda_\xi}{\partial \alpha^\gamma} m_n \right] \right\}$$

$$(\lambda_\xi m_n)^2 g^{33} = 1 + \xi 2 \left[-\varkappa_\xi + \left(\lambda_\xi \left(\frac{\partial m}{\partial \alpha^\beta} \right)_n + \frac{\partial \lambda_\xi}{\partial \alpha^\beta} m_n \right) \frac{m^\beta}{m_n} \right]$$

$$\{I\}_{ij} = \lambda_\xi \left[\left(\frac{\partial m}{\partial \alpha^i} \right)_j + \left(\frac{\partial m}{\partial \alpha^j} \right)_i \right] + \frac{\partial \lambda_\xi}{\partial \alpha^i} m_j + \frac{\partial \lambda_\xi}{\partial \alpha^j} m_i \tag{2.8}$$

Используя теперь соотношения (2.6), (2.7), (1.6) приходим к выражениям для главных инвариантов

$$I_c = \mathring{a}^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} + \lambda_\xi^2 + \xi 2 \{ \mathring{b}^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} + 0{,}5 \mathring{a}^{\alpha\beta} \{I\}_{\alpha\beta} + \lambda_\xi^2 \varkappa_\xi \}$$

$$\frac{II_c}{III_c} = \mathring{a}_{\alpha\beta} \left(a^{\alpha\beta} + \frac{m^\alpha m^\beta}{(m_n)^2} \right) + \frac{1}{(\lambda_\xi m_n)^2} = \xi 2 \left[- \frac{1}{2} \mathring{a}_{\alpha\beta} \lambda_\xi \left(\frac{\partial m}{\partial \alpha^\mu} \right)_\gamma \times \right.$$

$$\times \left[\left(\alpha^{\beta\gamma} + \frac{m^\beta m^\gamma}{(m_n)^2} \right) \left(a^{\alpha\mu} + \frac{m^\alpha m^\mu}{(m_n)^2} \right) + \left(a^{\alpha\gamma} + \frac{m^\alpha m^\gamma}{(m_n)^2} \right) \left(a^{\beta\mu} + \frac{m^\beta m^\mu}{(m_n)^2} \right) \right] -$$

$$\left. - \mathring{b}_{\alpha\beta} \left(a^{\alpha\beta} + \frac{m^\alpha m^\beta}{(m_n)^2} \right) - \frac{\varkappa_\xi}{(\lambda_\xi m_n)^2} + \frac{1}{(\lambda_\xi m_n)^2} - \left(\lambda_\xi \left(\frac{\partial m}{\partial \alpha^\beta} \right)_n + \frac{\partial \lambda_\xi}{\partial \alpha^\beta} m_n \right) \frac{m^\beta}{m_n} \right\} \tag{2.9}$$

$$III_c = \lambda_\xi^2 \frac{a}{\mathring{a}} \left[(m_n)^2 + \xi 2 \left\{ (m_n)^2 \varkappa_\xi - \frac{\partial \lambda_\xi}{\partial \alpha^\beta} m^\beta + (m_n)^2 \mathring{b}_\alpha^\alpha + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 1/2 \left[a^{\beta\gamma} + (a^{\beta\mu} a^{\gamma\rho} - a^{\beta\gamma} a^{\mu\rho}) m_\mu m_\rho \right] \{I\}_{\beta\gamma} \right\} \right]$$

Из последнего здесь выражения и условия несжимаемости $III_c = 1$ следует

$$\lambda_\xi = 1/(m_n \sqrt{a/\mathring{a}})$$

$$\varkappa_\xi = \frac{1}{(m_n)^2}\left[\frac{\partial\lambda_\xi}{\partial\alpha^\beta} m^\beta - (m_n)^2 \mathring{b}^\alpha_\alpha - \frac{1}{2}\left[a^{\beta\gamma} + (a^{\beta\mu}a^{\gamma\rho} - a^{\beta\gamma}a^{\mu\rho})\, m_\mu m_\rho\right]\{\mathrm{I}\}_{\beta\gamma}\right] \tag{2.10}$$

Наконец, используя формулу (2.2) и представление для тензора поворота [3], получим

$$\mathbf{m} = \mathbf{q}\cdot\mathbf{n} = \cos\omega\mathbf{n} + \frac{\sin\omega}{\omega}\,\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{n} + \frac{(1-\cos\omega)}{(\omega)^2}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n})\,\boldsymbol{\omega} \tag{2.11}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega^\alpha\mathbf{r}_\alpha = \omega^1\mathbf{r}_1 + \omega^2\mathbf{r}_2 \quad (\omega_n = 0) \tag{2.12}$$

т. е. будем полагать, что переход от орта нормали к деформированной срединной поверхности к единичному вектору $\mathbf{m}$, определяющему положение поперечного волокна (нормального к срединной поверхности до деформации), задается двумя поворотами вокруг координатных осей деформированной срединной поверхности $\omega_{(1)}$ и $\omega_{(2)}$.

Из равенств (2.11), (2.12) находим

$$m_1 = \sqrt{a}\,\frac{\sin\omega}{\omega}\,\omega^2, \quad m_2 = -\sqrt{a}\,\frac{\sin\omega}{\omega}\,\omega^1, \quad m_n = \cos\omega$$

$$m^1 = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{\sin\omega}{\omega}\,\omega_2, \quad m^2 = -\frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{\sin\omega}{\omega}\,\omega_1 \tag{2.13}$$

$$\left(\omega = \sqrt{\omega_\alpha\omega^\alpha} = \sqrt{a_{\alpha\beta}\omega^\alpha\omega^\beta} = \sqrt{a^{\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta}\right)$$

При малых углах поворота ($\omega \ll 1$):

$$m_1 = \sqrt{a}\,\omega^2, \; m_2 = -\sqrt{a}\,\omega^1, \; m_n = 1, \; m^1 = \frac{\omega_2}{\sqrt{a}}, \; m^2 = -\frac{\omega_1}{\sqrt{a}} \tag{2.14}$$

3. Для сжимаемого материала симметричные компоненты двойного тензора напряжений связаны с деформацией соотношениями

$$J\sigma^{ij} = 2\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{I}_c}\mathring{g}^{ij} + \frac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{II}_c}\left[\left(\mathring{g}^{ij}\mathring{g}^{\gamma\mu} - \mathring{g}^{i\gamma}\mathring{g}^{j\mu}\right)g_{\gamma\mu} + \mathring{g}^{ij}g_{33}\right] + \mathrm{III}_c\frac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{III}_c}g^{ij}\right\}$$

$$J\sigma^{i3} = 2\left\{-\frac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{II}_c}\mathring{g}^{i\mu}g_{\mu 3} + \mathrm{III}_c\frac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{III}_c}g^{i3}\right\} \tag{3.1}$$

$$J\sigma^{33} = 2\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{I}_c} + \frac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{II}_c}\mathring{g}^{\gamma\mu}g_{\gamma\mu} + \mathrm{III}_c\frac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{III}_c}g^{33}\right\}, \quad \Phi = \Phi(\mathrm{I}_c, \mathrm{II}_c, \mathrm{III}_c)$$

для несжимаемого материала

$$\sigma^{ij} = 2\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{I}_c}\mathring{g}^{ij} + \frac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{II}_c}\left[(\mathring{g}^{ij}\mathring{g}^{\gamma\mu} - \mathring{g}^{i\nu}\mathring{g}^{j\mu})\,g_{\gamma\mu} + \mathring{g}^{ij}g_{33}\right]\right\} + pg^{ij}$$

$$\sigma^{i3} = 2\left\{-\frac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{II}_c}\mathring{g}^{i\mu}g_{\mu 3}\right\} + pg^{i3} \tag{3.2}$$

$$\sigma^{33} = 2\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{I}_c} + \frac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{II}_c}\mathring{g}^{\gamma\mu}g_{\gamma\mu}\right\} + pg^{33}$$

$$\Phi = \Phi(\mathrm{I}_c, \mathrm{II}_c) \quad (J = \mathrm{III}_c = 1)$$

Сохраняя лишь линейные по ξ члены в разложении примем для сжимаемого материала

$$\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{I}_c} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{I}_c}\right)_{(0)} + \xi\left\{\left(\frac{\partial^2\Phi}{(\partial \mathrm{I}_c)^2}\right)_{(0)}\mathrm{I}_c^{(1)} + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial \mathrm{II}_c\partial \mathrm{I}_c}\right)_{(0)}\mathrm{II}_c^{(1)} + \underline{\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial \mathrm{III}_c\partial \mathrm{I}_c}\right)_{(0)}\mathrm{III}_c^{(1)}}\right\}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{II}_c} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{II}_c}\right)_{(0)} + \xi\left\{\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial \mathrm{I}_c\partial \mathrm{II}_c}\right)_{(0)}\mathrm{I}_c^{(1)} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2\Phi}{(\partial \mathrm{II}_c)^2}\right)_{(0)}\mathrm{II}_c^{(1)} + \underline{\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial \mathrm{III}_c\partial \mathrm{II}_c}\right)_{(0)}\mathrm{III}_c^{(1)}}\right\} \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{III}_c} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{III}_c}\right)_{(0)} + \xi\left\{\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial \mathrm{I}_c\partial \mathrm{III}_c}\right)_{(0)}\mathrm{I}_c^{(1)} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial \mathrm{II}_c\partial \mathrm{III}_c}\right)_{(0)}\mathrm{II}_c^{(1)} + \left(\frac{\partial^2\Phi}{(\partial \mathrm{III}_c)^2}\right)_{(0)}\mathrm{III}_c^{(1)}\right\}$$

Для несжимаемого материала следует опустить третье выражение, отбросить подчеркнутые слагаемые в первых двух и принять

$$p = p_{(0)} + \xi p_{(1)} \tag{3.4}$$

Подставив теперь в (3.1) ((3.2)) выражения (3.3) ((3.3), (3.4)), можно подсчитать выражения для компонент тензора напряжений.

Рассмотрим, например, несжимаемый материал типа неогуковского, для которого $\Phi = \Phi(\mathrm{I}_c)$, и в первых двух из соотношений (3.3) отличны от нуля лишь

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{I}_c}\right)_{(0)} = \Phi_0'(\mathrm{I}_c^{(0)}), \quad \left(\frac{\partial^2\Phi}{(\partial \mathrm{I}_c)^2}\right)_{(0)} = \Phi_0''(\mathrm{I}_c^{(0)})$$

При этом согласно (2.9) $\mathrm{I}_c^{(0)} = \mathring{a}^{\alpha\beta}a_{\alpha\beta} + \lambda_\xi^2$, $\mathrm{I}_c^{(1)} = 2\mathring{b}^{\alpha\beta}a_{\alpha\beta} + \mathring{a}^{\alpha\beta}\{\mathrm{I}\}_{\alpha\beta} + 2\lambda_\xi^2\varkappa_\xi$. Принимая

$$\sigma^{ij} = \sigma^{ij}_{(0)} + \xi\sigma^{ij}_{(1)}, \quad \sigma^{i3} = \sigma^{i3}_{(0)} + \xi\sigma^{i3}_{(1)}, \quad \sigma^{33} = \sigma^{33}_{(0)} + \xi\sigma^{33}_{(1)} \tag{3.5}$$

из соотношений (3.2)—(3.4) находим

$$\sigma^{ij}_{(0)} = 2\mathring{a}^{ij}\Phi_0' + (a^{ij} + m^i m^j/(m_n)^2)\,p_{(0)}$$

$$\sigma^{i3}_{(0)} = -\frac{m^i}{m_n}\frac{p_{(0)}}{\lambda_\xi m_n}, \quad \sigma^{33}_{(0)} = 2\Phi_0' + \frac{p_{(0)}}{(\lambda_\xi m_n)^2}$$

$$\sigma^{ij}_{(1)} = 2\left\{\mathring{a}^{ij}\left[2\mathring{b}^{\alpha\beta}a_{\alpha\beta} + \mathring{a}^{\alpha\beta}\{\mathrm{I}\}_{\alpha\beta} + 2\lambda_\xi^2\varkappa_\xi\right]\Phi_0'' + 2\mathring{b}^{ij}\Phi_0'\right\} - \lambda_\xi\left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial\alpha^\beta}\right)_\gamma \times$$

$$\times\left[\left(a^{j\gamma} + \frac{m^j m^\gamma}{(m_n)^2}\right)\left(a^{i\beta} + \frac{m^i m^\beta}{(m_n)^2}\right) + \left(a^{i\gamma} + \frac{m^i m^\gamma}{(m_n)^2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(a^{j\beta} + \frac{m^j m^\beta}{(m_n)^2}\right)\right]p_{(0)} + \left(a^{ij} + \frac{m^i m^j}{(m_n)^2}\right)p_{(1)} \tag{3.6}$$

$$\sigma^{33}_{(1)} = 2\left[2\mathring{b}^{\alpha\beta}a_{\alpha\beta} + \mathring{a}^{\alpha\beta}\{\mathrm{I}\}_{\alpha\beta} + 2\lambda_\xi^2\varkappa_\xi\right]\Phi_0'' +$$

$$+ \frac{2}{(\lambda_\xi m_n)^2}\left[-\varkappa_\xi + \left(\lambda_\xi\left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial\alpha^\beta}\right)_n + \frac{\partial\lambda_\xi}{\partial\alpha^\beta}m_n\right)\frac{m^\beta}{m_n}\right]p_{(0)} + \frac{p_{(1)}}{(\lambda_\xi m_n)^2}$$

Выражения $\sigma^{i3}_{(1)}$ не выписываем, поскольку далее не понадобится.

Для определения функций $p_{(0)}$ и $p_{(1)}$ примем статическую (силовую) гипотезу Кирхгофа

$$\sigma^{33} = \sigma^{33}_{(0)} + \xi\sigma^{33}_{(1)} = 0 \tag{3.7}$$

Приравнивая поэтому нулю третье и пятое из выражений (3.6), получаем

$$p_{(0)} = -2\,(\lambda_\xi m_n)^2\,\Phi_0{}'$$

$$p_{(1)} = 2\,(\lambda_\xi m_n)^2 \Big\{ -[2\mathring{b}^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} + \mathring{a}^{\alpha\beta}\,\{\mathrm{I}\}_{\alpha\beta} + 2\lambda_\xi^2 \varkappa_\xi]\,\Phi_0{}'' + \tag{3.8}$$

$$+ 2\left[-\varkappa_\xi + \left(\lambda_\xi \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \alpha^\beta} \right)_n + \frac{\partial \lambda_\xi}{\partial \alpha^\beta} m_n \right) \frac{m^\beta}{m_n} \right] \Phi_0{}' \Big\}$$

Подстановка полученных выражений в остальные три в (3.6) дает

$$\sigma^{ij}_{(0)} = 2\left[\mathring{a}^{ij} - (\lambda_\xi m_n)^2 \left(a^{ij} + \frac{m^i m^j}{(m_n)^2} \right) \right] \Phi_0{}', \quad \sigma^{i3}_{(0)} = 2\lambda_\xi m^i \Phi_0{}'$$

$$\sigma^{ij}_{(1)} = [2\mathring{b}^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} + \mathring{a}^{\alpha\beta}\,\{\mathrm{I}\}_{\alpha\beta} + 2\lambda_\xi^2 \varkappa_\xi]\,\frac{\Phi_0{}''}{\Phi_0{}'}\,\sigma^{ij}_{(0)} + \Big\{ 4\mathring{b}^{ij} + 2\,(\lambda_\xi m_n)^2 \Big(\lambda_\xi \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \alpha^\beta} \right)_\gamma \times$$

$$\times \left[\left(a^{i\gamma} + \frac{m^j m^\gamma}{(m_n)^2} \right) \left(a^{i\beta} + \frac{m^i m^\beta}{(m_n)^2} \right) + \left(a^{i\gamma} + \frac{m^i m^\gamma}{(m_n)^2} \right) \left(a^{j\beta} + \frac{m^j m^\beta}{(m_n)^2} \right) \right] + \tag{3.9}$$

$$+2 \left(a^{ij} + \frac{m^i m^j}{(m_n)^2} \right) \left[-\varkappa_\xi + \left(\lambda_\xi \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \alpha^\beta} \right)_n + \frac{\partial \lambda_\xi}{\partial \alpha^\beta} m_n \right) \frac{m^\beta}{m_n} \right] \Big) \Big\}\,\Phi_0{}'$$

Напомним, что величины λ_ξ и $\varkappa_\xi$ определяются выражениями (2.10).

Рассмотрим семейство потенциалов

$$\Phi = \frac{E}{2n \cdot 3^n}\,(\mathrm{I}_c^n - 3^n) \tag{3.10}$$

Тогда

$$\Phi_0{}' = \frac{E}{2 \cdot 3^n}\,(\mathrm{I}_c^{(0)})^{n-1}, \quad \Phi_0{}'' = \frac{E\,(n-1)}{2 \cdot 3^n}\,(\mathrm{I}_c^{(0)})^{n-2}$$

4. Рассмотрим элементы поперечного сечения деформированной оболочки, бывшего до деформации ее нормальным сечением (фиг. 1). Подсчитаем главный вектор и главный момент действующих на выделенный элемент напряжений. Пусть $d\mathring{S}_\nu^\xi$ и dS_ν^ξ — площади элемента, до и после деформации.

При этом (рис. 1):

$$\mathbf{T}_\nu d\mathring{s}_t = \int\limits_{S_\nu} \sigma_\nu dS_\nu^\xi, \quad \mathbf{M}_\nu d\mathring{s}_t = \int\limits_{S_\nu} (\mathbf{R} - \mathbf{r}) \times \sigma_\nu dS_\nu^\xi \tag{4.1}$$

где $\mathbf{T}_\nu$, $\mathbf{M}_\nu$ — векторы усилий и моментов в расчете на единицу длины срединной линии недеформированного нормального сечения.

Обозначим через $\mathring{\mathbf{v}}^\xi = \mathring{v}_\gamma^\xi \mathbf{R}^\gamma$, $\mathring{\mathbf{v}} = \mathring{v}_\gamma \mathring{\mathbf{r}}^\gamma$ — единичные векторы тангенциальных нормалей к недеформированному элементу (фиг. 1), сохраняя за $\mathring{\mathbf{n}}$, $\mathbf{n}$ обозначения для единичных векторов к (материальной) срединной поверхности. При этом согласно выражению (1.5), в котором $\mathring{\mathbf{n}}$ заменено на вектор $\mathring{\mathbf{v}}^\xi$, находим

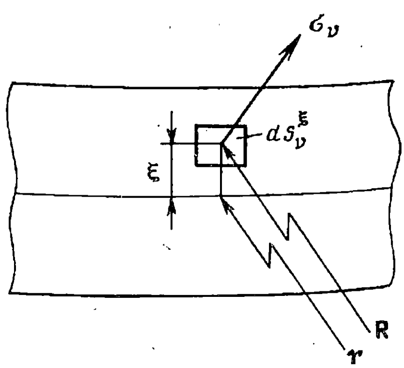
$$\sigma_\nu dS_\nu^\xi = \mathring{\mathbf{v}}^\xi\,[J\sigma^{\alpha\beta}\mathring{\mathbf{R}}_\alpha \mathbf{R}_\beta + J\sigma^{3\beta}\mathring{\mathbf{R}}_3 \mathbf{R}_\beta + J\sigma^{\alpha 3}\mathring{\mathbf{R}}_\alpha \mathbf{R}_3 +$$

$$+ J\sigma^{33}\mathring{\mathbf{R}}_3 \mathbf{R}_3]\,d\mathring{S}_\nu^\xi = \mathring{v}_\alpha^\xi\,[J\sigma^{\alpha\beta}\mathbf{R}_\beta + J\sigma^{\alpha 3}\mathbf{R}_3]\,d\mathring{S}_\nu^\xi \tag{4.2}$$

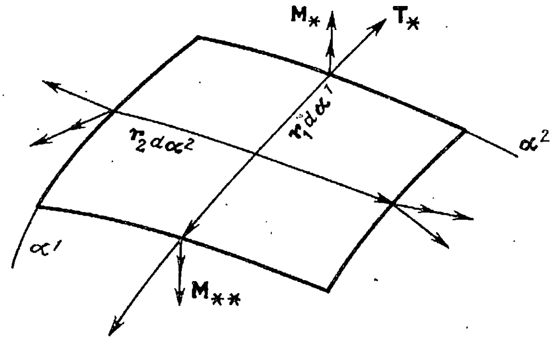
Согласно же формулам (1.3), (1.4):

$$\mathring{v}_i^\xi d\mathring{S}_\nu^\xi = d\mathring{S}_i^\xi / \sqrt{\mathring{g}^{ii}} = \sqrt{\mathring{g}}\,d\alpha^j d\xi = \sqrt{\mathring{g}/\mathring{a}}\,d\mathring{S}_i / \sqrt{\mathring{a}^{ii}} =$$

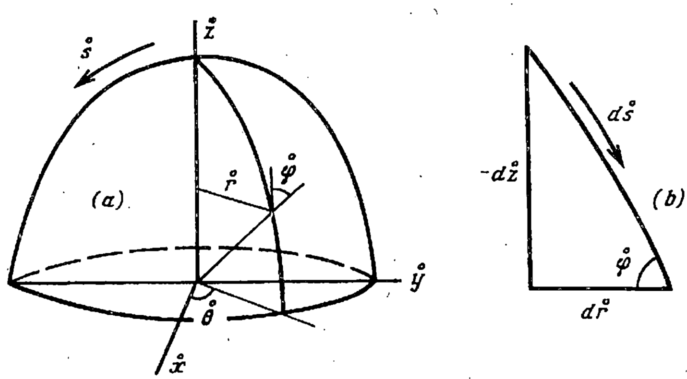
$$= \sqrt{\mathring{g}/\mathring{a}}\,\mathring{v}_i d\mathring{S}_\nu = \sqrt{\mathring{g}/\mathring{a}}\,\mathring{v}_i d\mathring{s}_i d\xi \quad (i \neq j)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Подставляя это выражение в предыдущее, а полученное в (4.1), получаем с учетом (2.5):

$$\mathbf{T}_\nu = \mathring{\nu}_\alpha \left(\mathbf{T}^\alpha + T^\alpha_{\cdot m}\mathbf{m}\right), \quad \mathbf{M}_\nu = \mathring{\nu}_\alpha \mathbf{M}^\alpha$$

$$\mathbf{T}^i = T^{i\beta}\mathbf{r}_\beta, \quad \mathbf{M}^i = M^{i\beta}\mathbf{m} \times \mathbf{r}_\beta \tag{4.3}$$

$$T^{ij} = \int\limits_{-\mathring{h}/2}^{\mathring{h}/2} \left\{ J\sigma^{ij} + \xi\lambda_\xi \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \alpha^\gamma}\right)_\mu \left(a^{j\mu} + \frac{m^j m^\mu}{(m_n)^2}\right) J\sigma^{i\gamma} \right\} \underline{\sqrt{\mathring{g}/\mathring{a}}}\, d\xi$$

$$M^{ij} = \lambda_\xi \int\limits_{-\mathring{h}/2}^{\mathring{h}/2} \left\{ J\sigma^{ij} + \underline{\xi\lambda_\xi \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \alpha^\gamma}\right)_\mu \left(a^{j\mu} + \frac{m^j m^\mu}{(m_n)^2}\right) J\sigma^{i\gamma}} \right\} \left(\xi + \underline{\frac{1}{2}\xi^2 \varkappa_\xi}\right) \underline{\sqrt{\mathring{g}/\mathring{a}}}\, d\xi \tag{4.4}$$

$$T^i_{\cdot m} = \int\limits_{-\mathring{h}/2}^{\mathring{h}/2} \left\{ \lambda_\xi (1 + \xi\varkappa_\xi) J\sigma^{i3} + \xi \left[\frac{\partial \lambda_\xi}{\partial \alpha^\beta} - \lambda_\xi \frac{m^\mu}{(m_n)^2} \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \alpha^\beta}\right)_\mu \right] J\sigma^{i\beta} \right\} \sqrt{\frac{\mathring{g}}{\mathring{a}}}\, d\xi \tag{4.5}$$

Из соотношений же (4.3) следует

$$\mathbf{T}_\nu = \mathring{\mathbf{v}}\cdot\left(\mathbf{T} + T^\alpha_{\cdot m}\mathring{\mathbf{r}}_\alpha \mathbf{m}\right), \quad \mathbf{M}_\nu = \mathring{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{M}$$

$$\mathbf{T} = T^{\alpha\beta}\mathring{\mathbf{r}}_\alpha \mathbf{r}_\beta, \quad \mathbf{M} = M^{\alpha\beta}\mathring{\mathbf{r}}_\alpha (\mathbf{m} \times \mathbf{r}_\beta) \tag{4.6}$$

Отсюда устанавливается, что T^{ij} — контравариантные компоненты двойного тензора усилий; M^{ij} — контравариантные компоненты двойного тензора моментов, причем в формировании второго векторного базиса использована операция векторного умножения; $T^i_{\cdot m}$ — величины, называемые перерезывающими усилиями.

В выражениях для моментов опустим подчеркнутые (малые по предположению) члены, что связано с предположениями

$$\sqrt{\overset{\circ}{g}/\overset{\circ}{a}} \simeq 1, \quad \xi(\partial \mathrm{m}/\partial \alpha^i)_j << 1, \quad \xi\varkappa_\xi << 1 \tag{4.7}$$

С учетом сказанного ищем приближенное выражение для (симметричных) моментов

$$M^{ij} = \lambda_\xi \int\limits_{-\overset{\circ}{h}/2}^{\overset{\circ}{h}/2} J\sigma^{ij}\xi d\xi = M^{ji} \tag{4.8}$$

Введем в рассмотрение симметричные условия Новожилова

$$S^{ij} = T^{ij} - \left(a^{j\mu} + \frac{m^j m^\mu}{(m_n)^2} \right) \left(\frac{\partial \mathrm{m}}{\partial \alpha^\gamma} \right)_\mu M^{i\gamma} \tag{4.9}$$

Согласно первому из выражений (4.4):

$$S^{ij} = \int\limits_{-\overset{\circ}{h}/2}^{\overset{\circ}{h}/2} J\sigma^{ij} d\xi = S^{ji} \tag{4.10}$$

Вернемся к представлениям (3.5). Согласно выражениям (4.8) и (4.10):

$$S^{ij} = \overset{\circ}{h}\,(J\sigma^{ij})_{(0)}, \quad M^{ij} = \frac{\overset{\circ}{h}{}^3}{12}\lambda_\xi\,(J\sigma^{ij})_{(1)} \quad J\sigma^{ij} = \frac{S^{ij}}{\overset{\circ}{h}} + \frac{\xi}{(\overset{\circ}{h}/2)}\frac{6M^{ij}}{\lambda_\xi \overset{\circ}{h}{}^2} \tag{4.11}$$

Подстановка этого выражения, а также второго из (3.5) в (4.5) дает выражение для перерезывающих сил

$$T^i_{\cdot m} = \lambda_\xi \left[\overset{\circ}{h}\,(J\sigma^{i3})_{(0)} + \underline{\frac{1}{12}\overset{\circ}{h}{}^3 \varkappa_\xi\,(J\sigma^{i3})_{(1)}} \right] + \left[\frac{\partial \lambda_\xi}{\partial \alpha^\beta} - \frac{m^\mu}{(m_n)^2}\left(\frac{\partial \mathrm{m}}{\partial \alpha^\beta} \right)_\mu \right] M^{i\beta} \tag{4.12}$$

Имея целью ввести перерезывающие усилия простейшим образом, пренебрежем подчеркнутыми членами по сравнению с первыми слагаемыми, полагая тем самым равномерное по толщине распределение перерезывающих напряжений. Последнее характерно (в линейном подходе) для теории Тимошенко. Тогда получим

$$J\sigma^{i3} = \frac{1}{\lambda_\xi \overset{\circ}{h}} \left[T^i_{\cdot m} - \underline{\left[\frac{\partial \lambda_\xi}{\partial \alpha^\beta} - \frac{m^\mu}{(m_n)^2}\left(\frac{\partial \mathrm{m}}{\partial \alpha^\beta} \right)_\mu \right] M^{i\beta}} \right]$$

Из сопоставления полученного выражения с последним в (4.11) следует, что вклад в напряжения от подчеркнутого члена (порядка $M^{ij}/\overset{\circ}{h}$) пренебрежимо мал по сравнению с тем, что дают моменты в (4.11). Отбрасывая его, получаем окончательно

$$T^i_{\cdot m} = \overset{\circ}{h}\lambda_\xi\,(J\sigma^{i3})_{(0)} \tag{4.13}$$

5. Рассмотрим условия равновесия элемента деформированной срединной поверхности, ограниченного координатными линиями α^1, $\alpha^1 + d\alpha^1$ и α^2, $\alpha^2 + d\alpha^2$ (фиг. 2). Для этого подсчитаем главный вектор и главный момент приложенных к нему усилий, моментов и внешних сил

$$M_* = -M^1 \sqrt{\overset{\circ}{a}}\, d\alpha^2, \quad T_* = -\,(T^1 + T^1_{\cdot m}m)\sqrt{\overset{\circ}{a}}\, d\alpha^2$$

$$M_{**} = M^1 \sqrt{\overset{\circ}{a}}\, d\alpha^2 + \frac{\partial}{\partial \alpha^1}\,[M^1 \sqrt{\overset{\circ}{a}}\, d\alpha^2]\, d\alpha^1$$

$$T_{**} = (T^1 + T^1_{\cdot m}m)\sqrt{\overset{\circ}{a}}\, d\alpha^2 + \frac{\partial}{\partial \alpha^1}\,[T^1 + T^1_{\cdot m}m)\sqrt{\overset{\circ}{a}}\, d\alpha^2]\, d\alpha^1$$

Напомним, что введенные выше усилия и моменты относятся к единице недеформированного контура. При этом на линии $\alpha^1 = \mathrm{const}$: $d\alpha^1 = 0$, $\mathring{v}_1 d\mathring{s}_t = \sqrt{\mathring{a}}\, d\alpha^2$, $\mathring{v}_2 d\mathring{s}_t = 0$. Поэтому согласно (4.3) на пару сторон элемента $\alpha^1 = \mathrm{const}$, $\alpha^1 + d\alpha^1 = \mathrm{const}$ действуют силы

$$\left\{ (\mathrm{T}^1 + T^1_{\cdot m}\mathrm{m}) \sqrt{\mathring{a}}\, d\alpha^2 + \frac{\partial}{\partial\alpha^1} [(\mathrm{T}^1 + T^1_{\cdot m}\mathrm{m}) \sqrt{\mathring{a}}\, d\alpha^2]\, d\alpha^1 \right\} -$$

$$- (\mathrm{T}^1 + T^1_{\cdot m}\mathrm{m}) \sqrt{\mathring{a}}\, d\alpha^2 = \frac{\partial \sqrt{\mathring{a}}\, (\mathrm{T}^1 + T^1_{\cdot m}\mathrm{m})}{\partial\alpha^1} d\alpha^1 d\alpha^2$$

Добавим сюда аналогичные слагаемые для другой пары сторон и поверхностную силу $\mathrm{q}\sqrt{a}\, d\alpha^1 d\alpha^2$, где q — интенсивность поверхностной нагрузки в расчете на единицу площади деформированной срединной поверхности. В результате получаем, приравнивая нулю подсчитанный главный вектор,

$$\left[\frac{\partial \sqrt{\mathring{a}}\, (\mathrm{T}^1 + T^1_{\cdot m}\mathrm{m})}{\partial\alpha^1} + \frac{\partial \sqrt{\mathring{a}}\, (\mathrm{T}^2 + T^2_{\cdot m}\mathrm{m})}{\partial\alpha^2} + \mathrm{q}\sqrt{a} \right] d\alpha^1 d\alpha^2 = 0 \tag{5.1}$$

Составляя выражение для главного момента, получаем прежде всего аналогичные слагаемые

$$[\partial \sqrt{\mathring{a}}\, \mathrm{M}^1/\partial\alpha^1 + \partial \sqrt{\mathring{a}}\, \mathrm{M}^2/\partial\alpha^2]\, d\alpha^1 d\alpha^2$$

К ним необходимо добавить главный момент, создаваемый парами сил (см. фиг. 2):

$$\mathrm{r}_1 d\alpha^1 \times (\mathrm{T}^1 + T^1_{\cdot m}\mathrm{m}) \sqrt{\mathring{a}}\, d\alpha^2 + \mathrm{r}_2 d\alpha^2 \times (\mathrm{T}^2 + T^2_{\cdot m}\mathrm{m}) \sqrt{\mathring{a}}\, d\alpha^1$$

Приравнивая нулю сумму полученных слагаемых, приходим к условию равенства нулю главного момента

$$\left[\frac{\partial \sqrt{\mathring{a}}\, \mathrm{M}^1}{\partial\alpha^1} + \frac{\partial \sqrt{\mathring{a}}\, \mathrm{M}^2}{\partial\alpha^2} + \mathrm{r}_1 \times \sqrt{\mathring{a}}\, (\mathrm{T}^1 + T^1_{\cdot m}\mathrm{m}) + \right.$$

$$\left. + \mathrm{r}_2 \times \sqrt{\mathring{a}}\, (\mathrm{T}^2 + T^2_{\cdot m}\mathrm{m}) \right] d\alpha^1 d\alpha^2 = 0 \tag{5.2}$$

После сокращения в равенствах (5.1) и (5.2) множителя $d\alpha^1 d\alpha^2$ получаем векторные уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sqrt{\mathring{a}}\, (\mathrm{T}^\beta + T^\beta_{\cdot m}\mathrm{m})}{\partial\alpha^\beta} + \sqrt{a}\, \mathrm{q} = 0 \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial \sqrt{\mathring{a}} \mathrm{M}^\beta}{\partial\alpha^\beta} + r_\beta \times \sqrt{\mathring{a}} (\mathrm{T}^\beta + \mathrm{T}^\beta_{\cdot m}\mathrm{m}) + \sqrt{a}\mathrm{K} = 0$$

где K — плотность распределенного момента. С помощью соотношений (1.9), (2.3), (4.6) получаем отсюда пять скалярных уравнений

$$\frac{\partial \sqrt{\mathring{a}}\, T^{\beta j}}{\partial\alpha^\beta} + \left(\Gamma^j_{\beta\mu} - \frac{m^j}{m_n} b_{\beta\mu}\right) \sqrt{\mathring{a}}\, T^{\beta\mu} +$$

$$+ \left(a^{j\gamma} + \frac{m^j m^\gamma}{(m_n)^2} \right) \left(\frac{\partial \mathrm{m}}{\partial\alpha^\beta} \right)_\gamma \sqrt{\mathring{a}}\, T^\beta_{\cdot m} + \sqrt{a}\, q^j = 0 \quad (j, \beta, \gamma, \mu = 1, 2)$$

$$\frac{\partial \sqrt{\mathring{a}}\, T^\beta_{\cdot m}}{\partial\alpha^\beta} - \frac{m^\gamma}{(m_n)^2} \left(\frac{\partial \mathrm{m}}{\partial\alpha^\beta} \right)_\gamma \sqrt{\mathring{a}}\, T^\beta_{\cdot m} + \frac{b_{\beta\mu}}{m_n} \sqrt{\mathring{a}}\, T^{\beta\mu} + \sqrt{a}\, q_m = 0 \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial \sqrt{\mathring{a}}\, M^{\beta j}}{\partial\alpha^\beta} + \left(\Gamma^j_{\beta\gamma} - \frac{m^j}{m_n} b_{\beta\gamma}\right) \sqrt{\mathring{a}}\, M^{\beta\gamma} - \frac{m^\gamma}{(m_n)^2} \left(\frac{\partial \mathrm{m}}{\partial\alpha^\beta} \right)_\gamma \sqrt{\mathring{a}}\, M^{\beta j} -$$

$$- \sqrt{\overset{\circ}{a}}\, T^{j}_{\cdot m} + \sqrt{a}\, \frac{m_2 K_m + K_{3-j}}{m_n} = 0$$

6. При осесимметричной деформации оболочка вращения остается оболочкой вращения. В качестве материальных координат примем (фиг. 3, *а*) длину дуги меридиана $\overset{\circ}{s}$ и угол $\overset{\circ}{\theta}$ недеформированной срединной поверхности. При этом $\alpha^1 = \overset{\circ}{s}$, $\alpha^2 = \overset{\circ}{\theta}$. В силу предположенной осесимметричности деформации $\theta = \overset{\circ}{\theta}$ и

$$\overset{\circ}{x} = \overset{\circ}{r}(\overset{\circ}{s}) \cos \overset{\circ}{\theta}, \quad \overset{\circ}{y} = \overset{\circ}{r}(\overset{\circ}{s}) \sin \overset{\circ}{\theta}, \quad \overset{\circ}{z} = \overset{\circ}{z}(\overset{\circ}{s})$$

$$x = r(\overset{\circ}{s}) \cos \overset{\circ}{\theta}, \quad y = r(\overset{\circ}{s}) \sin \overset{\circ}{\theta}, \quad z = z(\overset{\circ}{s})$$

Из фиг. 3, *в* находим $((\ldots)' = d/d\overset{\circ}{s})$:

$$\overset{\circ}{r}{}' = \cos \overset{\circ}{\varphi}, \quad \overset{\circ}{z}{}' = -\sin \overset{\circ}{\varphi} \tag{6.1}$$

Пусть λ_s и λ_θ — главные кратности удлинений срединной поверхности вдоль меридиана и параллели. Из фиг. 3, *а* следует

$$\lambda_s = ds/d\overset{\circ}{s}, \quad \lambda_\theta = r/\overset{\circ}{r} \tag{6.2}$$

Используя эти равенства, а также рисунок, аналогичный фиг. 3, *в*, но составленный применительно к деформированной конфигурации, получаем

$$r' = \lambda_s \cos \varphi, \quad z' = -\lambda_s \sin \varphi \tag{6.3}$$

С учетом полученных выражений подсчитываем по формулам (1.7), (1.9):

$$\begin{gathered}
\overset{\circ}{a}_{11} = 1, \quad \overset{\circ}{a}_{22} = \overset{\circ}{r}{}^2, \quad \overset{\circ}{a}_{12} = 0, \quad \overset{\circ}{a} = \overset{\circ}{r}{}^2 \\
\overset{\circ}{a}{}^{11} = 1, \quad \overset{\circ}{a}{}^{22} = \overset{\circ}{r}{}^{-2}, \quad \overset{\circ}{a}{}^{12} = 0 \\
\overset{\circ}{b}{}^1_1 = -\overset{\circ}{\varphi}{}', \quad \overset{\circ}{b}{}^2_2 = -\sin \overset{\circ}{\varphi}/\overset{\circ}{r}, \quad \overset{\circ}{b}{}^2_1 = \overset{\circ}{b}{}^1_2 = 0 \\
\overset{\circ}{b}{}^{11} = -\overset{\circ}{\varphi}{}', \quad \overset{\circ}{b}{}^{22} = -\sin \overset{\circ}{\varphi}/\overset{\circ}{r}{}^3, \quad \overset{\circ}{b}{}^{12} = 0 \\
a_{11} = \lambda_s^2, \quad a_{22} = (\overset{\circ}{r}\lambda_\theta)^2, \quad a_{12} = 0, \quad a = (\overset{\circ}{r}\lambda_s\lambda_\theta)^2 \\
a^{11} = \lambda_s^{-2}, \quad a^{22} = (\overset{\circ}{r}\lambda_\theta)^{-2}, \quad a^{12} = 0 \\
b^1_1 = -\lambda_s^{-1}\varphi', \quad b^2_2 = -(\overset{\circ}{r}\lambda_\theta)^{-1} \sin \varphi, \quad b^2_1 = b^1_2 = 0 \\
b_{11} = -\lambda_s \varphi', \quad b_{22} = -\overset{\circ}{r}\lambda_\theta \sin \varphi, \quad b_{12} = 0 \\
\Gamma^1_{11} = \lambda_s^{-1}\lambda_s{}', \quad \Gamma^2_{12} = \overset{\circ}{r}{}^{-1}\lambda_s\lambda_\theta^{-1} \cos \varphi \\
\Gamma^1_{22} = -\overset{\circ}{r}\lambda_s^{-1}\lambda_\theta \cos \varphi, \quad \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^1_{12} = 0
\end{gathered} \tag{6.4}$$

Переходя к физическим компонентам, положим

$$\omega_{(2)} = \omega, \quad \omega_{(1)} = \omega_{(3)} = 0 \tag{6.5}$$

Отсюда и из соотношений (2.11)—(2.13), (2.3), (2.8) последовательно получаем

$$\begin{gathered}
m_1 = \lambda_s \sin \omega, \quad m^1 = \lambda_s^{-1} \sin \omega, \quad m_2 = m^2 = 0, \quad m_n = \cos \omega \\
\left(\frac{\partial \mathrm{m}}{\partial \alpha^1}\right)_1 = \lambda_s (\varphi' + \omega') \cos \omega, \quad \left(\frac{\partial \mathrm{m}}{\partial \alpha^2}\right)_2 = \overset{\circ}{r}\lambda_\theta \sin(\varphi + \omega) \\
\left(\frac{\partial \mathrm{m}}{\partial \alpha^1}\right)_n = -(\varphi' + \omega') \sin \omega, \quad \left(\frac{\partial \mathrm{m}}{\partial \alpha^1}\right)_2 = \left(\frac{\partial \mathrm{m}}{\partial \alpha^2}\right)_1 = \left(\frac{\partial \mathrm{m}}{\partial \alpha^2}\right)_n = 0
\end{gathered} \tag{6.6}$$

$$\begin{gathered}
\{\mathrm{I}\}_{11} = 2\lambda_\xi \lambda_s (\varphi' + \omega') \cos \omega + 2\lambda_\xi{}' \lambda_s \sin \omega \\
\{\mathrm{I}\}_{22} = 2\lambda_\xi \lambda_\theta \overset{\circ}{r} \sin \omega, \quad \{\mathrm{I}\}_{12} = \{\mathrm{I}\}_{21} = 0
\end{gathered} \tag{6.7}$$

Согласно (2.10) имеем для несжимаемого материала

$$\lambda_\xi = 1/(\lambda_s\lambda_\theta \cos\omega) \tag{6.8}$$

$$\varkappa_\xi = -\lambda_s^{-1}\lambda_\theta^{-2}\frac{\sin(\varphi+\omega)}{\mathring{r}\cos\omega} - \lambda_s^{-2}\lambda_\theta^{-1}\frac{\varphi'+\omega'}{\cos^2\omega} + \mathring{\varphi}' + \frac{\sin\mathring{\varphi}}{\mathring{r}}$$

Уравнения равновесия (5.4) принимают следующий вид:

$$(\mathring{r}T_s)' + \operatorname{tg}\omega\varphi'(\mathring{r}T_s) - \left[\frac{\cos\varphi}{\mathring{r}} - \operatorname{tg}\omega\frac{\sin\varphi}{\mathring{r}}\right](\mathring{r}T_\theta) +$$

$$+\frac{(\varphi'+\omega')}{\cos\omega}(\mathring{r}T_{sm}) + \mathring{r}\lambda_s\lambda_\theta q_s = 0$$

$$(\mathring{r}T_{sm})' - \frac{1}{\cos\omega}\left[\varphi'(\mathring{r}T_s) + \frac{\sin\varphi}{\mathring{r}}(\mathring{r}T_\theta)\right] -$$

$$-\operatorname{tg}\omega(\varphi'+\omega')(\mathring{r}T_{sm}) + \mathring{r}\lambda_s\lambda_\theta q_m = 0 \tag{6.9}$$

$$(\mathring{r}M_s)' - \operatorname{tg}\omega\omega'(\mathring{r}M_s) - \left[\frac{\cos\varphi}{\mathring{r}} - \operatorname{tg}\omega\frac{\sin\varphi}{\mathring{r}}\right](\mathring{r}M_\theta) - \lambda_s(\mathring{r}T_{sm}) + \frac{\mathring{r}\lambda_s\lambda_\theta}{\cos\omega}K_\theta = 0$$

Здесь, как и в [1]:

$$T_s = T_{\langle 11\rangle} = T^{11}\sqrt{\mathring{a}_{11}a_{11}} = T^{11}\lambda_s, \quad S_s = S^{11}\lambda_s, \quad M_s = M^{11}\lambda_s$$

$$T_{sm} = T_{\langle 1\rangle m} = T^{1}_{\cdot m}\sqrt{\mathring{a}_{11}} = T^{1}_{\cdot m} \tag{6.10}$$

$$T_\theta = T_{\langle 22\rangle} = T^{22}\sqrt{\mathring{a}_{22}a_{22}} = T^{22}\mathring{r}^2\lambda_\theta, \quad S_\theta = S^{22}\mathring{r}^2\lambda_\theta, \quad M_\theta = M^{22}\mathring{r}^2\lambda_\theta$$

физические компоненты двойных тензоров усилий и моментов (отнесенные по первому индексу к недеформированной, а по второму — к деформированной конфигурации срединной поверхности) и вектора перерезывающих усилий.

Уравнения равновесия (6.9) можно записать в более удобном, не содержащем производные от φ и $(\varphi + \omega)$, виде

$$(\mathring{r}T_z)' = -\mathring{r}\lambda_s\lambda_\theta q_z, \quad (\mathring{r}T_r)' = T_\theta - \mathring{r}\lambda_s\lambda_\theta q_r \tag{6.11}$$

$$(\mathring{r}M_s\cos\omega)' = M_\theta\cos(\varphi+\omega) + \lambda_s\mathring{r}T_{sm}\cos\omega - \mathring{r}\lambda_s\lambda_\theta K_\theta$$

$$T_z = -T_s\sin\varphi + T_{sm}\cos(\varphi+\omega), \quad T_r = T_s\cos\varphi + T_{sm}\sin(\varphi+\omega) \tag{6.12}$$

$$q_z = -q_s\sin\varphi + q_m\cos(\varphi+\omega), \quad q_r = q_s\cos\varphi + q_m\sin(\varphi+\omega)$$

С помощью полученных зависимостей выражения (3.9) принимают вид

$$\sigma^{11}_{(0)} = 2(1 - \lambda_s^{-4}\lambda_\theta^{-2}/\cos^2\omega)\Phi_0'$$

$$\mathring{r}^2\sigma^{22}_{(0)} = 2(1 - \lambda_s^{-2}\lambda_\theta^{-4})\Phi_0', \quad \sigma^{13}_{(0)} = 2\lambda_s^{-2}\lambda_\theta^{-1}\operatorname{tg}\omega\Phi_0'$$

$$\sigma^{11}_{(1)} = 4\left(1 - \frac{\lambda_s^{-4}\lambda_\theta^{-2}}{\cos^2\omega}\right)\left\{\lambda_\theta^{-1}\left(1 - \frac{\lambda_s^{-4}\lambda_\theta^{-2}}{\cos^4\omega}\right)(\varphi'+\omega') + \lambda_s^{-1}\left(1 - \frac{\lambda_s^{-2}\lambda_\theta^{-4}}{\cos^2\omega}\right)\times\right.$$

$$\times\frac{\sin(\varphi+\omega)}{\mathring{r}\cos\omega} + \lambda_\xi'\lambda_s\sin\omega - \lambda_s^2\left(1 - \frac{\lambda_s^{-4}\lambda_\theta^{-2}}{\cos^2\omega}\right)\mathring{\varphi}' - \lambda_\theta^2\left(1 - \frac{\lambda_s^{-2}\lambda_\theta^{-4}}{\cos^2\omega}\right)\times$$

$$\left.\times\frac{\sin\mathring{\varphi}}{\mathring{r}}\right\}\Phi_0'' + 4\left\{\lambda_s^{-6}\lambda_\theta^{-3}\left(1 + \frac{1}{\cos^2\omega}\right)\frac{(\varphi'+\omega')}{\cos^2\omega} + \lambda_s^{-5}\lambda_\theta^{-4}\frac{\sin(\varphi+\omega)}{\mathring{r}\cos^3\omega} +\right.$$

$$\left.+\lambda_\xi'\lambda_s^{-5}\lambda_\theta^{-2}\frac{\sin\omega}{\cos^2\omega} - \left(1 + \frac{\lambda_s^{-4}\lambda_\theta^{-2}}{\cos^2\omega}\right)\mathring{\varphi}' - \frac{\lambda_s^{-4}\lambda_\theta^{-2}}{\cos^2\omega}\frac{\sin\mathring{\varphi}}{\mathring{r}}\right\}\Phi_0' \tag{6.13}$$

$$
\overset{\circ}{r}{}^2\sigma^{22}_{(1)} = 4\,(1-\lambda_s^{-2}\lambda_\theta^{-4})\left\{\lambda_\theta^{-1}\left(1-\frac{\lambda_s^{-4}\lambda_\theta^{-2}}{\cos^4\omega}\right)(\varphi'+\omega') + \right.
$$

$$
+\,\lambda_s^{-1}\left(1-\frac{\lambda_s^{-2}\lambda_\theta^{-4}}{\cos^2\omega}\right)\frac{\sin(\varphi+\omega)}{\overset{\circ}{r}\cos\omega} + \lambda_\xi'\lambda_s\sin\omega - \lambda_s^2\left(1-\frac{\lambda_s^{-4}\lambda_\theta^{-2}}{\cos^2\omega}\right)\overset{\circ}{\varphi}{}' -
$$

$$
\left. -\,\lambda_\theta^2\left(1-\frac{\lambda_s^{-2}\lambda_\theta^{-4}}{\cos^2\omega}\right)\frac{\sin\overset{\circ}{\varphi}}{\overset{\circ}{r}}\right\}\Phi_0'' +
$$

$$
+\,4\left\{\left(1+\frac{1}{\cos^2\omega}\right)\lambda_s^{-3}\lambda_\theta^{-6}\frac{\sin(\varphi+\omega)}{\overset{\circ}{r}\cos\omega} + \lambda_s^{-4}\lambda_\theta^{-5}(\varphi'+\omega') + \right.
$$

$$
\left. +\,\lambda_\xi'\lambda_s^{-3}\lambda_\theta^{-4}\sin\omega - \lambda_s^{-2}\lambda_\theta^{-4}\overset{\circ}{\varphi}{}' - (1+\lambda_s^{-2}\lambda_\theta^{-4})\frac{\sin\overset{\circ}{\varphi}}{\overset{\circ}{r}}\right\}\Phi_0'
$$

Введем обозначения по аналогии с [1]:

$$
\varkappa_s = \lambda_s^{-2}\lambda_\theta^{-1}(\varphi'+\omega') - \overset{\circ}{\varphi}{}', \quad \varkappa_\theta = \lambda_s^{-1}\lambda_\theta^{-2}\frac{\sin(\varphi+\omega)}{\overset{\circ}{r}\cos\omega} - \frac{\sin\overset{\circ}{\varphi}}{\overset{\circ}{r}}
$$

$$
\varkappa_s^1 = \frac{\lambda_s^{-2}\lambda_\theta^{-1}}{\cos^2\omega}(\varphi'+\omega') - \overset{\circ}{\varphi}{}', \quad \varkappa_\theta^1 = \frac{\lambda_s^{-1}\lambda_\theta^{-2}}{\cos^2\omega}\,\frac{\sin(\varphi+\omega)}{\overset{\circ}{r}\cos\omega} - \frac{\sin^{\circ}}{\overset{\circ}{r}}
$$

и новую величину $\varkappa_\delta = \lambda_s^2\varkappa_s + \lambda_\theta^2\varkappa_\theta + \lambda_\xi^2\varkappa_\xi + \lambda_\xi'\lambda_s\sin\omega$; тогда $\varkappa_\xi = -(\varkappa_s^1 + \varkappa_\theta)$, а последние два выражения (6.13) примут вид

$$
\sigma^{11}_{(1)} = \underline{2\sigma^{11}_{(0)}\left(\frac{\Phi_0''}{\Phi_0'}\varkappa_\delta - \overset{\circ}{\varphi}{}'\right)} + 4\,\frac{\lambda_s^{-4}\lambda_\theta^{-2}}{\cos^2\omega}(\varkappa_s + \varkappa_s^1 + \varkappa_\theta + \lambda_\xi'\lambda_s^{-1}\sin\omega)\,\Phi_0' \tag{6.14}
$$

$$
\overset{\circ}{r}{}^2\sigma^{22}_{(1)} = \underline{2\overset{\circ}{r}{}^2\sigma^{22}_{(0)}\left(\frac{\Phi_0''}{\Phi_0'}\varkappa_\delta - \frac{\sin\overset{\circ}{\varphi}{}'}{\overset{\circ}{r}}\right)} + 4\lambda_s^{-2}\lambda_\theta^{-4}(\varkappa_\theta + \varkappa_\theta^1 + \varkappa_s + \lambda_\xi'\lambda_s^{-1}\sin\omega)\,\Phi_0'
$$

Подчеркнутые члены, по-видимому, можно отбросить.

Из соотношений (4.11), (4.13), (6.10), (6.13) и (6.11) получаем выражения для усилий и моментов

$$
T_s \simeq S_s = 2\overset{\circ}{h}\lambda_s\left(1-\frac{\lambda_s^{-4}\lambda_\theta^{-2}}{\cos^2\omega}\right)\Phi_0'
$$

$$
T_\theta \simeq S_\theta = 2\overset{\circ}{h}\lambda_\theta(1-\lambda_s^{-2}\lambda_\theta^{-4})\,\Phi_0' \tag{6.15}
$$

$$
T_{sm} = 2\overset{\circ}{h}\lambda_s^{-3}\lambda_\theta^{-2}\frac{\sin\omega}{\cos^2\omega}\Phi_0'
$$

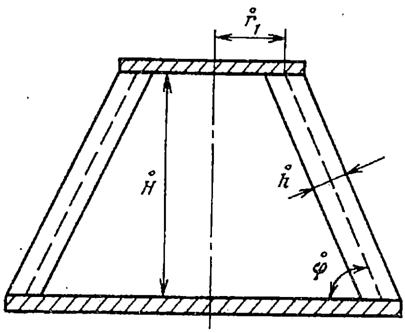
$$
M_s = \frac{\overset{\circ}{h}{}^3}{3}\,\frac{\lambda_s^{-4}\lambda_\theta^{-3}}{\cos^3\omega}(\varkappa_s + \varkappa_s^1 + \varkappa_\theta + \lambda_\xi'\lambda_s^{-1}\sin\omega)\,\Phi_0' \tag{6.16}
$$

$$
M_\theta = \frac{\overset{\circ}{h}{}^3}{3}\,\frac{\lambda_s^{-3}\lambda_\theta^{-4}}{\cos\omega}(\varkappa_\theta + \varkappa_\theta^1 + \varkappa_s + \lambda_\xi'\lambda_s^{-1}\sin\omega)\,\Phi_0'
$$

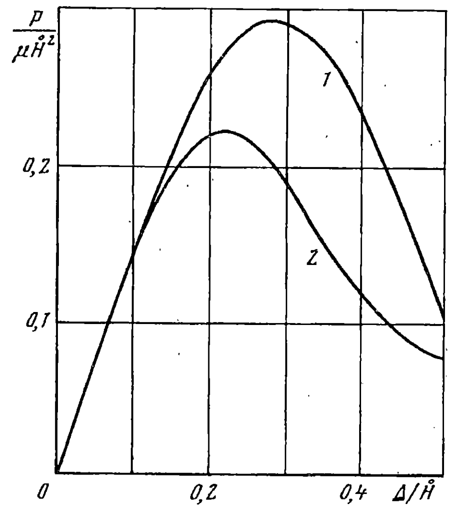
Если в (6.9), (6.15), (6.16) положить $\omega = 0$, отбросив третье уравнение в (6.15), и взять неогуковский материал ($n = 1$ в (3.10)), то получится система уравнений, основанная на гипотезах Кирхгофа и совпадающая с системой построенной в [1].

Отметим, что в случае осесимметричной деформации учет сдвига не привел к повышению порядка разрешающей системы дифференциальных уравнений и, как и в [1], остался равным 6.

7. Рассмотрим задачу о сжатии конического амортизатора с привулканизированными к торцам металлическими пластинами (фиг. 4). Ли-



Фиг. 4



Фиг. 5

нейные размеры амортизатора, отнесенные к высоте $\mathring{H}$, следующие: $\mathring{r}_1 = 0{,}3$, $\mathring{h} = 0{,}217$. Угол наклона образующей конуса $\mathring{\varphi} = 60^\circ$. Считаем, что на нижнем основании имеют место условия заделки $\mathring{s} = \mathring{s}_2$: $r = \mathring{r}$, $z = 0$, $(\varphi + \omega) = \mathring{\varphi}$, а на верхнем — скользящий шарнир $\mathring{s} = \mathring{s}_1$: $r = \mathring{r}$, $z = H - \Delta$, $M_s = 0$.

На фиг. 5 показана зависимость сжимающая сила — осадка; приведены две расчетные кривые: *1* — соответствует теория без учета сдвига [1], *2* — построена по предложенным уравнениям. Кривые построены для случая неогуковского материала. Наблюдаемое существенное уменьшение жесткости амортизатора при учете поперечного сдвига, как и следовало ожидать, связано с появлением дополнительной степени свободы в модели.

При проведении расчетов оценивалась и значимость четвертого слагаемого в круглых скобках формул (6.16). Оказалось, что величина вклада этого слагаемого в каждой точке меридиана амортизатора более чем на порядок меньше суммы первых трех. По-видимому, всегда им можно пренебрегать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Черных К. Ф.* Нелинейная теория изотропно упругих тонких оболочек//Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 2. С. 148—159.
2. *Черных К. Ф.* Теория тонких оболочек из эластомеров (резиноподобных материалов)//Успехи механики. 1983. Т. 6. С. 111—147.
3. *Черных К. Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
4. *Айнола Л. Я.* Нелинейная теория типа Тимошенко для упругих оболочек//Изв. АН ЭССР. Серия физ.-мат. и техн. наук. 1965. Т. 14. № 3. С. 337—344.
5. *Галимов К. З.* К нелинейной теории тонких оболочек типа Тимошенко//Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 4. С. 155—166.
6. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
7. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига/Под ред. К. З. Галимова. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1977. 212 с.
8. *Рикардс Р. Б., Тетерс Г. А.* Устойчивость оболочек из композиционных материалов. Рига: Зинатне, 1974. 310 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
20.XII.1993